文章编号:1672 - 058X(2012)02 - 0017 - 03

S-可数性

湛小钧
(西南大学 数学与统计学院,重庆 400715)

摘　要:在拓扑空间中利用 S-基和局部 S-基,提出第一 S-可数性公理和第二 S-可数性公理,同时对 S-基与局部 S-基,第一 S-可数性与第二 S-可数性之间的关系进行探讨,得出一些新结果.

关键词:半开集;S-基;局部 S-基;S-可数性;积空间
中图分类号:O189.1　　　　**文献标志码**: A

1　知识准备

τ 表示 X 的所有开子集族,ψ 表示 X 的所有闭子集族,(X,τ)表示 X 的一个拓扑空间,对于 $A\subset X$,$\overline{A}$表示 A 的闭包,A'表示 A 的补集.

定义 1[1]　设 X 是拓扑空间,$A\subset X$,若存在 X 中的开集 U,使得 $U\subset A\subset \overline{U}$,则称 A 为 X 中的半开集. 拓扑空间 X 中的一切半开集做成的集合记为 $S\cdot O(X)$. 显然 $\tau\subset S\cdot O(X)$,$(X,S\cdot O(X))$为 X 的一个半拓扑空间,称 $S\cdot O(X)$为(X,τ)的半拓扑结构.

定义 2[1]　设 X 是拓扑空间,$B\subset X$,若 B 在 X 中的余集 B'是 X 中的半开集,则称 B 为 X 的半闭集. 拓扑空间 X 中的一切半闭集作成的集合记为 $S\cdot C(X)$.

定理 1[1]　设(X,τ)是拓扑空间,则 1) 开集是半开集;2) 任意半开集的并是半开集;半开集的交一般不是半开集;开集与半开集的交为半开集;3) 任意半闭集的交是半闭集;半闭集并一般不是半闭集;闭集与半闭集的并为半闭集;4) 设 X 是拓扑空间,$Y\subset X$ 是一开子空间,则 $A\subset Y$ 是 Y 的半开集当且仅当存在 X 中的半开集 U,使 $A=U\cap Y$.

定义 3[2]　设 f 是拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的一个映射,则 1) 对任意 $A\in S\cdot O(Y)$,有 $f^{-1}(A)\in S\cdot O(X)$,则称 f 为不定映射;2) 对任意 $A\in S\cdot O(X)$,有 $f(A)\in S\cdot O(Y)$,则称 f 为半开映射;3) 对任意 $A\in S\cdot C(X)$,有 $f(A)\in S\cdot C(Y)$,则称 f 为半闭映射.

2　S-基及局部 S-基

定义 4[3]　设 X 是拓扑空间,$x\in X$. 如果 U 是 X 的一个子集,满足条件:存在 $V\in S\cdot O(X)$,使得 $x\in V\subset U$,则称 U 是点 x 的一个 S-邻域. 点 x 的所有 S-邻域构成的 X 的子集族称为点 x 的 S-邻域系.

定义 5[4]　设 X 是拓扑空间,β 是 $S\cdot O(X)$的一个子族. 如果 $S\cdot O(X)$的每一个元素(即 X 中的每一个

收稿日期:2011 - 03 - 21;**修回日期**:2011 - 04 - 18.
作者简介:湛小钧(1986-),女,重庆人,硕士研究生,从事微分几何与几何分析研究.

半开集)是β中的某些元素的并,即对于每一个$U\in S\cdot O(X)$,存在$\beta_1\subset\beta$,使得$U=\bigcup_{B\in\beta_1}B$,则称β是拓扑$S\cdot O(X)$的一个S-基,或称β是拓扑空间X的一个S-基.

定义 6[3] 设X是拓扑空间,$x\in X$. 设μ_x为x的S-邻域系. μ_x的子族υ_x如果满足条件:对于每一个$U_x\in\mu_x$,存在$V_x\in\upsilon_x$,使得$V_x\subset U_x$,则称υ_x是点x的局部S-基.

定理 2 设X是拓扑空间,则 1) 对X中任一点x,x的任意邻域是它的S-邻域,但x的S-邻域不必是其邻域;2) 拓扑空间X的一个子集A是半开集的充分必要条件是:A是它的每一点的S-邻域,即只要$x\in A$,A便是x的一个S-邻域.

证明

1) 由开集是半开集即可得.

2) 定理中的必要性是显然的,因A是半开集,则对A中每一点x,存在半开集A,使得$x\in A\subset A$,于是A是它的每一点的S-邻域.

下证明充分性. 如果A是空集$\varnothing$,当然A是一个半开集. 下设$A\neq\varnothing$. 根据定理 2 中的条件,对于每一个$x\in U$,存在一个半开集A_x,使得$x\in A_x\subset A$. 因此$A=\bigcup_{x\in A}\{x\}\subset\bigcup_{x\in A}A_x\subset A$. 故$A=\bigcup_{x\in A}A_x$. 于是$A$是一个半开集.

定理 3 设β是拓扑空间X的半开集族,则β是拓扑空间X的S-基当且仅当对于每一个$x\in X$和x的每一个S-邻域U_x,存在$V_x\in\beta$,使得$x\in V_x\in U_x$.

证明 先证必要性. 若β为X的S-基,则对于每一个$x\in X$,以及x的每一个S-邻域U_x,存在x的半开邻域$W_x\subset U_x$. 由于W_x是半开集,存在$\beta_1\subset\beta$,使得$W_x=\bigcup_{B\in\beta_1}B$,可知存在$V_x\in\beta_1\subset\beta$使$x\in V_x\subset\bigcup_{B\in\beta_1}B=W_x\subset U_x$.

再证充分性. 若A为X的任意半开集,由条件对于每一$x\in A$,由于A为X的S-邻域,故存在$V_x\in\beta$,使$x\in V_x\subset A$. 于是$A=\bigcup_{x\in A}\{x\}\subset\bigcup_{x\in A}V_x\subset A$,即$A=\bigcup_{x\in A}V_x$. 即$A$可表示为$\beta$中某些成员的并,从而$\beta$为$X$的$S$-基.

定理 4 设β为拓扑空间X的一个S-基,$x\in X$,则$\beta_x=\{B\in\beta\mid x\in B\}$是点$x$的一个局部$S$-基.

证明 易证.

定理 5 设Y是拓扑空间X的一个开子空间,$y\in Y$,则 1) 如果β是拓扑空间X的一个S-基,则$\beta|_Y$是开子空间Y的一个S-基;2) 如果υ_y是点y在拓扑空间X中的一个局部S-基,则$\upsilon_y|_Y$是点y在开子空间Y中的一个局部S-基.

证明

1) 设β是X的一个S-基. 对于Y中的任何一个S-开集U,存在X中的一个S-开集V,使得$U=V\cap Y$;存在β的一个子族β_1,使得$V=\bigcup_{B\in\beta_1}B$. 因此$U=\bigcup_{B\in\beta_1}(B\cap Y)$. 由于每一个$B\cap Y$是$\beta|_Y$中的一个元素,所以在$U$已经表示成了$\beta|_Y$中某些元素之并了. 因此$\beta|_Y$是$Y$的一个$S$-基.

2) 设υ_y是点y在X中的一个局部S-基. 如果U是y在Y中的一个S-邻域,则存在y在X中的一个S-邻域V,使得$U=V\cap Y$;于是存在$V_1\in\upsilon_y$使得$V_1\subset V$. 从而$V_1\cap Y$是y在Y中的一个S-邻域,并且$(V_1\cap Y)\subset(V\cap Y)=U$,其中$V_1\cap Y\in\upsilon_y|_Y$. 所以$\upsilon_y|_Y$是$y$在$Y$中的一个局部$S$-基.

定理 6 设$X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$是$n>1$个拓扑空间$X_1,X_2,\cdots,X_n$的积空间,对于每一个$i=1,2,\cdots,n$,拓扑空间$X_i$有一个$S$-基$\beta_i$,则$X$的子集族$\beta=\{B_1\times B_2\times\cdots\times B_n\mid B_i\in\beta_i,i=1,2,\cdots,n\}$是拓扑空间$X$的一个$S$-基.

证明 令β为积空间X的一个S-基. 为证明$\tilde\beta$是积空间X的一个S-基,只需证明β中的每一个元素均可以表示为$\tilde\beta$中的某些元素并.

设$U_1\times U_2\times\cdots\times U_n\in\beta$,其中$U_i\in S\cdot O(X_i)$. 由于$\beta_i$是$X_i$的一个$S$-基,故对于每一个$i$,存在$\alpha_i\in$

β_i,使得 $U_i = \bigcup_{B_i \in \beta_i} B_i$. 于是 $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n = (\bigcup_{B_1 \in \alpha_1} B_1) \times (\bigcup_{B_2 \in \alpha_2} B_2) \times \cdots \times \bigcup_{B_n \in \alpha_n} B_n = \bigcup_{B_1 \in \alpha_1, B_2 \in \alpha_2, \cdots, B_n \in \alpha_n} B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_n = \bigcup_{B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_n \in \alpha} B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_n$,其中 $\alpha = \{B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_n \mid B_i \in \alpha_i, i = 1,2,\cdots,n\} \subset \tilde{\beta}$. 于是 $\tilde{\beta}$ 是 X 的一个 S- 基.

3 S-可数性

定义 7[4] 设 X 是拓扑空间,则:

1)拓扑空间 X 如果有一个可数 S-基,则称 X 是一个满足第二 S-可数性公理的空间;2)拓扑空间 X 如果在它的每一点处都有一个可数局部 S-基,则称 X 是一个满足第一 S-可数性公理的空间.

定理 7[4] 每一个满足第二 S-可数性公理的空间都满足第一 S-可数性公理.

定理 8[4] 设 X 和 Y 是两个拓扑空间,$f:X \to Y$ 是一个 S-开的不定映射. 如果 X 满足第二(一)S-可数性公理,则 Y 也满足第二(一)S-可数性公理.

定理 9[4] 满足第二(一)S-可数性公理的空间的任何一个开子空间是满足第二(一)S-可数性公理的空间.

定义 8 设 X 和 Y 是两个拓扑空间,如果 $f:X \to Y$ 是一个一一映射,并且 f 是半开的不定映射,则称 f 是一个半同胚映射.

定义 9 设 X 和 Y 是两个拓扑空间,如果存在一个半同胚映射 $f:X \to Y$,则称拓扑空间 X 与拓扑空间 Y 是半同胚的. 拓扑空间的某种性质 P,如果为某一个拓扑空间所具有,必为与其半同胚的任何一个拓扑空间所具有,则称此性质 P 是一个半拓扑不变性质.

推论 1[4] 拓扑空间中的第一 S-可数性公理和第二 S-可数性公理的性质都是半拓扑不变性质.

定理 10 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 n 个满足第二(一)S-可数性公理的空间,则积空间 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 满足第二(一)S-可数性公理.

证明 下面只证明 X 满足第二 S-可数性公理的情况,对 X 满足第一 S-可数性公理的情况可类似证明.

先证明 $n=2$ 的情况. 设 X_1 和 X_2 都是满足第二 S-可数性公理的空间,β_1 和 β_2 分别是它们的可数 S-基. 根据定理 6,集族 $\tilde{\beta} = \{B_1 \times B_2 \mid B_i \in \beta_i, i=1,2\}$ 是积空间 $X_1 \times X_2$ 的一个基,它明显是一个可数族.

设 $n=k$ 的情况成立,即 $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k$ 满足第二 S-可数性公理.

对 $n=k+1$ 的情况,令 $Y = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_k$,$\beta_X$ 和 β_Y 分别是 X_{k+1} 和 Y 的可数 S-基. 根据定理 6,集族 $\beta' = \{B_Y \times B_X \mid B_Y \in \beta_Y, B_X \in \beta_X\}$ 是积空间 $Y \times X_{k+1}$ 的一个基. 它明显是一个可数族.

定理 11 设 X 是一个拓扑空间,如果在点 $x \in X$ 处有一个可数局部 S-基,则在点 x 处有一个可数局部 S-基 $\{U_i\}_{i \in Z_+}$,使得对于任何 $i \in Z_+$,有 $U_i \Leftrightarrow U_{i+1}$,即 $U_1 \Leftrightarrow U_2 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow U_i \Leftrightarrow U_{i+1} \Leftrightarrow \cdots$.

证明 设 $\{V_i\}_{i \in Z_+}$ 是点 $x \in Z$ 处的一个可数局部 S-基. 对于每一个 $i \in Z_+$,令 $U_i = V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_i$. 可直接验证 $\{V_i\}_{i \in Z_+}$ 便是点 x 处的满足定理要求的一个可数局部 S-基.

参考文献:

[1] 许兆龙. 半连通空间[J]. 南昌大学学报,2001(3):30-34

[2] 马跃超,杨姗姗. 半开映射的点态特征[J]. 哈尔滨商业大学学报,2002(10):530-531

[3] 杨新梅. S-可数性及 S-Lindelof 空间[J]. 吉首大学学报,1993(5):70-72

[4] 马跃超,杨姗姗. 关于 S-可数空间[J]. 哈尔滨师范大学学报:自然科学版,2002(6):21-23

[5] 熊金城. 点集拓扑讲义[M]. 3 版. 北京:高等教育出版社,2003

(下转第 22 页)