文章编号:1672 - 058X(2012)02 - 0013 - 04

指数有界双连续 α 次积分 C 半群的一个逼近*

李玉霞,宋晓秋,蔡 亮,禹晓红
(中国矿业大学 理学院,江苏 徐州 221008)

摘 要:在算子理论中,为讨论一些非强连续的半群性质,引用了巴拿赫空间上具有相对弱连续性质的局部凸空间强连续半群.在双连续 C 半群和 α 次积分 C 半群的基础上引入指数有界双连续 α 次积分 C 半群,经过论证,得到了指数有界双连续 α 次积分 C 半群的一个逼近定理.

关键词:双连续 α 次积分 C 半群;指数有界;逼近
中图分类号:O177 **文献标志码**: A

设 X 是 Banach 空间,X' 是它的共轭空间,τ 是 X 上的一个局部凸拓扑并且具有以下性质:

① 空间 (X,τ) 是在 $\|.\|$ 有界集上序列完备,即每个 $\|.\|$ 有界的 τ 柯西列在 (X,τ) 中收敛.

② τ 拓扑比 $\|.\|$ 拓扑粗且 τ 是 Hausdorff 拓扑.

③ $(X,\|.\|)$ 中的范数可以由空间 0 定义,即对每个 $x\in X$, $\|X\| = \sup\{<x,\varphi> \mid \varphi\in(X,\tau)',\|\varphi\|_{(X,\|.\|)'}\}, x\in X$.

为方便起见,记 $\Phi=\{\varphi\in(X,\tau)',\|\varphi\|_{(X,\|.\|)'}\}$,$P_\tau$ 是 X 上的局部凸拓扑 τ 所对应的半范数族. 不妨认为 $p(x)\leqslant\|x\|$,对所有的 $x\in X, p\in P_\tau$.

1 指数有界双连续 α 次积分 C 半群的概念

定义 1[1] 算子族 $\{S(t):t\geqslant0\}\subseteq L(X)$,称为等度双连续的,如果对每个有界序列 $\{x_n\}_{n\in N}\subseteq X$, $\tau-\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$,有 $\tau-\lim\limits_{n\to\infty}S(t)x_n=S(t)x$,对所有的 $t\geqslant0$ 都成立.

算子族 $\{S(t):t\geqslant0\}\subseteq L(X)$ 称为是局部等度双连续的,如果对于每个 $t_0\geqslant0$,子集 $\{S(t):0\leqslant t\leqslant t_0\}$ 是等度双连续的.

定义 2[1] 算子族 $\{S(t):t\geqslant0\}\subseteq L(X)$ 称为指数有界的,如果存在 $M>1, w\in R$ 满足 $\|S(t)\|\leqslant Me^{wt}$, $\forall t\geqslant0$.

定义 3 设 $C\in L(X)$ 且为单射,算子族 $\{S(t):t\geqslant0\}\subseteq L(X)$ 是 (X,τ) 上的指数有界双连续 α 次积分 C 半群,若满足:

① $S(0)=C, CS(t)=S(t)C$.

收稿日期:2011 - 04 - 30;**修回日期**:2011 - 06 - 02.
*基金项目:中央高校基本科研业务费用专项资金资助项目(LK0104).
作者简介:李玉霞(1986-),女,河南林州人,硕士研究生,从事算子半群理论研究.

② $\forall x\in X, S(t)S(s)=\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^{t+s}(t+s-r)^{\alpha-1}S(r)Cx\mathrm{d}r-\int_0^s(t+s-r)^{\alpha-1}S(r)Cx\mathrm{d}r.$

③ $\|S(t)\|_{L(x)}\leqslant M\mathrm{e}^{wt},\forall t\geqslant 0,M>1,w\in R.$

④ $\{S(t):t\geqslant 0\}$是$\tau-$强连续的,即$\forall\{x_n\}\subset X$,若$x_n\to x,n\to\infty$,有$\tau-\lim\limits_{n\to\infty}S(t)x_n=S(t)x.$

⑤ $\{S(t):t\geqslant 0\}$是局部双连续的.

若$\alpha=n(n\in N)$,则$\{S(t):t\geqslant 0\}$称为指数有界双连续n次积分C半群.

定义 4 设$C\in B(X)$,称$R(\cdot):D(R)\to L(X)(D(R)\subseteq C)$为$C-$伪预解式,如果满足$R(\lambda)C=CR(\lambda)$且$(\lambda-\mu)R(\lambda)R(\mu)=R(\mu)C-R(\lambda)C,\lambda,\mu\in D(R).$

2 指数有界双连续 α 次积分 C 半群的逼近定理

引理 1[2] 设$C\in B(X)$且为单射,A是闭的线性算子,$M,w\geqslant 0$,则有下列结论成立:

(1) $\lambda-A$是单射,$\forall\,\mathrm{Re}\lambda>w.$

(2) $R(C)\subset D((\lambda-A)^{-k}),\forall\,\mathrm{Re}\lambda>w.$

(3) $\left\|\left[\dfrac{R(\lambda,A)}{\lambda^{\alpha}}\right]^{(k)}\right\|\leqslant\dfrac{Mk!}{(\mathrm{Re}\lambda-w)^{k+1}},\forall\,\mathrm{Re}\lambda>w,k\in N.$

当且仅当A产生非退化的$(\alpha+1)$次积分C半群$\{S(t):t\geqslant 0\}$且$\limsup\limits_{h\to 0}\dfrac{\|S(t+h)-S(t)\|}{h}\leqslant M\mathrm{e}^{wt},\forall t\geqslant 0.$

证明 仿照文献[3]的证明过程,可以类似地证明.

引理 2[3] $\{S(t):t\geqslant 0\}\in G_{\tau}(\alpha,M,w)$,则对每个$a>w$,算子族$\{\mathrm{e}^{-at}S(t):t\geqslant 0\}$等度双连续.

证明 设$a>w,p\in P_{\tau}$,对每一个$\|.\|$有界序列$\{x_n\}_{n\in N}\subseteq X$,且$\tau-\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$,存在$t_0\geqslant 0$,使得$\sup\limits_{t>t_0}p[\mathrm{e}^{-at}S(t)(x_n-x)]\leqslant\sup\limits_{t>t_0}\|\mathrm{e}^{-at}S(t)(x_n-x)\|\leqslant\sup\limits_{t>t_0}\mathrm{e}^{(w-a)t}M(\|x_n\|+\|x\|)$. 由于$a>w,t\geqslant t_0\geqslant 0,\|x_n\|$有界,故对$\forall\varepsilon\geqslant 0$,有$\sup\limits_{t>t_0}\mathrm{e}^{(w-a)t}M(\|x_n\|+\|x\|)<\varepsilon/2.$

又由定义 3 中的⑤知,$\exists n_0\in N$,当$n\geqslant n_0$时,有$\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant t_0}p[\mathrm{e}^{-at}S(t)(x_n-x)]<\varepsilon/2$,于是当$n\geqslant n_0$时,$\sup\limits_{t\geqslant 0}p[\mathrm{e}^{-at}S(t)(x_n-x)]\leqslant\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant t_0}p[\mathrm{e}^{-at}S(t)(x_n-x)]+\sup\limits_{t\geqslant t_0}p[\mathrm{e}^{-at}S(t)(x_n-x)]<\varepsilon$,故得证.

定理 1 设$A_k,S_k(t)\in G(\alpha,M,w),k\in N,\{S(t):t\geqslant 0\}$非退化,有:

① $\tau-\lim\limits_{k\to\infty}R(\lambda,A_k)x=R(\lambda,A)x,\forall x\in X,\mathrm{Re}\lambda>w_0.$

② 对某个λ_0且$\mathrm{Re}\lambda_0>w$,使得$\tau-\lim\limits_{k\to\infty}R(\lambda_0,A_k)x=R(\lambda_0,A)x,\forall x\in X.$

③ 设D是A_0的核,则对$\forall x_0\in D$,存在$x_k\in D(x_k),k\in N$,使得$\tau-\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x_0,\tau-\lim\limits_{k\to\infty}A_kx_k=A_0x_0.$

④ $\tau-\lim\limits_{k\to\infty}S_k(t)x=S_0(t)x,\forall x\in\overline{(D(A_0))},t\geqslant 0.$

证明 根据逼近定理的条件,参照文献[4-8],可得①⇒②显然. 下面证明②⇒③.

对$\forall x_0\in D$,令$x_k=R(\lambda_0,A_k)C^{-1}(\lambda_0-A_0)x_0$,则:

$$x_k\in D(A_k),\tau-\lim_{k\to\infty}x_k=\tau-\lim_{k\to\infty}R(\lambda_0,A_k)C^{-1}(\lambda_0-A_0)x_0=R(\lambda_0,A_0)C^{-1}(\lambda_0-A_0)x_0=x_0$$

因为$A_kR(\lambda_0,A_k)C^{-1}=(A_k-\lambda_0+\lambda_0)R(\lambda_0,A_k)C^{-1}=\lambda_0R(\lambda_0,A_k)C^{-1}-I$,所以可得:

$$A_kx_k=A_kR(\lambda_0,A_k)C^{-1}(\lambda_0-A_0)x_0=(\lambda_0R(\lambda_0,A_k)C^{-1}-I)(\lambda_0-A_0)x_0=$$

$$(\lambda_0 R(\lambda_0, A_k) C^{-1})(\lambda_0 - A_0)x_0 - (\lambda_0 - A_0)x_0 = \lambda_0 x_k - \lambda_0 x_0 + A_0 x_0$$

则 $\tau - \lim\limits_{k\to\infty} A_k x_k = \tau - \lim\limits_{k\to\infty}(\lambda_0 x_k - \lambda_0 x_0 + A_0 x_0) = A_0 x_0$.

证明③⇒①.

对 $\forall x_0 \in D$,存在 $x_k \in D(A_k)$,$k\in N$,使得 $\tau - \lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$,$\tau - \lim\limits_{k\to\infty} A_k x_k = A_0 x_0$,令 $y_k = C^{-1}(\lambda - A_k)x_k$,则有:

$$\tau - \lim_{k\to\infty} y_k = \tau - \lim_{k\to\infty} C^{-1}(\lambda - A_k)x_k = C^{-1}(\lambda - A_0)x_0 = y_0$$

$$\tau - \lim_{k\to\infty} R(\lambda, A_k)y_k = \tau - \lim_{k\to\infty} R(\lambda - A_k)C^{-1}(\lambda - A_k)x_k = \tau - \lim_{k\to\infty} x_k =$$

$$x_0 = R(\lambda, A_0)C^{-1}(\lambda - A_0)x_0 = R(\lambda, A_0)y_0$$

令 $T_k(t)x = \int_0^t S_k(s)x\mathrm{d}s$, $\forall t \geqslant 0, x \in X$,则 $p(T_k(t)x) = p(\int_0^t S_k(s)x\mathrm{d}s) \leqslant \sup\limits_{\varphi\in\Phi} < \int_0^t S_k(s)x\mathrm{d}s, \varphi > \leqslant$ $\int_0^t M\mathrm{e}^{es}\|x\|\mathrm{d}s \leqslant M\mathrm{e}^{wt}\|x\|$,又因为 $R(\lambda, A_k) = \lambda^{\alpha}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}S_k(s)\mathrm{d}s = \lambda^{\alpha+1}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}T_k(s)\mathrm{d}s$,从而:

$$p(T_k(t+h) - T_k(t)) = p(\int_t^{t+h} S_k(s)x\mathrm{d}s) \leqslant \int_t^{t+h} M\mathrm{e}^{ws}\|x\|\mathrm{d}s \leqslant Mh\mathrm{e}^{w(t+h)}\|x\|.$$

因 $\left\|\left[\dfrac{R(\lambda, A)}{\lambda^n}\right]^{(k)}\right\| \leqslant \dfrac{Mk!}{(\mathrm{Re}\lambda - w)^{K+1}}$, $\forall \mathrm{Re}\lambda > w, k\in N$,故:

$$p(R(\lambda, A_k)y_0 - R(\lambda, A_0)y_0) \leqslant p(R(\lambda, A_k)(y_0 - y_k)) + p((R(\lambda, A_k)y_k - R(\lambda, A_0)y_0)) \leqslant$$

$$\sup_{\varphi\in\Phi} < R(\lambda, A_k)(y_0 - y_k), \varphi > + \sup_{\varphi\in\Phi} < R(\lambda, A_k)y_k - R(\lambda, A_0)y_0, \varphi > \leqslant$$

$$\frac{M}{\mathrm{Re}\lambda - w}y_0 - y_k + R(\lambda, A_k)y_k - R(\lambda, A_0)y_0 \to 0, k\to\infty$$

$\forall y_0 \in C^{-1}(\lambda - A_0)D$ 且 $\overline{C^{-1}(\lambda - A_0)D} = X$,从而 $\tau - \lim\limits_{k\to\infty} R(\lambda, A_k)y = R(\lambda, A_0)y$, $\forall y\in X$.

证明①⇒④.

对 $z\in C(D(A_0))$,令 $x_0 = C^{-1}(\lambda - A_0)z$,则 $z = R(\lambda, A_0)x$ 且 $p(S_k(t)z - S_0(t)z) = p(S_k(t)R(\lambda, A_0)x - S_0(t)R(\lambda, A_0)x) \leqslant p(S_k(t)[R(\lambda, A_0)x - R(\lambda, A_k)x]) + p(S_k(t)R(\lambda, A_k)x - S_0(t)R(\lambda, A_0)x) = A_1 + A_2$.

由式①及 $\|S_k(t)\| \leqslant M\mathrm{e}^{wt}$ 得 $\tau - \lim\limits_{k\to\infty} A_1 = 0$. 又因为 $A_k R(\lambda, A_k) = \lambda R(\lambda, A_k) - C$,得:

$$A_2 = p(\int_0^t S_k(s)R(\lambda, A_k)x\mathrm{d}s + \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}CR(\lambda, A_k)x -$$

$$\int_0^t S_0(s)R(\lambda, A_0)x\mathrm{d}s - \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}CR(\lambda, A_0)x) \leqslant$$

$$\lambda p(\int_0^t S_k(s)R(\lambda, A_k)x\mathrm{d}s - \int_0^t S_0(s)R(\lambda, A_0)x\mathrm{d}s) +$$

$$p(\int_0^t S_k(s)Cx\mathrm{d}s - \int_0^t S_0(s)Cx\mathrm{d}s) + \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}p(CR(\lambda, A_k)x - CR(\lambda, A_0)x) \leqslant$$

$$\lambda p(\int_0^t S_k(s)[R(\lambda, A_0)x\mathrm{d}s - R(\lambda, A_k)x\mathrm{d}s]) + \lambda p(\int_0^t S_k(s)R(\lambda, A_0)x\mathrm{d}s - \int_0^t S_0(s)R(\lambda, A_0)x\mathrm{d}s) +$$

$$p(\int_0^t S_k(s)Cx\mathrm{d}s - \int_0^t S_0(s)Cx\mathrm{d}s) + \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}p(R(\lambda, A_0)Cx - R(\lambda, A_k)Cx) \leqslant$$

$$\lambda \sup_{\varphi\in\Phi} < \int_0^t S_k(s)[R(\lambda, A_0)x\mathrm{d}s - R(\lambda, A_k)x\mathrm{d}s], \varphi > +$$

$$\lambda \sup_{\varphi\in\Phi} < \int_0^t S_k(s)R(\lambda, A_0)x\mathrm{d}s - \int_0^t S_0(s)R(\lambda, A_0)x\mathrm{d}s, \varphi > +$$

$$\sup_{\varphi\in\Phi} < \int_0^t S_k(s)Cx\mathrm{d}s - \int_0^t S_0(s)Cx\mathrm{d}s,\varphi > + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\sup_{\varphi\in\Phi} < R(\lambda,A_0)Cx - R(\lambda,A_k)Cx,\varphi > \leqslant$$

$$\lambda \left\| \int S_k(s)[R(\lambda,A_0)x\mathrm{d}s - R(\lambda,A_k)x\mathrm{d}s] \right\| + \lambda \left\| \int S_k(s)R(\lambda,A_0)x\mathrm{d}s - \int S_0(s)R(\lambda,A_0)x\mathrm{d}s \right\| +$$

$$\left\| \int S_k(s)Cx\mathrm{d}s - \int S_0(s)Cx\mathrm{d}s \right\| + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\| R(\lambda,A_0)Cx - R(\lambda,A_k)Cx \| \to 0, k\to\infty$$

证明④⇒①.

$R(\lambda,A_k)x = \lambda^\alpha\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}S_k(t)x\mathrm{d}t$,$R(\lambda,A_0)x = \lambda^\alpha\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}S_0(t)x\mathrm{d}t$,$\forall x\in X$.因为$\overline{C(D(A_0))} = X$,所以对$\forall x\in X$,存在$\{x_n\}\in C(D(A_0))$,使得$\tau-\lim\limits_{n\to\infty}x_n = x$,从而由式④知,$\tau-\lim\limits_{k\to\infty}R(\lambda,A_k)x_n = R(\lambda,A_0)x_n$,两边取极限得$\tau-\lim\limits_{k\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty}R(\lambda,A_k)x_n = \tau-\lim\limits_{n\to\infty}R(\lambda,A_0)x_n$,由控制收敛定理得$\tau-\lim\limits_{k\to\infty}R(\lambda,A_k)x = R(\lambda,A_0)x$,$\forall x\in X$.

参考文献:

[1] 王文娟. 双连续 C 半群[D]. 延安:延安大学,2005

[2] LI Y CH,SHAU S Y. Intergrated C-semigroup and the abstract Cauchy problem[J]. Taiwanese J Math,1997(1):75-102

[3] 常胜伟,赵华新,王晓梦. 指数有界双连续 n 次积分 C 半群及其性质[J]. 西南民族大学学报:自然科学版,2008,21(1):15-19

[4] 李晓敏,林乾,荣嵘. α 次积分 C 半群 Trotter-Kato 逼近定理[J]. 黑龙江科技学院学报,2007,17(5):377-380

[5] 李慧敏,宋晓秋. 双连续 C 半群的逼近定理[J]. 内江师范学院学报,2009,12(12):27-29

[6] 李慧敏,宋晓秋,赵月英. 双连续 n 次积分 C 余弦函数的逼近定理[J]. 应用泛函分析学报,2010,12(3):249-253

[7] 王文娟. 局部有界的双连续 C 半群及其逼近定理[J]. 数学杂志,2007(27):31-37

[8] 赵文强,宋树枝. 积分算子半群的逼近与表示[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版,2007,24(5):427-430

An Approximation for Exponential Bounded α-times Integrated Bi-continuous C-semigroups

LI Yu-xia, SONG Xiao-qiu, CAI Liang, YU Xiao-hong

(College of Science, China University of Mining and Technology, Jiangsu Xuzhou 221008, China)

Abstract: In the operator theory, in order to discuss some properties of semigroups which aren't strong continuous, a whole range of semigroups on Banach spaces having weaker continuity which are strongly continuous semigroups on locally convex spaces is introduced. Index bounded α-times integrated bi-continuous C-semigroups are drawn into on the basis of bi-continuous C-semigroups and α-times integrated C-semigroups, after discussion and verification, an approximation theorem for index bounded α-times integrated bi-continuous C-semigroups is obtained.

Key words: α-times integrated bi-continuous C-semigroups; index boundedness; approximation

责任编辑:李翠薇