文章编号:1672 -058X(2012)02 -0001 -04

对称熵损失函数下两参数广义指数分布形状参数的 Bayes 估计*

王 琪[1],李 玮[2]

(1. 电子科技大学 中山学院,广东 中山 528402;2. 江西师范大学 数学与信息科学学院,江西 南昌 330022)

摘 要:在对称熵损失函数下,讨论了两参数广义指数分布形状参数的 Bayes 估计和可容许估计,并给出了一类逆线性形式$(cT+d)^{-1}$估计的可容许性和不可容许性的条件.

关键词:Bayes 估计;可容许性;对称熵损失函数;广义指数分布

中图分类号:O212.5 **文献标志码**: A

两参数广义指数(GE)分布自 Gupta 和 Kunda((1999)提出以来,在机械可靠性、寿命试验等方面得到了广泛的应用.该分布的性质和统计推断理论引起了很多学者的兴趣并得到了广泛的研究[1].文献[2]中研究了广义指数分布中未知参数的不同估计方法,并且比较了它们的优劣性;文献[3-4]分别讨论了判断寿命数据来自于广义指数分布和威布尔分布以及寿命数据来自于广义指数分布和伽玛分布的极大似然比假设检验法问题;文献[5]讨论了未知尺度参数的逆矩估计方法;文献[6]在熵损失函数下讨论了两参数广义指数分布形状参数的 Bayes 估计和可容许性问题.

参数估计的可容许性问题是统计学研究的一个热点,如文献[7]在平方损失下研究了正态均值参数的可容许性问题,文献[8-9]在对称熵损失下分别研究了指数分布、正态分布参数的估计及容许性问题. 对称熵损失函数是在熵损失函数的基础上提出来的,它关于参数和估计量具有对称性.此处所考虑的对称熵损失函数为:

$$L(\theta,\delta) = \frac{\delta}{\theta} + \frac{\theta}{\delta} - 2 \tag{1}$$

显然,这个损失函数关于参数和估计量具有对称性,且关于估计量δ是严凸的,在$\theta=\delta$时,取最小值0. 此处将在对称熵损失函数下,讨论两参数广义指数分布形状参数的 Bayes 估计、多层 Bayes 估计和可容许估计,并讨论一类$(cT+d)^{-1}$形式估计的可容许性和不可容许性.

设随机变量 X 服从两参数广义指数分布,其概率密度函数:

$$f(x;\theta,\lambda) = \theta\lambda e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{\theta-1}, x > 0 \tag{2}$$

其中$\theta>0,\lambda>0$分别为形状参数和尺度参数.

1 一些引理

这一部分将给出参数的最小方差无偏估计,并在损失函数(1)下讨论参数的 Bayes 估计.

收稿日期:2010 -04 -12;**修回日期**:2011 -05 -27.

* **基金项目**:国家青年科学基金项目(71001046).

作者简介:王琪(1965-),男,湖北黄冈人,讲师,硕士,从事 Bayes 统计决策研究.

引理1 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为来自分布族(2)的一个简单随机样本,记 $X=(X_1,\cdots,X_n)$, $x=(x_1,\cdots,x_n)$, $T=-\sum_{i=1}^{n}\ln(1-\mathrm{e}^{-\lambda X_i})$, $t=-\sum_{i=1}^{n}\ln(1-\mathrm{e}^{-\lambda x_i})$,并设参数 θ 的共轭先验分布为伽玛分布 $\Gamma(a,b)$,相应的概率密度函数为:

$$\pi(\theta;a,b)=\frac{b^a}{\Gamma(a)}\theta^{a-1}\mathrm{e}^{-b\theta},\theta>0,a>0,b>0 \tag{3}$$

则 i) $\theta|X\sim\Gamma(n+a,b+T)$;ii) θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的后验概率密度区间为 $\left[\frac{\chi^2_{\alpha/2}(2(n+a))}{2(b+T)},\frac{\chi^2_{1-\alpha/2}(2(n+a))}{2(b+T)}\right]$;iii) θ 的最小方差无偏估计为 $\hat{\theta}_{\mathrm{MVU}}=\frac{n-1}{T}$.

证明 (i)设 $X_1,\cdots,X_n$ 为来自分布(2)的一个简单随机样本,则对于此类分布函数族,基于 n 个独立观察值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,得到似然函数:

$$L(x;\theta)=\prod_{i=1}^{n}\theta\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x_i}(1-\mathrm{e}^{-\lambda x_i})^{\theta-1}\propto\theta^n\mathrm{e}^{-t\theta} \tag{4}$$

设参数 θ 的共轭先验分布为伽玛分布 $\Gamma(a,b)$,给定样本 $X=(X_1,\cdots,X_n)$ 后,参数 θ 的后验概率密度为 $f(\theta|x)\propto L(x;\theta)\cdot\pi(\theta;a,b)\propto\theta^{n+a-1}\mathrm{e}^{-(b+t)\theta}$,故有 $\theta|X\sim\Gamma(n+a,b+T)$.

(ii) 由卡方分布和伽玛分布的关系有 $2(b+T)\theta|X\sim\chi^2(2(n+a))$,则 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的 Bayes 置信区间估计为 $\left[\frac{\chi^2_{\alpha/2}(2(n+a))}{2(b+T)},\frac{\chi^2_{1-\alpha/2}(2(n+a))}{2(b+T)}\right]$.

(iii) 令 $T_i=-\ln(1-\mathrm{e}^{-\lambda X_i})$,则易证 T_i 服从参数为1和 θ 的伽玛分布,由于伽玛分布的可加性 $T=-\sum_{i=1}^{n}\ln(1-\mathrm{e}^{-\lambda X_i})=\sum_{i=1}^{n}T_i$ 服从参数为1和 θ 的伽玛分布 $\Gamma(n,\theta)$,则 $E\frac{n-1}{T}=\theta$,又由式(4)知 T 为充分统计量,从而 $\frac{n-1}{T}$ 为参数 θ 的最小方差无偏估计.

从而引理得证.

引理2[8] 在对称熵损失函数式(1)下,δ 为 θ 的判别空间的一个估计,则对于任意的先验分布 $\pi(\theta)$,θ 的 Bayes 估计为 $\hat{\delta}_B=[E(\theta|X)/E(\theta^{-1}|X)]^{1/2}$,并且解是唯一的,这里假定 Bayes 风险函数 $r(\delta)=E[L(\theta,\delta)]<+\infty$.

引理3[10] 设 $X\sim f(x;\theta)$,$\theta\in\Theta$,统计判决问题的损失函数为 $L(\theta,\delta)$,参数 θ 的先验分布为 $\pi(\theta)$,那么若损失函数 $L(\theta,\delta)$ 关于 δ 为严凸函数,则该统计判决问题的 Bayes 解几乎处处唯一,从而是容许的估计.

定理1 在熵损失函数 $L(\theta,\delta)=\frac{\delta}{\theta}+\frac{\theta}{\delta}-2$ 下,对于分布(2),记 $T=-\sum_{i=1}^{n}\ln(1-\mathrm{e}^{-\lambda X_i})$. 若取 θ 的共轭先验分布为 $\Gamma(a,b)$,则参数 θ 的 Bayes 估计为:

$$\hat{\delta}_B=\left[\frac{1}{\sqrt{(n+a)(n+a-1)}}T+\frac{b}{\sqrt{(n+a)(n+a-1)}}\right]^{-1}$$

并且是容许的.

证明 设参数 θ 的共轭先验分布为伽玛分布 $\Gamma(a,b)$,由引理1知 $\theta|X\sim\Gamma(n+a,T+b)$. 故有:

$$\hat{\delta}_B=\left[\frac{E(\theta|X)}{E(\theta^{-1}|X)}\right]^{1/2}=\left[\frac{n+a}{T+b}\Big/\frac{T+b}{n+a-1}\right]^{1/2}=$$

$$\left[\frac{1}{\sqrt{(n+a)(n+a-1)}}T+\frac{b}{\sqrt{(n+a)(n+a-1)}}\right]^{-1}$$

又对称熵损失函数(1)关于 δ 是严凸函数,则由引理3知,它是容许的.

2　估计量$(cT+d)^{-1}$的容许性

由第一部分可以看出,在适当的伽玛先验分布下,参数θ的 Bayes 估计量和最小方差无偏估计量都有逆线性形式$(cT+d)^{-1}$,而形如$(cT+d)^{-1}$的这一类估计的可容许性与c和d的取值有关.下面对c和d的不同取值情况分别进行讨论.以下令

$$c^{*}=\frac{1}{\sqrt{n(n-1)}},T=-\sum_{i=1}^{n}\ln(1-\mathrm{e}^{-\lambda X_i})$$

定理 2　当$0\leqslant c<c^{*}$,$d>0$时,估计量$(cT+d)^{-1}$是可容许的.

证明　在对称熵损失函数下,在定理 1 中已经证明了θ有唯一的 Bayes 解:

$$\hat{\delta}_B=\left[\frac{1}{\sqrt{(n+a)(n+a-1)}}T+\frac{b}{\sqrt{(n+a)(n+a-1)}}\right]^{-1}$$

此时,先验分布密度函数为$\pi(\theta;a,b)=\dfrac{b^a}{\Gamma(a)}\theta^{a-1}\mathrm{e}^{-b\theta}$,$\theta>0$,$a>0$,$b>0$,当$0<c<c^{*}$,$d>0$时,则令

$$c=\frac{1}{\sqrt{(n+a)(n+a-1)}},d=\frac{b}{\sqrt{(n+a)(n+a-1)}}$$

一定存在$a>0$,$b>0$,事实上只需取$a=\dfrac{1-2n+\sqrt{1+4/c^2}}{2}$,$b=\dfrac{d}{c}$,就可以使上面的等式成立.由于在定理 1 中已经证明了此时的 Bayes 估计是可容许的,故此时估计量$(cT+d)^{-1}$是可容许的.

当$c=0$,$d>0$时,估计量为常值d^{-1},若此时估计量不可容许,必存在某一估计量$\delta_1(X)$优于d^{-1},即$0\leqslant R(\theta,\delta_1(X))\leqslant R(\theta,d^{-1})$,对某些$\theta$不等号严格成立.

当$\theta=d^{-1}$时,有$0\leqslant R(d^{-1},\delta_1(X))\leqslant R(d^{-1},d^{-1})=0$,即$R(d^{-1},\delta_1(X))=0$,由损失函数的非负性可知$L(d^{-1},\delta_1(X))=0$a.e,故$\delta_1(X)=d^{-1}$a.e 所以当$c=0$,$d>0$时,估计量$(cT+d)^{-1}$是可容许的.

定理 3　只要下列条件之一成立,估计$(cT+d)^{-1}$是不可容许的.(i)$c<0$或$d<0$;(ii)$0<c\neq c^{*}$,$d=0$;(iii)$c>c^{*}$,$d>0$,这里$c^{*}=\dfrac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$,$n>1$.

证明　在(i)的条件下,估计$(cT+d)^{-1}$取负值具有正概率,因此估计$\max\{0,(cT+d)^{-1}\}$比$(cT+d)^{-1}$好.

在(ii)的条件下,令$T_i=-\ln(1-e^{-\lambda X_i})$,则由式(2)得$T_i$的概率密度函数为:$f_{T_i}(t)=\theta\mathrm{e}^{-\theta t}$,$0<t<+\infty$,故$T_i\sim E(\theta)=\Gamma(1,\theta)$.由伽玛分布的可加性知,$T=-\sum_{i=1}^{n}\ln(1-\mathrm{e}^{-\lambda X_i})=\sum_{i=1}^{n}T_i$为服从伽玛分布$\Gamma(n,\theta)$的随机变量,于是$ET=\dfrac{n}{\theta}$,$E\dfrac{1}{T}=\dfrac{\theta}{n-1}$.

$$R(\theta,(cT)^{-1})=E\left[\frac{1}{c\theta T}+c\theta T-2\right]=\frac{1}{c\theta}E\frac{1}{T}+c\theta ET-2=\frac{1}{c(n-1)}+nc-2$$

从而有$\dfrac{\partial}{\partial c}R(\theta,(cT)^{-1})=n-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{1}{n-1}<0$.当$0<c<c^{*}=\dfrac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$时,$R(\theta,(cT)^{-1})$关于$c$是单调递减的,故当$c=c^{*}$,$d=0$时,风险$R(\theta,(c^{*}T)^{-1})$是最小的,因此$(c^{*}T)^{-1}$比$(cT)^{-1}$好.

若(iii)成立,估计$\delta^{*}=\left(c^{*}T+\dfrac{c^{*}}{c}d\right)^{-1}$好于$\delta=(cT+d)^{-1}$.事实上,

$$R(\theta,\delta)-R(\theta^{*},\delta)=E\left[\frac{1}{\theta(cT+d)}+\theta(cT+d)-\frac{1}{\theta\left(c^{*}T+\frac{c^{*}}{c}d\right)}-\theta(c^{*}T+\frac{c^{*}}{c}d)\right]=$$

$$(c-c^*)\left[\frac{\theta}{c}E(cT+d)-\frac{1}{\theta c^*}E\frac{1}{cT+d}\right]\geqslant(c-c^*)\left[\frac{\theta}{c}E(cT)-\frac{1}{\theta c^*}E\frac{1}{cT}\right]=$$

$$(c-c^*)\left[n-\frac{1}{c^*c(n-1)}\right]\geqslant(c-c^*)\left[n-\frac{1}{c^{*2}(n-1)}\right]=$$

$$(c-c^*)\left[n-n(n-1)\frac{1}{(n-1)}\right]=0$$

定理得证.

参考文献:

[1] GUPTAR D,KUNDU D. Generalized exponential distributions[J]. Australian and New Zealand Journal of Statistics,1999,41:173-188

[2] GUPTA R D,KUNDU D. Generalized exponential distributions:Different Method of Estimations[J]. Journal of Statistical Computation and Simulation,2001,69:315-338

[3] GUPTA R D,KUNDU D. Discriminating between the Weibull and generalized exponential distributions[J]. Computational Statistics and Data Analysis,2003,43:179-196

[4] GUPTA R D,KUNDU D. Discriminating between gamma and the generalized exponential distributions[J]. Journal of Statistical Computation and Simulation,2004,74:107-122

[5]唐玉娜,施瑞,王炳兴. 广义指数分布的统计推断[J]. 统计与决策,2008(17):18-19

[6]王国富. 熵损失函数下两参数广义指数分布形状参数的 Bayes 估计[J]. 统计与决策,2009(1):154-155

[7]柏跃迁. 正态均值线性估计的可容许性[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版,2007,24(5):445-447

[8]孔令军,宋立新,陈岩波. 对称熵损失下指数分布的参数估计[J]. 吉林大学学报:自然科学版,1998(2):9-14

[9]王忠强,王德辉,宋立新. 一种对称损失函数下正态总体刻度参数的估计[J]. 应用数学学报,2004,27(2):310-323

[10]LEHMANN E L,GEORGE. 点估计理论[M]. 2 版. 郑忠国,蒋建成,童行伟,译. 北京:中国统计出版社,2005

Bayesian Estimation for Shape Parameter of Generalized Exponential Distribution of Two Parameters under Symmetry Entropy Loss Function

WANG Qi[1] ,LI Wei[2]

(1. Zhongshan Institute,University of Electronic Science and Technology of China,
Guangdong Zhongshan 528402,China;
2. College of Mathematics and Information Science,Jiangxi Normal University,Jiangxi Nanchang 330022,China)

Abstract: Under symmetry entropy loss function,we discuss Bayesian estimation and admissibility estimation for shape parameter of generalized exponential distribution of two parameters. The conditions for admissibility and inadmissibility of estimation with the inverse linear form of $(cT+d)^{-1}$ are given.

Keywords: Bayesian estimation; admissibility; symmetry entropy loss function; generalized exponential distribution

责任编辑:李翠薇

文章编号:1672-058X(2012)02-0005-05

一类具有功能性反应的捕食者-食饵系统的定性分析*

王倩倩,李宝麟
(西北师范大学 数学与信息科学学院,兰州 730070)

摘 要:研究了一类具有功能性反应函数$\frac{x^\alpha}{1+\beta x^\alpha}$捕食者-食饵模型,应用微分方程定性理论,讨论了该系统非负平衡点的性态以及正初始条件下解的有界性,得出了系统在参数变化范围内极限环的存在性与唯一性结论.

关键词:捕食者-食饵系统;功能性反应;平衡点;极限环
中图分类号:O175 **文献标志码**: A

1 引 言

关于具有功能性反应的捕食者-食饵系统的研究,目前已有不少研究结果. 文献[1]研究了系统:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x(a-bx^\alpha-cx^{2\alpha})-y\dfrac{x^\alpha}{1+\beta x^\alpha}\\ \dfrac{dy}{dt}=y\left(-d+e\dfrac{x^\alpha}{1+\beta x^\alpha}\right)\end{cases}$$

文献[2]研究了系统:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x(a-bx^\alpha)-y\dfrac{x^\alpha}{1+\beta x^\alpha+\omega x^{2\alpha}}\\ \dfrac{dy}{dt}=y\left(-d+e\dfrac{x^\alpha}{1+\beta x^\alpha+\omega x^{2\alpha}}\right)\end{cases}$$

均获得了有意义的结果. 在此基础上考虑如下捕食者-食饵系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=x(a-bx^\alpha)-y\dfrac{x^\alpha}{1+\beta x^\alpha}\\ \dfrac{dy}{dt}=y\left(-d+e\dfrac{x^\alpha}{1+\beta x^\alpha}\right)\end{cases}\tag{1}$$

其中$x(t)$,$y(t)$分别为t时刻食饵与捕食者种群的密度;a,b,d,e,β均为具有生态意义的正常数且$\frac{1}{2}\leqslant\alpha<1$;

收稿日期:2011-04-10;**修回日期**:2011-05-10.
* **基金项目**:国家自然科学基金项目(11061031);甘肃省-555-创新人才工程资助项目;西北师范大学科技创新工程项目.
作者简介:王倩倩(1984-),女,山西屯留人,硕士研究生,从事应用微分方程研究.