文章编号:1672-058X(2012)01-0014-02

关于不定方程 $x^3+8=37y^2$

楼思远
(西南大学 数学与统计学院,重庆 400715)

摘 要:利用同余式,递归序列的有关性质和结论证明了不定方程 $x^3+8=37y^2$ 仅有整数解 $(x,y)=(-2,0)$.

关键词:不定方程;整数解;递归序列
中图分类号:O136.21 **文献标志码**:A

不定方程 $x^3+8=Dy^2$(D 是无平方因子的正整数)是一类基本而重要的不定方程,对它已有不少研究工作. 1981 年,柯召和孙琦[1]证明了如果 D 满足不能被 3 或 $6k+1$ 形的素因数整除,且 $D\equiv 0,2,3(\bmod 4)$时,方程 $x^3+8=Dy^2$ 仅有整数解 $(x,y)=(-2,0)$;如果 D 满足前述条件,并且如果 $D\equiv 0,1,2(\bmod 4)$时,方程 $x^3-8=Dy^2$ 仅有整数解 $(x,y)=(2,0)$,对于 D 含 $6k+1$ 形的素因数的情况则需要进一步讨论. 1991 年,曹玉书[2]讨论了 D 含有 $6k+1$ 形的素因数时 $x^3+8=Dy^2$ 仅有平凡解的情况. 1995 年,罗明[3]证明了 $x^3-8=7y^2$ 仅有整数解 $(x,y)=(-2,0)$;$x^3+8=7y^2$ 仅有整数解 $(x,y)=(-2,0),(-1,\pm 1),(10,\pm 12)$. 在上述基础上利用 Pell 方程的解所构成的递归数列的性质与同余式来证明不定方程 $x^3+8=37y^2$ 的整数解仅有 $(x,y)=(-2,0)$.

1 引 理

引理[4] 不定方程 $x^3+1=74y^2$,仅有整数解 $(x,y)=(-1,0)$.

定理 不定方程

$$x^3+8=37y^2 \tag{1}$$

仅有整数解 $(x,y)=(-2,0)$.

2 证 明

(a) 如果 $x\equiv 0(\bmod 2)$,则由式(1)有 $y\equiv 0(\bmod 4)$,从而式(1)可以化为 $\left(\frac{x}{2}\right)^3+1=74\left(\frac{y}{4}\right)^2$,

由引理知道式(1)仅有整数解 $(x,y)=(-2,0)$.

(b) 如果 $x\equiv 1(\bmod 2)$,由于 $(x+2,x^2-2x+4)=1$ 或 3,从而(1)式给出为如下 4 种情形:

(Ⅰ) $x+2=a^2,x^2-2x+4=37b^2,y=ab$;(Ⅱ) $x+2=37a^2,x^2-2x+4=b^2,y=ab$;(Ⅲ) $x+2=3a^2,x^2-2x+4=111b^2,y=3ab$;(Ⅳ) $x+2=111a^2,x^2-2x+4=3b^2,y=3ab$.

收稿日期:2011-04-14;修回日期:2011-04-24.

作者简介:楼思远(1989-)男,浙江义乌人,硕士研究生,从事计算数论研究.

3 讨 论

(Ⅰ) 由 $x\equiv 1 \pmod 2$ 得 $a\equiv 1 \pmod 2$,则 $x\equiv 3 \pmod 4$. 带入 $x^2-2x+4=37b^2$ 得到 $3\equiv b^2 \pmod 4$,这不可能. 所以情形没有(1)的整数解.

(Ⅱ) 由 $x^2-2x+4=b^2$ 得 $x=2,0$. 但是这都不适合 $x+2=37a^2$. 所以情形没有(1)的整数解[5].

(Ⅲ) 由于 $x\equiv 1 \pmod 2$ 得 $a\equiv 1 \pmod 2$,从而 $x\equiv 1 \pmod 8$,得 $3\equiv 7b^2 \pmod 8$,这不可能. 所以情形没有(1)的整数解.

(Ⅳ) 由两式得 $(111a^2-3)^2-3b^2=-3$,因方程 $X^2-3Y^2=-3$ 有一个结合类解[6],其基本解是:$3+2\sqrt{3}$,故全部整数解(X,Y)由下式给出:$X+Y\sqrt{3}=\pm(x_n+y_n\sqrt{3})=\pm(3+2\sqrt{3})(u_n+v_n\sqrt{3})=\pm(3+2\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n$.

其中:$2+\sqrt{3}$是方程 $U^2-3V^2=1$ 的基本解,$\pm(u_n+v_n\sqrt{3})=\pm(2+\sqrt{3})^n$ 给出了方程 $U^2-3V^2=1$ 的所有解. 因此有 $111a^2-3=\pm x_n$ 成立.

易知有如下递推关系成立:

$$x_{n+2}=4x_{n+1}-x_n \quad x_0=3,x_1=12$$
$$u_{n+2}=4u_{n+1}-u_n \quad u_0=1,u_1=2$$
$$v_{n+2}=4v_{n+1}-v_n \quad v_0=0,v_1=1$$
$$x_n=3u_n+6v_n$$

由于 $111a^2-3=\pm x_n$,而 $a\equiv 1 \pmod 2$,所以 $x_n\equiv 0 \pmod 2$,从而由上述递推关系得到 $n\equiv 1 \pmod 2$.

对 x_n 的递推关系取模 37,可以得到周期为 36 的剩余类序列. 且易知当 $n\equiv 1,3,5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25,27,29,31,33,35 \pmod{36}$ 时,有 $x_n\equiv 0,5,9,12,17,20,25,28,32 \pmod{37}$. 代入 $111a^2-3=\pm x_n$ 并取模 37,则有 $111a^2\equiv 0\equiv 3\pm 0,3\pm 5,3\pm 9,3\pm 12,3\pm 17,3\pm 20,3\pm 25,3\pm 28,3\pm 32 \pmod{37}$ 矛盾. 从而情况无(1)整数解.

综上所述,不定方程 $x^3+8=37y^2$ 的整数解仅有 $(x,y)=(-2,0)$,证毕.

参考文献:

[1] 柯召,孙琦. 关于不定方程 $x^3\pm 8=Dy^2$ 和 $x^3\pm 8=3Dy^2$[J]. 四川大学学报:自然科学版,1981,18(4):1-5
[2] 曹珍富. 丢番图方程引论[M]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,1989
[3] 罗明. 关于不定方程 $x^3\pm 8=7y^2$[J]. 重庆师范学院学报:自然科学版,1995(3):29-31
[4] 倪谷炎. 关于不定方程 $x^3+1=Dy^2$[J]. 哈尔滨师范大学学报:自然科学版,1999(3):13-15
[5] 黄永庆,廖庆东. 关于不定方程 $x^3\pm 8=35y^2$[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版,2006,23(5):3-4
[6] 柯召,孙琦. 谈谈不定方程[M]. 北京:高等教育出版社,1987

On the Diophantine Equation $x^3+8=37y^2$

LOU Si-yuan

(School of Mathematics and Statistics, Southwest University. Chongqing 400715, China)

Abstract: By using the related properties and conclusions of congruence expression and recursive sequence, the author has proved that the Diophantine equation $x^3+8=37y^2$ has only integer solution $(x,y)=(-2,0)$.

Key words: Diophantine equation; integer solution; recursive sequence

责任编辑:田 静