文章编号:1672－058X(2012)01－0011－03

关于不定方程 $x^3+27=91y^2$

田志勇, 罗　明
(西南大学 数学与统计学院,重庆 400715)

摘　要:讨论不定方程 $x^3+27=91y^2$ 的整数解.方法主要利用同余,递归数列,以及 Pell 方程的性质,给出了不定方程 $x^3+27=91y^2$ 仅有整数解 $(-3,0)$,$(4,\pm1)$;推广了不定方程的研究范围,为进一步研究提供了方向.

关键词:不定方程;整数解;递归数列;同余式
中图分类号:O14　　**文献标志码**:A

不定方程的整数解是不定方程研究中的重要内容,关于不定方程 $x^3\pm27=Dy^2(D>0)$ 已有不少的研究工作[1-6],但当 D 有 $6k+1$ 形素因数时,方程的求解较困难.在此利用同余,递归数列,以及 Pell 方程的性质,证明了不定方程明了不定方程 $x^3+27=91y^2$ 仅有整数解 $(-3,0)$,$(4,\pm1)$.

引理[1]　不定方程 $x^3+1=273y^2$ 仅有整数解 $(x,y)=(-1,0)$.

定理　不定方程

$$x^3+27=91y^2 \tag{1}$$

仅有整数解 $(-3,0)$,$(4,\pm1)$.

证　当 $3\mid x$ 时,可知 $9\mid y$,设 $x=3x_1$,$y=9y_1$ 则式(1)可化为 $x_1^3+1=273y_1^2$,由引理知 $x_1=-1$,$y_1=0$,故 $x=-3$,$y=0$.当 $3\nmid x$ 时,将式(1)化为 $(x+3)(x^2-3x+9)=91y^2$,易知 $(x+3,x^2-3x+9)=1$,故式(1)存在下列 4 种可能的分解:

Ⅰ. $x+3=91a^2$,$x^2-3x+9=b^2$,$y=ab$

Ⅱ. $x+3=a^2$,$x^2-3x+9=91b^2$,$y=ab$

Ⅲ. $x+3=13a^2$,$x^2-3x+9=7b^2$,$y=ab$

Ⅳ. $x+3=7a^2$,$x^2-3x+9=13b^2$,$y=ab$

以下分别讨论这 4 种情形所给的式(1)的整数解.

Ⅰ. 由 $x^2-3x+9=b^2$ 得 $(2x-3)^2-(2b)^2=-27$,解得 $x=-5,8,0,3$ 均不适合 $x+3=91a^2$,故该情形无式(1)的解.

Ⅱ. 可用简单的同于方法解决:对 $x^2-3x+9=91b^2$ 模 13 得 $(x+1)(x-4)\equiv0\pmod{13}$,$x\equiv1,4\pmod{13}$,代入前式有 $a^2\equiv2,7\pmod{13}$,但 $\left(\frac{2}{13}\right)=\left(\frac{7}{13}\right)=-1$,而 $\left(\frac{a^2}{13}\right)=1$ 矛盾,故该情形无式(1)的整数解.

Ⅲ. 同情形Ⅱ,对 $x+3=13a^2$ 模 13 得 $x\equiv10\pmod{13}$,代入 $x^2-3x+9=7b^2$ 有 $79\equiv7b^2\pmod{13}$,于是

收稿日期:2011－03－05;**修回日期**:2011－04－27.
作者简介:田志勇(1979-),男,湖南凤凰人,硕士研究生,从事代数数论研究.

$1=\left(\frac{79}{13}\right)=\left(\frac{7b^2}{13}\right)=\left(\frac{7}{13}\right)=-1$ 矛盾,故该情形无式(1)的整数解.

Ⅳ. 将 $x^2-3x+9=13b^2$ 化为 $(2x-3)^2-13(2b)^2=-27$,方程 $x^2-13y^2=-27$ 的全部整数解可由以下4个非结合类解给出:

$$x_n+y_n\sqrt{13}=\pm(5+2\sqrt{13})(u_n+v_n\sqrt{13})=\pm(5+2\sqrt{13})(649+180\sqrt{13})^n,n\in N \tag{2}$$

$$\overline{x_n}+\overline{y_n}\sqrt{13}=\pm(-5+2\sqrt{13})(u_n+v_n\sqrt{13})=\pm(-5+2\sqrt{13})(649+180\sqrt{13})^n,n\in N \tag{3}$$

$$x_n'+y_n'\sqrt{13}=\pm(21+6\sqrt{13})(u_n+v_n\sqrt{13})=\pm(21+6\sqrt{13})(649+180\sqrt{13})^n,n\in N \tag{4}$$

$$\overline{x_n}'+\overline{y_n}'\sqrt{13}=\pm(-21+6\sqrt{13})(u_n+v_n\sqrt{13})=\pm(-21+6\sqrt{13})(649+180\sqrt{13})^n,n\in N \tag{5}$$

其中 $649+180\sqrt{91}$ 是 Pell 方程 $U-13V^2=1$ 的基本解. 因此有 $(2x-3)$ 等于 $\pm x_n,\pm\overline{x_n},\pm x_n',\pm\overline{x_n}'$ 之一,易验证 $\overline{x_n}=-x_n,\overline{x_n}'=-x_n'$ 由 $x+3=7a^2$ 得:$14a^2=x_n+9,14a^2=\overline{x_n}+9,14a^2=x_n'+9,14a^2=\overline{x_n}'+9$. 但对于上后两式,由式(4)和式(5)可得,而 $3\mid a,x+3=13a^2$,从而 $3\mid x$,与 $3\nmid x$ 矛盾. 故只需考虑式(2)和式(3),先讨论式(3),由它易得递归关系:

$$\overline{x_{n+2}}=1\,298\,\overline{x_{n+1}}-\overline{x_nx_0}=-5\,\overline{x_1}=1\,435 \tag{6}$$

对递归数列式(6)取模59,剩余类序列周期为4,当 $n\equiv0,1,3(\bmod4)$ 时,$\overline{x_n}\equiv54,19,40(\bmod59)$,于是由 $14a^2\equiv63,28,49(\bmod59)$,矛盾,剩下 $n\equiv2(\bmod4)$. 为简便,以下直接写出对式(6)取模. 模17. 排除 $n\equiv6(\bmod8)$,此时 $14a^2\equiv13(\bmod17)$. 剩下 $n\equiv2(\bmod8)$,模7079. 排除 $n\equiv2(\bmod8)$,此时 $14a^2\equiv867(\bmod7079)$. 矛盾,故可排除式(3).

下面再来讨论式(2),由它易得递归关系:

$$\begin{aligned}&x_{n+2}=1\,298x_{n+1}-x_n\quad x_0=5\quad x_1=7\,925\\&u_{n+2}=1\,298u_{n+1}-u_n\quad u_0=1\quad u_1=649\\&v_{n+2}=1\,298v_{n+1}-v_n\quad v_0=0\quad v_1=180\\&x_n=5u_n+26v_n\quad u_{2n}=u_n^2+13v_n^2\quad v_{2n}=2u_nv_n\quad u_n^2-13v_n^2=1\end{aligned} \tag{7}$$

对递归数列式(7)取模1297,剩余类序列周期为6,当 $n\equiv5(\bmod6)$ 时,$x_n\equiv1159(\bmod1297)$,于是由 $14a^2\equiv1168(\bmod1297)$,矛盾,剩下 $n\equiv0,1,2,3,4(\bmod6)$,以下直接写出对式(7)取模.

模919. 排除 $n\equiv1,2,3,6,7,8,10,12,15,16(\bmod18)$,此时 $14a^2\equiv582,287,32,900,187,412,247(\bmod293)$. 剩下 $n\equiv0,4,9,13,14(\bmod18)$.

模5237. 排除 $n\equiv4,9,13,14(\bmod18)$,此时 $14a^2\equiv960,5241,4295,2634(\bmod5237)$. 剩下 $n\equiv0(\bmod18)$. 类似可以得到:对式(7)取模43,29,41,83,86017 可得 $n\equiv0(\bmod28)$.

对式(7)取模59,17,3169,可得 $n\equiv0(\bmod16)$.

综上取模可得:$\begin{cases}n\equiv0(\bmod16)\\n\equiv0(\bmod18)\\n\equiv0(\bmod28)\end{cases}$ 由孙子定理可得 $n\equiv0(\bmod7\times9\times2^4)$. 若 $n\neq0$,则可令 $n=2\times2^r\times7\times9\times l$,其中 $r\geqslant3,2\nmid l$,易知对 $\{2^r\}$ 取模133,可得周期为4的剩余类序列.

故令 $m=\begin{cases}2^r & r\equiv2(\bmod4)\\7\cdot2^r & r\equiv1(\bmod4)\\9\cdot2^r & r\equiv0(\bmod4)\\7\cdot9\cdot2^r & r\equiv3(\bmod4)\end{cases}$,此时 $m\equiv24(\bmod40)$,记 $n=2kml$,其中 k 为奇数. 从而有 $x_n=x_{2m+(kl-1)2m}\equiv\pm x_{2m}(\bmod u_{2m})$. 若 $x_n\equiv x_{2m}(\bmod u_{2m})$,当 $m\equiv0(\bmod4)$ 时,$u_m\equiv1(\bmod8)$,$v_m\equiv0(\bmod8)$,$u_{2m}\equiv u_m^2+13v_m^2\equiv1(\mathrm{b}\bmod8)$,于是有

$$\left(\frac{14(x_n+9)}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{14(5u_{2m}+26v_{2m})+126}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{196u_m^2+728u_mv_m-728v_m^2}{u_{2m}}\right)=$$
$$\left(\frac{-3276v_m^2+728u_mv_m}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{182v_m}{u_{2m}}\right)\left(\frac{2u_m-9v_m}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{2u_m-9v_m}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{2u_m-9v_m}{u_m^2+13v_m^2}\right)=$$
$$\left(\frac{u_m^2+13v_m^2}{u_m-\frac{9}{2}v_m}\right)=\left(\frac{133}{u_m-\frac{9}{2}v_m}\right)=-\left(\frac{2u_m-9v_m}{133}\right)$$

对 $\{2u_m-9v_m\}$ 取模 133，得周期为 40 的剩余类序列. 当 $m\equiv 24\pmod{40}$ 时，$\left(\frac{2u_m-9v_m}{133}\right)=1$，从而 $\left(\frac{14(x_n+9)}{u_{2m}}\right)=-1$，矛盾. 若 $x_n\equiv -x_{2m}\pmod{u_{2m}}$，则类似地有

$$\left(\frac{14(x_n+9)}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{-14(5u_{2m}+26v_{2m})+126}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{56u_m^2-2548u_mv_m-728v_m^2}{u_{2m}}\right)=-\left(\frac{2u_m+9v_m}{133}\right)$$

此时只需令

$$m=\begin{cases}2^r, r\equiv 0\pmod 4\\ 7\cdot 2^r, r\equiv 3\pmod 4\\ 9\cdot 2^r, r\equiv 2\pmod 4\\ 7\cdot 9\cdot 2^r, r\equiv 1\pmod 4\end{cases}$$

，则相应可得到 $\left(\frac{14(x_n+9)}{u_{2m}}\right)=-1$，矛盾.

所以 $n=0$，从而 $14a^2=x_0+9=5+9=14$，$a^2=\pm 1$，由此可得 $x=4$，$y=\pm 1$

综合上述情形的讨论结果，不定方程 $x^3+27=91y^2$ 仅有整数解 $(-3,0)$，$(4,\pm 1)$.

参考文献：

[1] 曹玉书，郭庆俭. 关于丢番图方程 $x^3\pm 1=3Dy^2$[J]. 黑龙江大学学报：自然科学学报，1989(5)：27-30

[2] 柯召，孙琦. 数论讲义[M]. 下册. 第一版. 北京：高等教育出版社，1987

[3] 曹珍富. 丢番图方程引论[M]. 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，1989

[4] 王镇江，佟瑞洲. 关于丢番图方程 $x^3-1=Dy^2$[J]. 江汉大学学报，1991(6)：40-48

[5] 罗明. 关于不定方程 $x^3+1=7y^2$[J]. 重庆师范学院学报：自然科学版，2003，20(1)：5-7

[6] 段辉明. 关于不定方程 $x^3-1=19y^2$[J]. 重庆工商大学学报：自然科学版，2005，22(2)：191-193

On the Diophantine Equation $x^3+27=91y^2$

TIAN Zhi-yong, LUO Ming

(School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China)

Abstract: This paper discusses that the Diophantine equation $x^3+27=91y^2$ only has integer solutions $(-3,0)$ and $(4,\pm 1)$ with the help of the congruence expression, the nature of recurrent sequences and the property of Pell equation. The research range of the Diophantine equation is extended, which reveals the direction for further research.

Key words: Diophantine equation; integer solution; recurrent sequence; congruence expression

责任编辑：李翠薇

校　　对：代小红