文章编号:1672 -058X(2012)01 -0004 -04

关于第二积分中值定理“中间点”的一个注记*

伍建华, 孙霞林, 熊德之
(武汉工程大学理学院 智能机器人湖北省重点实验室,武汉 430073)

摘　要:针对微积分中值定理“中间点”问题,将文献[1-3]的部分定理推广到了区间[a,b]内的任一点,文献[1-3]的相关定理可以看成此处所推定理的直接推论.

关键词:积分中值定理;中间点;渐近性

中图分类号:O172.2　　　　**文献标志码:**A

微积分的中值定理“中间点”问题,引起了不少人的关注,并取得了很多成果[1-6]. 将文献[1-3]的左端点 a 推广到区间的任意点. 为了叙述方便,将第二积分中值定理引述如下:

设 $g(x)$ 在区间[a,b]上是可积,则:

(ⅰ) 若 $f(x)$ 在区间[a,b]单减非负,存在 $\xi\in[a,b]$,使:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(a)\int_a^{\xi} g(x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

成立.

(ⅱ) 若 $f(x)$ 在区间[a,b]单增非负,存在 $\xi\in[a,b]$,使:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(b)\int_{\xi}^{b} g(x)\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

成立.

引理 1　设 $g(x)$ 在[a,b]上可积,η 是区间[a,b]中某一点,即 $a\leqslant\eta\leqslant b$,且存在常数 A,$\alpha>-1$,使得

$$\lim_{x\to\eta}\frac{g(x)}{|x-\eta|^{\alpha}} = A \tag{3}$$

则

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to\eta+}\dfrac{\int_{\eta}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t}{(x-\eta)^{\alpha+1}} = \dfrac{A}{\alpha+1}, x>\eta\\[2ex] \lim\limits_{x\to\eta-}\dfrac{\int_{x}^{\eta} g(t)\,\mathrm{d}t}{(\eta-x)^{\alpha+1}} = \dfrac{A}{\alpha+1}, x<\eta\end{cases} \tag{4}$$

证明　当 $x>\eta$ 时,由文献[2]可知式(4)的第一个式子成立.

当 $x<\eta$ 时,由式(3) 可知:$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,$x\in(\eta-\delta,\eta)$,有 $(A-\varepsilon)(\eta-x)^{\alpha}<g(x)<(A+\varepsilon)(\eta-$

收稿日期:2011 -04 -05;**修回日期:**2011 -05 -19.

* **基金项目:**“十一五”国家课题(FIB070335-B2-04).

作者简介:伍建华(1955-),男,湖北黄石人,副教授,从事数学教学与算法分析研究.

$x)^{\alpha}$,两边积分:$(A-\varepsilon)\int_x^{\eta}(\eta-t)^{\alpha}\mathrm{d}t<\int_x^{\eta}g(t)\mathrm{d}t<(A+\varepsilon)\int_x^{\eta}(\eta-t)^{\alpha}\mathrm{d}t$,得$\frac{(A-\varepsilon)}{\alpha+1}(\eta-x)^{\alpha+1}<\int_x^{\eta}g(t)\mathrm{d}t<\frac{(A+\varepsilon)}{\alpha+1}(\eta-x)^{\alpha+1}$,$\frac{A}{\alpha+1}-\frac{\varepsilon}{\alpha+1}<\frac{\int_x^{\eta}g(t)\mathrm{d}t}{(\eta-x)^{\alpha+1}}<\frac{A}{\alpha+1}+\frac{\varepsilon}{\alpha+1}$. 由 ε 的任意性,证明式(4)第二个式子成立.

对于区间$[a,b]$中某一点 η,即 $a\leqslant\eta\leqslant b$,为了叙述地方便,在以下的证明中,$a\to\eta,b\to\eta$ 表示 $a\to\eta^{-}$,$b\to\eta^{+}$.

引理 2　设函数$f(x)$在$[a,b]$上可积,$\varphi(x)$在区间$[a,b]$上单调可导,η 是区间$[a,b]$中某一点,且存在常数 B,$\beta\geqslant-1$,满足$\lim\limits_{x\to\eta}\frac{f(x)}{|\varphi(x)-\varphi(\eta)|^{\beta}}=B$,则:

$$\lim_{x\to\eta+}\frac{f(x)}{(x-\eta)^{\beta}}=\lim_{x\to\eta-}\frac{f(x)}{(\eta-x)^{\beta}}=B|\varphi'(\eta)|^{\beta}\tag{5}$$

证明　如 $\varphi(x)$单调增加,有:

$$\lim_{x\to\eta+}\frac{f(x)}{(x-\eta)^{\beta}}=\lim_{x\to\eta+}\frac{f(x)}{|\varphi(x)-\varphi(\eta)|^{\beta}}\left[\frac{\varphi(x)-\varphi(\eta)}{x-\eta}\right]^{\beta}=B[\varphi'(\eta)]^{\beta}$$

$$\lim_{x\to\eta-}\frac{f(x)}{(\eta-x)^{\beta}}=\lim_{x\to\eta-}\frac{f(x)}{|\varphi(x)-\varphi(\eta)|^{\beta}}\left[\frac{\varphi(\eta)-\varphi(x)}{\eta-x}\right]^{\beta}=$$

$$\lim_{x\to\eta-}\frac{f(x)}{|\varphi(x)-\varphi(\eta)|^{\beta}}\left[\frac{\varphi(x)-\varphi(\eta)}{x-\eta}\right]^{\beta}=B[\varphi'(\eta)]^{\beta}$$

$$\lim_{x\to\eta+}\frac{f(x)}{(x-\eta)^{\beta}}=\lim_{x\to\eta-}\frac{f(x)}{(\eta-x)^{\beta}}=B[\varphi'(\eta)]^{\beta}$$

如 $\varphi(x)$单调减少,同理可证 $\lim\limits_{x\to\eta+}\frac{f(x)}{(x-\eta)^{\beta}}=\lim\limits_{x\to\eta-}\frac{f(x)}{(\eta-x)^{\beta}}=B[-\varphi'(\eta)]^{\beta}$,式(5)得证.

引理 3　设函数$f(x)$,$g(x)$在$[a,b]$上可积,$\varphi(x)$在区间$[a,b]$上单调可导,η 是区间$[a,b]$中某一点,且存在常数 $A,B,P,\alpha>-1,\beta>-1,\alpha+\beta>-1$,使得$\lim\limits_{x\to\eta}\frac{g(x)}{|x-\eta|^{\alpha}}=A$,$\lim\limits_{x\to\eta}\frac{f(x)}{|\varphi(x)-\varphi(\eta)|^{\beta}}=B$,$\lim\limits_{\substack{a\to\eta\\b\to\eta}}\frac{\eta-a}{b-a}=P$,则:

$$\lim_{\substack{a\to\eta\\b\to\eta}}\frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{(b-a)^{\alpha+\beta+1}}=\frac{AB|\varphi'(\eta)|^{\beta}}{\alpha+\beta+1}[P^{\alpha+\beta+1}+(1-P)^{\alpha+\beta+1}]\tag{6}$$

证明　$\lim\limits_{\substack{a\to\eta\\b\to\eta}}\frac{b-\eta}{b-a}=\lim\limits_{\substack{a\to\eta\\b\to\eta}}\frac{b-\eta+a-a}{b-a}=\lim\limits_{\substack{a\to\eta\\b\to\eta}}\frac{b-a}{b-a}-\lim\limits_{\substack{a\to\eta\\b\to\eta}}\frac{\eta-a}{b-a}=1-P.$

由引理 2 和引理 3 的条件得知:$\lim\limits_{x\to\eta}\frac{f(x)g(x)}{|x-\eta|^{\alpha+\beta}}=AB|\varphi'(\eta)|^{\beta}$,由引理 1 得知:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to\eta+}\dfrac{\int_{\eta}^{x}f(t)g(t)\mathrm{d}t}{(x-\eta)^{\alpha+\beta+1}}=\dfrac{AB|\varphi'(\eta)|^{\beta}}{\alpha+\beta+1},x>\eta\\[2ex]\lim\limits_{x\to\eta-}\dfrac{\int_{x}^{\eta}f(t)g(t)\mathrm{d}t}{(\eta-x)^{\alpha+\beta+1}}=\dfrac{AB|\varphi'(\eta)|^{\beta}}{\alpha+\beta+1},x<\eta\end{cases}$$

$$\lim_{\substack{a\to\eta\\b\to\eta}}\frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{(b-a)^{\alpha+\beta+1}}=\lim_{\substack{a\to\eta\\b\to\eta}}\frac{\int_a^{\eta}f(x)g(x)\mathrm{d}x+\int_{\eta}^{b}f(x)g(x)\mathrm{d}x}{(b-a)^{\alpha+\beta+1}}=$$

$$\lim_{\substack{a\to\eta\\ b\to\eta}}\frac{\int_a^\eta f(x)g(x)\mathrm{d}x}{(\eta-a)^{\alpha+\beta+1}}\frac{(\eta-a)^{\alpha+\beta+1}}{(b-a)^{\alpha+\beta+1}}+\lim_{\substack{a\to\eta\\ b\to\eta}}\frac{\int_\eta^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{(b-\eta)^{\alpha+\beta+1}}\frac{(b-\eta)^{\alpha+\beta+1}}{(b-a)^{\alpha+\beta+1}}=$$
$$\frac{AB\,|\varphi'(\eta)|^{\beta}}{\alpha+\beta+1}P^{\alpha+\beta+1}+\frac{AB\,|\varphi'(\eta)|^{\beta}}{\alpha+\beta+1}(1-P)^{\alpha+\beta+1}=\frac{AB\,|\varphi'(\eta)|^{\beta}}{\alpha+\beta+1}[P^{\alpha+\beta+1}+(1-P)^{\alpha+\beta+1}]$$

定理1 设η是区间$(a,b]$中某点,存在常数$\alpha\geqslant-1,\beta\geqslant-1,\alpha+\beta>-1,A,B\neq0,P\neq0$,如果1)$f(x)$在区间$[a,b]$上单降非负,$g(x)$在区间$[a,b]$上可积,$\varphi(x)$在区间$[a,b]$上是单调的可导,$\varphi'(\eta)\neq0$;2)$\lim\limits_{x\to\eta}\dfrac{g(x)}{|x-\eta|^{\alpha}}=A,\lim\limits_{x\to\eta}\dfrac{f(x)}{|\varphi(x)-\varphi(\eta)|^{\beta}}=B$;3)$\lim\limits_{\substack{a\to\eta\\ b\to\eta}}\dfrac{\eta-a}{b-a}=PZ$;则积分第二中值定理式(1)中的$\xi$满足:

$$\lim_{\substack{a\to\eta\\ b\to\eta}}\left|\frac{\eta-\xi}{b-a}\right|^{\alpha+1}=\frac{|\beta P^{\alpha+\beta+1}-(\alpha+1)(1-P)^{\alpha+\beta+1}|}{(\alpha+\beta+1)P^{\beta}}\tag{7}$$

证明 (1)当$a\leqslant\eta<\xi\leqslant b$时,由积分第二中值定理(1)及定理条件和引理1,2,有:

$$\lim_{\substack{a\to\eta\\ b\to\eta}}\frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{(b-a)^{\alpha+\beta+1}}=\lim_{\substack{a\to\eta\\ b\to\eta}}\frac{f(a)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x}{(b-a)^{\alpha+\beta+1}}=\lim_{\substack{a\to\eta\\ b\to\eta}}\frac{f(a)\int_a^\eta g(x)\mathrm{d}x+f(a)\int_\eta^\xi g(x)\mathrm{d}x}{(b-a)^{\alpha+\beta+1}}=$$
$$\lim_{\substack{a\to\eta\\ b\to\eta}}\frac{f(a)}{(\eta-a)^{\beta}}\frac{\int_a^\eta g(x)\mathrm{d}x}{(\eta-a)^{\alpha+1}}\frac{(\eta-a)^{\alpha+\beta+1}}{(b-a)^{\alpha+\beta+1}}+\lim_{\substack{a\to\eta\\ b\to\eta}}\frac{f(a)}{(\eta-a)^{\beta}}\frac{\int_\eta^\xi g(x)\mathrm{d}x}{(\xi-\eta)^{\alpha+1}}\frac{(\xi-\eta)^{\alpha+1}}{(b-a)^{\alpha+1}}\frac{(\eta-a)^{\beta}}{(b-a)^{\beta}}=$$
$$\frac{AB\,|\varphi'(\eta)|^{\beta}}{\alpha+1}P^{\alpha+\beta+1}+\frac{AB\,|\varphi'(\eta)|^{\beta}}{\alpha+1}P^{\beta}\lim_{\substack{a\to\eta\\ b\to\eta}}\frac{(\xi-\eta)^{\alpha+1}}{(b-a)^{\alpha+1}}$$

由引理3,得:

$$\lim_{\substack{a\to\eta\\ b\to\eta}}\frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{(b-a)^{\alpha+\beta+1}}=\frac{AB\,|\varphi'(\eta)|^{\beta}}{\alpha+\beta+1}[P^{\alpha+\beta+1}+(1-P)^{\alpha+\beta+1}]$$
$$\frac{AB\,|\varphi'(\eta)|^{\beta}}{\alpha+1}P^{\alpha+\beta+1}+\frac{AB\,|\varphi'(\eta)|^{\beta}}{\alpha+1}P^{\beta}\lim_{\substack{a\to\eta\\ b\to\eta}}\frac{(\xi-\eta)^{\alpha+1}}{(b-a)^{\alpha+1}}=\frac{AB\,|\varphi'(\eta)|^{\beta}}{\alpha+\beta+1}[P^{\alpha+\beta+1}+(1-P)^{\alpha+\beta+1}]$$
$$\lim_{\substack{a\to\eta\\ b\to\eta}}\left(\frac{\xi-\eta}{b-a}\right)^{\alpha+1}=\frac{(\alpha+1)(1-P)^{\alpha+\beta+1}-\beta P^{\alpha+\beta+1}}{(\alpha+\beta+1)P^{\beta}}$$

(2)当$a\leqslant\xi<\eta\leqslant b$时,同理可证$\lim\limits_{\substack{a\to\eta\\ b\to\eta}}\left(\dfrac{\eta-\xi}{b-a}\right)^{\alpha+1}=\dfrac{\beta P^{\alpha+\beta+1}-(\alpha+1)(1-P)^{\alpha+\beta+1}}{(\alpha+\beta+1)P^{\beta}}$.

综上所述,定理1式(7)得证.

定理2 如果1)$f(x)$在区间$[a,b]$上单降非负,$g(x)$在区间$[a,b]$上可积,$\varphi(x)$在区间$[a,b]$上是单调的可导,$\varphi'(a)\neq0$;2)$\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{g(x)}{|x-a|^{\alpha}}=A,\lim\limits_{x\to a+}f(x)=B,\alpha\geqslant-1,A,B\neq0$;则积分第二中值定理式(1)中的$\xi$满足:

$$\lim_{b\to a+}\frac{\xi-a}{b-a}=1\tag{8}$$

证明 由积分第二中值定理(1)及定理条件和引理1,有:

$$\lim_{b\to a+}\frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{(b-a)^{\alpha+1}}=\lim_{b\to a+}\frac{f(a)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x}{(b-a)^{\alpha+1}}=\lim_{b\to a+}f(a)\frac{\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x}{(\xi-a)^{\alpha+1}}\frac{(\xi-a)^{\alpha+1}}{(b-a)^{\alpha+1}}=\frac{AB}{\alpha+1}\lim_{b\to a+}\frac{(\xi-a)^{\alpha+1}}{(b-a)^{\alpha+1}}$$

由引理1,得$\lim\limits_{b\to a+}\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{(b-a)^{\alpha+1}}=\dfrac{AB}{\alpha+1}$,则$\dfrac{AB}{\alpha+1}\lim\limits_{b\to a+}\dfrac{(\xi-a)^{\alpha+1}}{(b-a)^{\alpha+1}}=\dfrac{AB}{\alpha+1}$,得$\lim\limits_{b\to a+}\dfrac{\xi-a}{b-a}=1$.

定理3 设η是区间$[a,b)$中某点,存在常数$\alpha\geqslant-1,\beta\geqslant-1,\alpha+\beta>-1,A,B\neq0,P\neq1$,如果

1) $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 单增非负, $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积, $\varphi(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是单调的可导, $\varphi'(\eta)\neq 0$;2) $\lim\limits_{x\to\eta}\dfrac{g(x)}{|x-\eta|^{\alpha}}=A$, $\lim\limits_{x\to\eta}\dfrac{f(x)}{|\varphi(x)-\varphi(\eta)|^{\beta}}=B$;(3) $\lim\limits_{\substack{a\to\eta\\ b\to\eta}}\dfrac{\eta-a}{b-a}=P$;则积分第二中值定理式(2)中的 ξ 满足:

$$\lim_{\substack{a\to\eta\\ b\to\eta}}\left|\frac{\eta-\xi}{b-a}\right|^{\alpha+1}=\frac{|(\alpha+1)P^{\alpha+\beta+1}-\beta(1-P)^{\alpha+\beta+1}|}{(\alpha+\beta+1)(1-P)^{\beta}}\tag{9}$$

证明过程与定理 1 的证明相似,不作赘述. 如果考虑趋向右端点的的渐近性,则有下面的定理.

定理 4　如果 1) $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 单增非负, $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积, $\varphi(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是单调的可导, $\varphi'(b)\neq 0$;2) $\lim\limits_{x\to b-}\dfrac{g(x)}{|x-b|^{\alpha}}=A$, $\lim\limits_{x\to b-}f(x)=BZ$, $\alpha\geqslant -1$, $A,B\neq 0$;则积分第二中值定理式(2)中的 ξ 满足:

$$\lim_{a\to b-}\frac{b-\xi}{b-a}=1\tag{10}$$

证明过程与定理 2 的证明相似,不作赘述.

此处的结论不仅推广了文献[1-3]中的大部分结果,也给出了目前很少论及的趋向右端点的渐近性结论.

参考文献:

[1] 赵奎奇. 积分第二中值定理“中间点”的渐近性再研究[J]. 数学的实践与认识,2008,18:245-248

[2] 刘文武. 积分第二中值定理“中间点”的渐近性分析[J]. 数学的实践与认识,2005,35(9):221-225

[3] 吴至友,夏雪. 积分第二中值定理“中间点”的渐近性[J]. 数学的实践与认识,2004,34(3):171-176

[4] ZHANG B L. A note on the mean value theorem for integrals [J]. Amer Math Monthly,1997,104:561-562

[5] ALMEIDA R. An Elementary Proof Of A Converse Mean-value Theorem[J]. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,2008,39(8):1110-1111

[6] TONG J C. Note The Mean Value Theorems for Differentials and Integrals[J]. The Journal of the Elisha Mitchell scientific society,1998,114(4):225-226

A Note on Intermediate Point in Second Mean Value Theorem for Integral

WU Jian-hua, SUN Xia-lin, XIONG De-zhi

(School of Science, Wuhan Institute of Technology, Hubei Provincial Key Laboratory of Intelligent Robot, Wuhan 430073, China)

Abstract: This article extends a part of theorems in Article [1-3] to any point in the interval [a,b], which means that the related theorems in Article [1-3] can be regarded as direct inferences of the theorem in this article according to “intermediate point” problem in mean value theorem for integral.

Key words: mean value theorem for integral; intermediate point; asymptotic property

责任编辑:李翠薇