文章编号:1672 -058X(2011)06 -0585 -05

考虑二次梯度影响的球向渗流问题解的相似结构*

许 丽,李顺初,王俊超
(西华大学 数学与计算机学院应用数学研究所,成都 610039)

摘 要:针对均质油藏球向渗流问题,研究了 3 种外边界(无穷大、定压、封闭)及内边界条件(引入表皮效应)下的定流量生产的问题,并建立了考虑二次梯度影响的不稳定渗流问题的试井分析模型;先对此模型作线性化处理,利用 Laplace 变换求得了线性化后的无因次储层压力和井底压力分布的 Laplace 空间解;在全面分析了它们之间内在联系的基础上,得到了此模型在 3 种外边界条件下解式之间的相似结构.

关键词:相似结构;均质油藏;二次梯度项;不稳定;球向流.

中图分类号:O357.3 **文献标志码**:A

均质油藏模型试井分析理论是实践中最理想化,应用最广泛的一种模型研究.但传统的油藏模型的建立[1-4],均是假设弱可压缩液体的压缩系数很小而忽略了其渗流方程中的二次压力梯度项,近似为线性渗流问题,这对有分形结构的混气石油和低渗储层压力分布问题在较长时间的试井中会产生较大的误差.因此,考虑二次梯度影响[5-6]的均质油藏球向渗流[7]问题的研究具有十分重要的理论意义和实用价值.

近年来,兴起了微分方程(组)的解具有类似于实数可表示为连分式、图形具有相似性的所谓式相似性质(即解的相似结构)的研究[8-10];又针对一些油藏模型[11-14],归纳出了储层压力与井底压力在不同外边界条件的通用公式,即它们的解式具有统一的形式(即解式具有相同的结构),不同的是对于不同的外边界条件有不同的所谓的相似核函数;这种解式的相似结构不仅便于研究人员分析各地层参数对地层压力的影响,而且给研制相应的试井软件带来了便利.

目前考虑二次梯度项的均质球向流油藏模型研究[5],没有对其解的相似结构进行的研究;此处在均质球向流油藏的内边界条件中引入表皮效应,建立了考虑二次梯度影响的不稳定渗流模型[6],并找到了三种外边界条件下渗流特征解式的相似结构,使得相似结构理论在考虑球向流的均质油藏领域得到进一步的推广.

1 非线性渗流模型的建立

考察均质油藏引入表皮因子的球向流模型,假设:①产层厚度均匀且并未打开整个储层,流体是从各个方向流向一个共同的中心点;②开井前,油藏中各处压力均等于原始地层压力 p_i,开井后以定产量 q 生产;③流体微可压缩且服从等温达西定律;④忽略重力和毛管力的影响.根据以上假设,可建立:

渗流问题基本微分方程[5]:

$$\frac{\partial^2 P_D}{\partial r_D^2}+\frac{2}{r_D}\frac{\partial P_D}{\partial r_D}-\alpha\left(\frac{\partial P_D}{\partial r_D}\right)^2=\mathrm{e}^{-2s}\frac{\partial P_D}{\partial t_D}\quad (t_D>0,r_D>1) \tag{1}$$

初始条件:

$$P_D\big|_{t_D=0}=0 \tag{2}$$

收稿日期:2011 -03 -10;**修回日期**:2011 -03 -25.
* **基金项目**:西华大学重点学科——应用数学(0910091).
作者简介:许丽(1986-),女,河南驻马店人,硕士研究生,从事微分方程及其应用和渗流力学方面的研究.

内边界(井壁处)条件:

$$\begin{cases} P_{wD}(t_D) = P_D(1,t_D) & (t_D > 0) \\ \left(\dfrac{\partial P_D}{\partial r_D}\right)\Big|_{r_D=1} = -1 & (t_D > 0) \end{cases} \tag{3}$$

外边界条件:

外边界无穷大时:

$$P_D\big|_{r_D\to\infty} = 0 \tag{4}$$

外边界定压时:

$$P_D\big|_{r_D=\mathrm{R}_D} = 0 \tag{5}$$

外边界封闭时:

$$\frac{\partial P_D}{\partial r_D}\Big|_{r_D=\mathrm{R}_D} = 0 \tag{6}$$

上述无量纲量(无因次化变量)的定义如下:

$$P_{wD} = \frac{4\pi k r_w(p_i - p_w)}{B\mu q}, P_D = \frac{4\pi k r_w}{B\mu q}(p_i - p)$$

$$t_D = \frac{k}{\varphi\mu(C_f + C_L)r_w^2}t, r_D = \frac{r}{r_w}\mathrm{e}^s$$

$$R_{De} = \frac{R_e}{r_w}\mathrm{e}^s, C_D = \frac{C}{4\pi\varphi(C_f + C_L)r_w^3}, \alpha = \frac{B\mu q}{4\pi k r_w}C_L$$

2 非线性渗流方程的线性化

为了使渗流基本微分方程(1)线性化,即消去 $-\alpha\left(\dfrac{\partial P_D}{\partial r_D}\right)^2$ 项,可以试作如下变量替换,令 $P_D = -\dfrac{1}{\alpha}\ln(u + c_1) + c_2, u = u(r_D,t_D)$(其中:$c_1,c_2$ 为任意常数,可由定解条件来适当选取),则方程(1)线性化得:$\dfrac{\partial^2 u}{\partial r_D^2} + \dfrac{2}{r_D}\dfrac{\partial u}{\partial r_D} = \mathrm{e}^{-2s}\dfrac{\partial u}{\partial t_D}$.

为了保持初始条件和边界条件的齐次性,可令 $c_1 = 0, c_2 = 0$,再作变换 $y = r_D(u-1)$,即 $P_D(r_D,t_D) = -\dfrac{1}{\alpha}\ln(1+\dfrac{y}{r_D}), y = y(r_D,t_D), P_{wD}(t_D) = -\dfrac{1}{\alpha}\ln(1+y_w), y_w = y_w(t_D)$. 这样,渗流定解问题(1)-(6)可化为如下线性形式:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial r_D^2} = \mathrm{e}^{-2s}\dfrac{\partial y}{\partial t_D} \\ y\big|_{t_D=0} = 0 \\ \left[\dfrac{\partial y}{\partial r_D} - (1+\alpha)y\right]\Big|_{r_D=1} = \alpha \\ \lim\limits_{r_D\to\infty} y = 0, y(R_D,t_D) = 0, \text{或} \left(r_D\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r_D} - y\right)\Big|_{r_D=R_D} = 0 \end{cases} \tag{7}$$

3 模型求解

对定解问题(7),关于 t_D 作 Laplace 变换[15]并化简得:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2\bar{y}}{\mathrm{d}r_D^2} - \dfrac{z}{\mathrm{e}^{2s}}\bar{y} = 0 & (8) \\ \left[(1+\alpha)\bar{y} - \dfrac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}r_D}\right]\Bigg|_{r_D=1} = -\dfrac{\alpha}{z} & (9) \\ \lim\limits_{r_D\to\infty}\bar{y} = 0, \text{或 } \bar{y}\Big|_{r_D\to R_D} = 0, \text{或}\left(r_D\dfrac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}r_D} - \bar{y}\right)\Bigg|_{r_D=R_D} = 0 & (10) \end{cases}$$

方程(8)的通解为:

$$\bar{y}(r_D,z) = A\mathrm{e}^{\sqrt{\mathrm{e}^{-2s}z}r_D} + B\mathrm{e}^{-\sqrt{\mathrm{e}^{-2s}z}r_D} \tag{11}$$

其中 A,B 为任意常数,求特解时由边界条件(9)(10)式确定.

情形 1　外边界无穷大(无限储层)时,$\bar{y}\big|_{r_D\to\infty}=0$,可得定解问题(8)-(10)的解为:

$$\bar{y}(r_D,z) = -\frac{\alpha}{z}\frac{1}{1+\alpha+\dfrac{1}{\Phi(1,z)}}\frac{\Phi(r_D,z)}{\Phi(1,z)} \tag{12}$$

其中 $\Phi(r_D,z)=\dfrac{\mathrm{e}^{-\sqrt{\mathrm{e}^{-2s}z}(r_D-1)}}{\sqrt{\mathrm{e}^{-2s}z}}$.

情形 2　外边界定压时,$\bar{y}\big|_{r_D=R_D}=0$,可得定解问题(8)-(10)的解为:

$$\bar{y}(r_D,z) = -\frac{\alpha}{z}\frac{1}{1+\alpha+\dfrac{1}{\Phi(1,z)}}\frac{\Phi(r_D,z)}{\Phi(1,z)} \tag{13}$$

其中 $\Phi(r_D,z)=\dfrac{\sinh\sqrt{\mathrm{e}^{-2s}z}(R_D-r_D)}{\sqrt{\mathrm{e}^{-2s}z}\cosh\sqrt{\mathrm{e}^{-2s}z}(R_D-1)}$.

情形 3　外边界封闭时,$\left(r_D\dfrac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}r_D}-\bar{y}\right)\Big|_{r_D=R_D}=0$,可得定解问题(8)-(10)的解为:

$$\bar{y}(r_D,z) = -\frac{\alpha}{z}\frac{1}{1+\alpha+\dfrac{1}{\Phi(1,z)}}\frac{\Phi(r_D,z)}{\Phi(1,z)} \tag{14}$$

其中 $\Phi(r_D,z)=\dfrac{R_D\sqrt{\mathrm{e}^{-2s}z}\cosh\sqrt{\mathrm{e}^{-2s}z}(R_D-r_D)-\sinh\sqrt{\mathrm{e}^{-2s}z}(R_D-r_D)}{\sqrt{\mathrm{e}^{-2s}z}\left[R_D\sqrt{\mathrm{e}^{-2s}z}\sinh\sqrt{\mathrm{e}^{-2s}z}(R_D-1)-\cosh\sqrt{\mathrm{e}^{-2s}z}(R_D-1)\right]}$.

综上所述,3 种外边界条件下模型线性化后的 Laplace 空间解均有如下相同的表达形式:

$$\bar{y}(r_D,z) = -\frac{\alpha}{z}\frac{1}{1+\alpha+\dfrac{1}{\Phi(1,z)}}\frac{\Phi(r_D,z)}{\Phi(1,z)} \tag{15}$$

对应不同边界条件下的相似核函数 $\Phi(r_D,z)$为:

$$\Phi(r_D,z) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{-\sqrt{\mathrm{e}^{-2s}z}(r_D-1)}}{\sqrt{z}}, & \bar{y}(\infty,z)=0 \\ \dfrac{\sinh\sqrt{\mathrm{e}^{-2s}z}(R_D-r_D)}{\sqrt{\mathrm{e}^{-2s}z}\cosh\sqrt{\mathrm{e}^{-2s}z}(R_D-1)}, & \bar{y}(R_D,z)=0 \\ \dfrac{R_D\sqrt{\mathrm{e}^{-2s}z}\cosh\sqrt{\mathrm{e}^{-2s}z}(R_D-r_D)-\sinh\sqrt{\mathrm{e}^{-2s}z}(R_D-r_D)}{\sqrt{\mathrm{e}^{-2s}z}\left[R_D\sqrt{\mathrm{e}^{-2s}z}\sinh\sqrt{\mathrm{e}^{-2s}z}(R_D-1)-\cosh\sqrt{\mathrm{e}^{-2s}z}(R_D-1)\right]}, & \left(r_D\dfrac{d\bar{y}}{dr_D}-\bar{y}\right)\Bigg|_{r_D=R_D}=0 \end{cases}$$

由式(15)知,无因次井底压力线性化后的 Laplace 空间解为:

$$\bar{y}_w(z) = \bar{y}(1,z) = -\frac{\alpha}{z}\frac{1}{1+\alpha+\dfrac{1}{\Phi(1,z)}} \tag{16}$$

式(16)可经 Laplace 反(演)变换[15]而得到 $y_w(t_D)=L^{-1}[\bar{y}_w(z)]$,从而一步得到无因次井底压力的解为:

$$P_{wD}(t_D)=P_D(1,t_D)=-\frac{1}{\alpha}\ln[1+y_w(t_D)],y_w(t_D)=y(1,t_D) \tag{17}$$

4 进一步的结论和认识

1) 对所求得的线性化后的模型的 Laplace 空间解,均可通过解析反演来获得相应的实空间的解析解[16],从而求得储层压力和井底压力分布的解析解.但解析解没有类似的简洁的通式.

2) 实用中可采用 Laplace 数值反演(Stehfest 数值反演公式[16]),求得相应的实空间的数值解,再由式(17)求得无因次井底压力,完全可以满足试井分析中的应用需要.

3) 若把实测压力数据无因次化,再代入 $P_D=-\frac{1}{\alpha}\ln\left(1+\frac{y}{r_D}\right)$,可得到线性化后的模型解 y 的值,再作 Laplace 数值变换,得到线性化后的模型 Laplace 空间解 $\bar{y}$ 的值,就可直接在 Laplace 空间中进行试井分析(压力动态分析)等各项工作,这将更加体现出所得通式的优越性,极大地方便了试井分析软件的编制、简化和优化软件结构.

符号说明:

p—储层中任一点的压力,MPa;p_w—井壁(底)处的压力,MPa;p_i—原始地层压力,MPa;t—时间,h;r—储层中任一点距井心的距离,m;r_w—井筒半径,m;R_e—外边界(圆形外边界)半径,m;q—井底产量,m^3/d;μ—流体的粘度,mPa·s;B—流体的体积系数,m^3/m^3;C—井筒储集系数,m^3/MPa;s—表皮因子,无因次;C_L—流体的压缩系数,1/MPa;C_f—岩石的压缩系数,1/MPa;k—流体的渗透率,μm^2;φ—岩石的孔隙度,%;z—Laplace 空间变量.

参考文献:

[1] 李顺初,李晓平,黄炳光,等.均质油藏储层压力动态解得综合研究[J].钻井工艺,2002,25(1):50-51
[2] 李顺初,刘德华,张普斋.均质油藏在不同边界条件下的压力分布[J].江汉石油学院学报,2001,23(2):16-17
[3] 李晓平,张烈辉,刘启国.试井分析方法[M].北京:石油工业出版社,2009
[4] 张晓丽,李顺初,朱维兵.三种典型油藏的类型判别研究[J].西华大学学报:自然科学版,2008,25(1):19-20
[5] 同登科,陈钦雷,廖新维,等.非线性渗流力学[M].北京:石油工业出版社,2003
[6] 曹绪龙,同登科,王瑞和.考虑二次梯度项影响的非线性不稳定渗流问题的精确解[J].应用数学和力学,2004,25(1):93-99
[7] 李晓平.地下油气渗流力学[M].北京:石油工业出版社,2007
[8] 李顺初.二阶常系数齐次线性微分方程边值问题的解的相似结构[J].西华大学学报:自然科学版,2007,26(1):84-85
[9] 李顺初,伊良忠,郑鹏社.微分方程定解问题解的相似结构[J].四川大学学报:自然科学版,2006,43(4):933-934
[10] 李全勇,李顺初,迟颖.常系数齐次微分方程组边值问题解的相似结构[J].四川兵工学报,2010,25(1):50-52
[11] 李顺初,郑鹏社,张宇飞.均质油藏试井分析解的相似结构[J].西华大学学报:自然科学版,2006,22(4):460-463
[12] 李顺初,郑天璞,徐英.分形均质外边界封闭油藏的试井分析模型解[J].重庆大学学报:自然科学版,2003,26:130-131
[13] 李顺初,郑天璞.分形均质无穷大油藏的试井分析模型解[J].东北师范大学学报:自然科学版,2004,36(5):125-126
[14] 郑天璞,李顺初.分形均质外边界定压油藏的试井分析模型解[J].吉林大学学报:工学版,2004,34(7):102-103
[15] 李顺初,黄炳光.Laplace 变换与 Bessel 函数及试井分析理论基础[M].北京:石油工业出版社,2000
[16] STEHFEST H. Numerical inversion of Laplace transforms [J]. Communications of the ACM,1970,13(1):47-49

Similar Structure of the Solutions to Radial-Spherical Seepage Problem Considering Quadratic Gradient Effect

XU Li, LI Shun-chu, WANG Jun-chao

(Applied Mathematics Research Institute, School of Mathematics and Computer, Xihua University, Chengdu 610039, China)

Abstract: According to radial-spherical seepage problem in homogeneous reservoir, we studied constant flow production problem under three kinds of outer boundary conditions (infinite outer boundary, constant pressure and closed boundary) and inner boundary condition (skin effect) and established well-testing analysis model of unstable seepage problem with consideration of quadratic gradient effect. Firstly, this model was processed by linearization, the linearized Laplace space solution with dimensionless reservoir pressure and with dimensionless well-bottom pressure distribution was obtained after Laplace transform, and then the similar structure of the solution's expressions under three kinds of outer boundary conditions was achieved on the basis of overall analysis of their intrinsic connection.

Key words: similar structure; homogeneous reservoir; quadratic gradient term; instability; radial-spherical flow

责任编辑:李翠薇

(上接第 584 页)

The Structure of a New Kind of Graceful Graphs and Its Verification

LIU Jia-bao, ZHANG Ji, NIE Dong-ming

(Dean's Office, Anhui Xinhua University, Hefei 230088, China)

Abstract: Graceful graph is one of the most interesting and important research topics in graph theory with wide application and research prospects. We have proposed a new type of graceful composing method and proved that they are all graceful graphs with strict mathematical proof in this paper, as a result, we obtained the conclusion that $G_n = T \vee \overline{k_n}$ are all graceful graphs with labeling algorithm and so on. Our new graceful labeling is different from the existed results in the literature.

Key words: graceful labeling; graceful graphs; joined graphs

责任编辑:李翠薇