文章编号:1672-058X(2011)06-0577-03

粗糙幂半群*

杨培亮,王少敏
(大理学院 数学与计算机学院,云南 大理 671003)

摘　要:基于幂半群的同余关系,首次给出了粗糙幂半群的概念,得到了粗糙幂半群的一些性质,还讨论了粗糙幂半群的同态与同构.

关键词:粗糙幂半群;粗糙商半群;粗糙同态;粗糙同构
中图分类号:O152　　**文献标志码**: A

1　预备知识

定义 1[1]　设 G 是半群,$g \subseteq P(G) \backslash \{\varnothing\}$,$g$ 中定义运算如下:$\forall A, B \in g, AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$. 若 g 构成一个半群,则称其为半群 G 上的幂半群. 其中 $P(G)$ 为半群 G 的幂集.

定义 2[2]　设 X 是一个半群,R 是 X 上的同余关系,即 R 是满足如下条件的 X 上的一个等价关系:对 $\forall x \in X, (a, b) \in R \Rightarrow (ax, bx), (xa, xb) \in R$,以 $[a]_R$ 记 a 所在的 R 同余类.

同余关系 R 决定了 X 上的一个近似空间 (X, R),因此就有了 X 的子集的近似. 设 A 是 X 的任一子集,$\underline{R}(A) = \{x \in X \mid [x]_R \subseteq A\}$,$\overline{R}(A) = \{x \in X \mid [x]_R \cap A \neq \varnothing\}$,它们分别为 A 的 R-下近似和 R-上近似.

定义 3[1]　设 G 是半群,ρ 为 G 上的同余关系. $\dfrac{G}{\rho}$是 G 关于 ρ 的商半群,g 是 G 上的幂半群. 令 R 如下:$\forall A, B \in R, ARB \triangleq a\rho b, \forall a \in A, b \in B$. 则 R 是幂半群 g 上的同余关系,称其为半群 G 上的同余关系 ρ 诱导的幂半群 g 上的同余关系.

定义 4[3]　设 S 是 U 上的非空粗糙子集,称 S 为粗糙半群,如果 S 满足如下两个条件:1) $\forall x, y \in S, xy \in \overline{S}$;2) S 中结合律成立.

定义 5[4]　设 $G_1 \subset U_1, G_2 \subset U_2, G_1, G_2$ 称为粗糙同态的粗糙集,假如存在$\overline{G_1}$到$\overline{G_2}$的满射 φ,使 $\forall x, y \in \overline{G_1}$,有 $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$.

定义 6[4]　设 $G_1 \subset U_1, G_2 \subset U_2$,粗糙集 G_1 和 G_2 称为粗糙同构的粗糙集,假如存在$\overline{G_1}$到$\overline{G_2}$的一一映射 φ,使 $\forall x, y \in \overline{G_1}$,有 $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$.

2　粗糙幂半群

定义 7　设 G 是一个半群,ρ 是 G 上的同余关系,g 是 G 上的幂半群,R 是半群 G 上的同余关系 ρ 诱导的幂半群 g 上的同余关系,则称 g 为 G 上的粗糙幂半群.

定义 8　设 R 是半群 G 上的同余关系诱导 ρ 的幂半群 g 上的同余关系,$\dfrac{g}{R}$的下近似和上近似可以表示

收稿日期:2011-01-19;修回日期:2011-03-20.
* 基金项目:大理学院校科研项目(2008X35).
作者简介:杨培亮(1976-),女,云南大理人,讲师,硕士研究生,从事代数理论研究.

为：$\dfrac{g}{R}=\{[A]_R\mid[A]_R\subseteq g\}$，$\dfrac{\overline{g}}{R}=\{[A]_R\mid[A]_R\cap g\neq\varnothing\}$.

定理 1 设 R 是半群 G 上的同余关系诱导的幂半群 g 上的同余关系，在商集$\dfrac{g}{R}$中定义$[A]_R[B]_R=[AB]_R$，则$\dfrac{g}{R}$是 G 上的粗糙幂半群，称为粗糙幂半群 g 关于同余 R 的粗糙商半群.

证明 易证$\dfrac{g}{R}$是 G 上的幂半群. 下证$\dfrac{g}{R}$是一个粗糙半群.

1）$\forall[A]_R,[B]_R\in\dfrac{g}{R}$，有 $A,B\in g$. 因为 g 是粗糙半群，所以 $AB\in\overline{g}$，$[AB]_R\cap g\neq\varnothing$. 故$[AB]_R\in\dfrac{\overline{g}}{R}$.

2）因为 g 是粗糙半群，故 $\forall A,B,C\in g$，$(AB)C=A(BC)$. 所以$([A]_R[B]_R)[C]_R=[AB]_R[C]_R=[ABC]_R=[A(BC)]_R=[A]_R[BC]_R=[A]_R([B]_R[C]_R)$，故$\dfrac{g}{R}$中结合律成立.

所以$\dfrac{g}{R}$是 G 上的粗糙幂半群.

定理 2 设 f 是粗糙半群 G_1 到粗糙半群 G_2 的粗糙同态，g_1 是 G_1 上的粗糙幂半群，记 $g_2=\{f(A)\mid A\in g_1\}$，若 $f(\overline{g_1})=\overline{g_2}$，则 g_2 是 G_2 上的粗糙幂半群.

证明 由文献[1]中定理 2.1 的证明可知，g_2 是 G_2 上的幂半群，且 f 是 g_1 到 g_2 的满同态.

设 R_2 是半群 G_2 上的同余关系 ρ_2 诱导的幂半群 g_2 上的同余关系.

1）$\forall A_2,B_2\in g_2$，则 $\exists A_1,B_1$ 使 $f(A_1)=A_2$，$f(B_1)=B_2$. $A_2B_2=f(A_1)f(B_1)=f(A_1B_1)\in f(\overline{g_1})=\overline{g_2}$.

2）$\forall A_2,B_2,C_2\in g_2$ 则 $\exists A_1,B_1,C_1$ 使 $f(A_1)=A_2$，$f(B_1)=B_2$，$f(C_1)=C_2$，$A_2(B_2C_2)=f(A_1)f(B_1C_1)=f(A_1)[f(B_1)f(C_1)]=f(A_1)[f(B_1C_1)]=f(A_1B_1C_1)=f[(A_1B_1)C_1]=[f(A_1)f(B_1)]f(C_1)$.

所以 g_2 是 G_2 上的粗糙幂半群.

定理 3 设 f 是粗糙半群 G_1 到粗糙半群 G_2 的粗糙同态，g_2 是 G_2 上的粗糙幂半群，记 $g_1=\{f^{-1}(A)\mid A\in g_2\}$，若 $f(\overline{g_1})=\overline{g_2}$，则 g_1 是 G_1 上的粗糙幂半群.

证明 略.

定理 4 设 R 是半群 G 上的同余关系诱导的幂半群 g 上的同余关系，即 R 是粗糙幂半群 g 上的同余关系，则 $g\sim\dfrac{g}{R}$.

证明 设 $f:\begin{array}{l}\overline{g}\to\dfrac{\overline{g}}{R}\\ A\to[A]_R\end{array}$，$\forall A\in\overline{g}$，则$[A]_R\cap g\neq\varnothing$. 所以 $f(A)=[A]_R\in\dfrac{\overline{g}}{R}$，$f$ 是映射.

$\forall[C]_R\in\dfrac{\overline{g}}{R}$，则$[C]_R\cap g\neq\varnothing$. 故 $C\in\overline{g}$. 而 $f(C)=[C]_R$，所以 f 是满射.

$\forall A,B\in\overline{g}$，$AB\in\overline{g}$，$[A]_R\cap g\neq\varnothing$，$f(AB)=[AB]_R=[A]_R[B]_R=f(A)f(B)$，所以 f 是一个同态满射.

定理 5 g_1 为粗糙幂半群 G_1 上的粗糙幂半群，g_2 为粗糙半群 G_2 上的粗糙幂半群，若 $f:\overline{g_1}\to\overline{g_2}$ 为粗糙同态映射，则 $\ker f=\{(A,B)\in\overline{g_1}\times\overline{g_2}\mid f(A)=f(B)\}$ 是 g_1 上的同余.

证明 容易证明 $\ker f$ 是等价关系. 下证 $\ker f$ 是同余关系.

设$(A,C)\in\ker f$，$(B,D)\in\ker f$，则 $f(A)=f(C)$，$f(B)=f(D)$；故 $f(AB)=f(A)f(B)=f(C)f(D)=f(CD)$；所以$(AB,CD)\in\ker f$，因此 $\ker f$ 是同余关系.

定理 6 g_1 为粗糙幂半群 G_1 上的粗糙幂半群，g_2 为粗糙半群 G_2 上的粗糙幂半群，若 $f:\overline{g_1}\to\overline{g_2}$ 为粗糙同态映射，则$\dfrac{g_1}{\ker f}$与 $f(g_1)$ 粗糙同构.

证明 令 $K=\ker f$，设 $\varphi:\begin{array}{l}\dfrac{\overline{g_1}}{\ker f}\to\overline{f(g_1)}\\ [A]_K\to f(A)\end{array}$.

1) 设$[A]_K=[B]_K$,由于 ker$f$ 是一个等价关系,所以$(A,B)\in \ker f$,故$f(A)=f(B)$,即$\varphi([A]_K)=\varphi([B]_K)$,故$\varphi$是映射.

2) 若$\varphi([A]_K)=\varphi([B]_K)$,则$f(A)=f(B)$,即$(A,B)\in \ker f$,所以$[A]_K=[B]_K$,故$\varphi$是单射.

3) $\forall B\in\overline{f(g_1)}\subseteq\overline{g_2}$,由于$f:\overline{g_1}\to\overline{g_2}$为粗糙同态映射,所以$\exists A\in\overline{g_1}$,使$f(A)=B$,而$[A]_K\in\overline{\frac{g_1}{\ker f}}$,且$\varphi([A]_K)=f(A)=B$. 故$\varphi$是满射.

4) $\forall [A]_K,[B]_K\in\overline{\frac{g_1}{\ker f}}$,由于$\varphi([A]_K[B]_K)=\varphi([AB]_K)=f(AB)=f(A)f(B)=\varphi([A]_K)\varphi([B]_K)$,故$\varphi$是同构映射.

所以φ是同构映射,$\frac{g_1}{\ker f}$与$f(g_1)$粗糙同构.

推论 1 g_1 为粗糙幂半群 G_1 上的粗糙幂半群,g_2 为粗糙半群 G_2 上的粗糙幂半群,若$f:\overline{g_1}\to\overline{g_2}$为粗糙同态满射,则$\frac{g_1}{\ker f}$与 g_2 粗糙同构.

参考文献:

[1] 邵海琴. 幂半群的同态与同余[J]. 天水师范学院学报,2008,28(2):14-16

[2] 张振良,张金玲,肖其梅. 模糊代数与粗糙代数[M]. 武昌:武汉大学出版社,2007

[3] 余佳丽,舒兰. 粗糙商半群的性质[J]. 模糊系统与数学,2003,17(4):25-27

[4] 韩素清. 粗糙群的同态与同构[J]. 山西大学学报:自然科学版,2001,24(4):303-305

Rough Power Semigroup

YANG Pei-liang, WANG Shao-min

(School of Mathematics and Computer Science, Dali University, Yunnan Dali 671003, China)

Abstract: On the basis of the congruence relation of power semigroup, the concept of rough power semigroup is firstly given. Some properties of rough power semigroup are obtained. Finally, homomorphism and isomorphism of rough power semigroup are discussed.

Key words: rough power semigroup; rough quotient semigroup; rough homomorphism; rough isomorphism

责任编辑:李翠薇