第 28 卷第 6 期 重庆工商大学学报(自然科学版) 2011 年 12 月
Vol. 28 NO. 6 J Chongqing Technol Business Univ. (Nat Sci Ed) Dec. 2011

文章编号:1672-058X(2011)06-0566-02

R^d 中紧集的性质

邱沛光
(重庆工商大学 数学与统计学院,重庆 400067)

摘 要:对于 K 中定义的距离 ρ,证明了 coK 是(K,ρ)的闭子空间;在 coK 上定义另一距离 ρ_2,得到 ρ 和 ρ_2 在 coK 上导出相同的拓扑.

关键词:紧集;凸紧集;支撑函数
中图分类号:O189.11 **文献标志码**: A

1 定义及符号

R^d 为 d 维欧氏空间,恒以 K 表示 R^d 中非空紧子集全体,$coK=\{A\in K:A\text{ 凸}\}$. 在 K 中定义两种运算:

(1) $A+B=\{a+b:a\in A,b\in B\}$, $\forall A,B\in K$.

(2) $\lambda A=\{\lambda a:a\in A\}$, $\forall \lambda\in R,A\in K$.

则 K 和 coK 对这两个运算都是封闭的.

记 $S_\varepsilon(0)=\{\|x\|\in R^d:x\leqslant\varepsilon\}$, $\varepsilon>0$,恒以 $S=S_1(0)$,即 S 是球心在坐标原点的单位闭球. 以 $C(S)$表示 S 上的实值连续函数全体,对$f\in C(S)$,定义两个范数如下:

(1) $\|f\|_\infty=\sup\{|f(x)|:x\in S\}$;(2) $\|f\|_2=(\int_S|f(x)|^2\mathrm{d}x)^{\frac{1}{2}}$.

则$(C(S),\|\cdot\|_\infty)$为 Banach 空间,$(C(S),\|\cdot\|_2)$为内积空间. 容易证明,它们都是可分的,分别以 $C^\infty(S)$、$C^2(S)$来简记$(C(S),\|\cdot\|_\infty)$、$(C(S),\|\cdot\|_2)$.

对 $A\subset R^d$,以 coA 表示 A 的最小凸包. 显然,若 $A\in K$,则 $coA\in coK$. 对 $A,B\in K$,定义 $\rho(A,B)=\inf\{\lambda>0:A\subset B+\lambda S,B\subset A+\lambda S\}$,则有 ρ 是 K 上的距离,且(K,ρ)是完备可分距离空间[1]. 对 $A\in K$,记 $\|A\|=\rho(A,\{0\})=\sup\{\|a\|:a\in A\}$. 对 $A\in coK$,定义 A 的支撑函数 A^* 如下:$A^*(x)=\sup\{(x,a):a\in A\}$, $\forall x\in S$. 其中$(\cdot,\cdot)$表示 R^d 中内积. 显然有 $A^*\in C(S)$.

记$(coK)^*=\{A^*:A\in coK\}$,设 V 是由 $C(S)$中满足下列两条性质的元素全体组成的集合:

(1) $f(x+y)\leqslant f(x)+f(y)$, $\forall x,y,x+y\in S$;(2) $f(\lambda x)=\lambda f(x)$, $\forall\lambda>0,x,\lambda x\in S$. 则有 $V=(coK)^*$[2].

2 有关引理

引理 1[3] 对 $A,B\in coK$,有 $\rho(A,B)=\sup\{|A^*(x)-B^*(x)|:x\in S\}=\|A^*-B^*\|_\infty$.

引理 2[2] 设 $A\in coK$,则对一切 $x,y\in S$,有 $|A^*(x)-A^*(y)|\leqslant\|A\|\cdot\|x-y\|$.

引理 3[2] 设 $A,B\in coK$,则$(A+B)^*=A^*+B^*$.

收稿日期:2011-01-19;**修回日期**:2011-02-25.
作者简介:邱沛光(1963-),男,重庆人,硕士,副教授,从事概率与统计研究.

3　主要结果及证明

定理 1　coK 是(K,ρ)的闭子空间.

证明　先证明以下结果:设$\{A_n:n=1,2,\cdots\}\subset K$,且$\lim\limits_{n\to\infty}\rho(A_n,A)=0$(由$(K,\rho)$的完备性知,$A\in K$),则存在$\varepsilon_n>0,\varepsilon_n\to 0$,使得$A=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(A_n+\varepsilon_n S)$. 为此,取$\varepsilon_n=\rho(A_n,A)+\dfrac{1}{n}$,则$\varepsilon_n>0$,且$\varepsilon_n\to 0$,又由距离$\rho$的定义,有:

$$A\subset A_n+\varepsilon_n S \text{ 且 } A_n\subset A+\varepsilon_n S;n=1,2,\cdots$$

这样$A\subset\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(A_n+\varepsilon_n S)\subset\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(A+2\varepsilon_n S)=A$,因此$A=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(A_n+\varepsilon_n S)$.

有了上述结果,当取$\{A_n:n=1,2,\cdots\}\subset coK$,显然有$A\in coK$. 证毕.

为了得到第二个结果,在coK上再引进一个距离ρ_2,对$A,B\in coK$,有:

$$\rho_2(A,B)=\left(\int_S|A^*(x)-B^*(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}=\|A^*-B^*\|_2$$

$$\|A\|_2=\rho_2(A,\{0\})=\left(\int_S|A^*(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}$$

由多重积分的知识,球$S_r(a)=\{x\in R^d:\|x-a\|\leqslant r\}$的体积$V(S_r(a))=\dfrac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}r^d$. 由此,得到第二个主要结果.

定理 2　设$A,B\in coK$,则:

(ⅰ) $\rho_2(A,B)\leqslant\pi^{\frac{d}{2}}\Gamma^{-\frac{1}{2}}(\frac{d}{2}+1)\rho(A,B)$.

(ⅱ) $\rho^{\frac{(d+2)}{2}}(A,B)\leqslant 2^{d+1}\pi^{-\frac{d}{4}}\Gamma^{\frac{1}{2}}(\frac{d}{2}+1)(\|A\|+\|B\|)^{\frac{d}{2}}\rho_2(A,B)$.

(ⅲ) $\|A\|\leqslant 2^{d+1}\pi^{-\frac{d}{4}}\Gamma^{\frac{1}{2}}(\frac{d}{2}+1)\|A\|_2$.

即ρ和ρ_2在coK上导出相同的拓扑.

证明　为简便,记$\beta=\beta(A,B),\beta_2=\rho_2(A,B)$. 若$A=B$,(ⅰ)和(ⅱ)显然成立. 对于$A\neq B$,有:

(ⅰ) $\beta_2=\left(\int_S|A^*(x)-B^*(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\int_S\sup\limits_{x\in S}\{|A^*(x)-B^*(x)|^2\}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\int_S\beta^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}=\beta[V(S)]^{\frac{1}{2}}=\left(\dfrac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}\right)^{\frac{1}{2}}\beta$,即$\rho_2(A,B)\leqslant\pi^{\frac{d}{2}}\Gamma^{-\frac{1}{2}}(\frac{d}{2}+1)\rho(A,B)$,故(ⅰ)成立.

(ⅱ) 令$u(x)=A^*(x)-B^*(x)$,则存在$x_0\in S$,使得$|u(x_0)|=A^*-B^*{}_\infty=\rho(A,B)=\beta$.

由引理 2,对$x,y\in S$,有$|u(x)-u(y)|\leqslant(\|A\|+\|B\|)\cdot\|x-y\|$,为此,考虑球$S_r(x_0)$,这里$r=\dfrac{\beta}{2(\|A\|+\|B\|)}$,对$x\in S\cap S_r(x_0)$,有$|u(x)-u(x_0)|\leqslant\dfrac{\beta}{2}$,从而$|u(x)|\geqslant\dfrac{\beta}{2}$,如此,有$\beta_2=\left(\int_S|A^*(x)-B^*(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\int_S|u(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant\left(\int_{S\cap S_r(x_0)}|u(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant\dfrac{\beta}{2}\left(\int_{S\cap S_r(x_0)}1\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\geqslant\dfrac{\beta}{2}V(S_{\frac{r}{2}}(0))=\dfrac{\beta}{2}\cdot\dfrac{\pi^{\frac{d}{4}}}{\Gamma^{\frac{1}{2}}\left(\frac{d}{2}+1\right)}\cdot\left(\dfrac{\beta}{4(\|A\|+\|B\|)}\right)^{\frac{d}{2}}$.

整理得$\beta^{\frac{(d+2)}{2}}\leqslant 2^{d+1}\pi^{-\frac{d}{4}}\Gamma^{\frac{1}{2}}\left(\frac{d}{2}+1\right)(\|A\|+\|B\|)^{\frac{d}{2}}\beta_2$,即(ⅱ)成立.

(ⅲ)在(ⅱ)中,取$B=\{0\}$,即得$\|A\|\leqslant 2^{d+1}\pi^{-\frac{d}{4}}\Gamma^{\frac{1}{2}}\left(\frac{d}{2}+1\right)\|A\|_2$. 证毕.　(下转第 573 页)