文章编号:1672 -058X(2011)06 -0564 -02

动力系统点集 n 次迭代的不变性*

毛 冉
(重庆师范大学 数学学院,重庆 400047)

摘 要:周期点集、回归点集、ω-极限集是动力系统中几个重要概念点集,回归点集、ω-极限集、非游荡点集的概念都是在周期点集概念的推广下得到的,都是动力系统中的重要点的集合. 在周期点集的迭代不变性的研究下进一步讨论了回归点、ω-极限集的迭代不变性.

关键词:动力系统;周期点集;回归点集;ω-极限集
中图分类号:O189 **文献标志码:** A

1 预备知识

X 为一个拓扑空间. f:$X\to X$ 为连续自映射.

定义 1[1] 设(X,Γ)是一个拓扑空间,$x\in X$,如果 U 是 X 的一个子集,满足条件:存在一个开集 $V\in\Gamma$,使得 $x\in V\subset U$,则称 U 是点 x 的一个领域. 点 x 的所有领域构成的 X 的子集族称为点 x 的领域系.

定义 2[2] 点 x 称为 f 的周期点,如果存在 $n\in Z$. 使得 $f^n(x)=x$ 成立. 正整数 n 叫做 x 的周期. f 的所有周期点构成的集合记为 $P(f)$.

定义 3[2] f 是线段 I 上的一个连续自映射. 点 $x\in I$ 称为 f 的回归点,如果对于任意 $\varepsilon>0$ 存在 $n>0$,使得 $|f^{(n)}(x)-x|<\varepsilon$,$f$ 的全体回归点的集合记为 $R(f)$.

定义 4[2] 点 $y\in I$,称为点 $x\in I$ 的相对于线段 I 上的连续自映射 f 而言的一个 $\omega-$极限点,如果序列设 $x,f(x),f^2(x),\cdots$,有一个收敛的子序列 $f^{m_1}(x),f^{m_2}(x),\cdots$收敛于 y. 点 $x\in I$ 的相对于映射 f 而言的全体 $\omega-$极限点构成的集合记为 $\omega(x,f)$,令 $W(f)=\cup_{x\in I}\omega(x,f)$并称之为映射 f 的 $\omega-$极限集. $W(f)d$ 的每一个点都称为 f 的 $\omega-$极限点.

定理 1[2] 设 f:$X\to X$ 为连续自映射. 对任一个 $x\in X$,有正向轨道显然有 n 个不同的元素:$\{f^k(x),k=0,1,\cdots,n\}$. 若 x 是 f 的周期点. 则对任意正整数 n,x 也是 $f^n(x)$的周期点.

定理 2[3] x_0 为 f 的一个回归点,当且仅当正半轨 $O_f^+(x_0)$中存在一个子序列收敛于 x_0.

定理 3[2] 设 f 是线段 I 上的一个连续自映射,令 $x\in I$,则对于每一个整数 $n>0$,$\omega(x,f)=\cup_{i=1}\omega(f^i(x),f^n)$.

2 主要结果

命题 1 f 是区间 I 上的连续自映射,n 是任意自然数. 则 $P(f)=P(f^n)$.

证明 由定义 2,$P(f^n)\subset P(f)$. 而由定理 1 得到:$f(x)=x$,$f^n(x)=x$. 所以有 $f(x^{\frac{1}{n}})^n=x$,即 $f^{n\cdot\frac{1}{n}}(x)=x$. 所以 x 是 f^n 的$\dfrac{1}{n}$周期点,即 $P(f)\subset P(f^n)$. 所以 $P(f)=P(f^n)$.

收稿日期:2011 -03 -15;**修回日期:**2011 -04 -15.
* **基金项目:**国家自然科学基金资助项目(10971240).
作者简介:毛冉(1986-),女,陕西人,硕士研究生,从事拓扑动力系统研究.

命题 2 f 是区间 I 上的连续自映射,n 为任意自然数. 则 $R(f)=R(f^n)$.

证明 由定义 3 得: $R(f^n)\subset R(f)$ 进而,对任意 $x_0\in R(f)$,设子序列 $f^{k_1}(x_0)$,$f^{k_2}(x_0)$,$f^{k_3}(x_0)$,$\cdots$趋于 x_0. 注意到:

$$k_i\equiv r_i(\mathrm{mod}\,n),0\leqslant r_i<n,i=1,2,\cdots \tag{1}$$

有抽屉原则,必存在序列$\{k_i\}$中的子序列,不妨就记为$\{k_i\}$本身,其中元素都具有相同的余数 r,$0\leqslant r<n$. 经考虑 x_0 的任意小领域 U_1,显然存在某个 k_{i_1}使得$f^{k_{i_1}}(x_0)\in U_1$. 由连续性,可以选取 x_0 更小的领域 $U_2\subset U_1$ 使得$f^{k_{i_1}}(U_2)\subset U_1$. 同理对 U_2 重复 U_1 的步骤,如此下去,可以得到 x_0 的领域 $U_1,U_2,\cdots,U_n$ 及正整数 k_{i_1},$k_{i_2},\cdots,k_{i_n}$,满足:$f^{k_{i_i}}(x_0)\in U_i,i=1,2,\cdots,n$、$U_1\Leftrightarrow U_2\Leftrightarrow\cdots\Leftrightarrow U_n$ 以及 $f^{k_{i_i}}(U_{i+1})\subset U_i,i=1,2,\cdots,n-1$. 从而,$f^s(x_0)\in U_1$.

其中 $s:=k_{i_1}+k_{i_2}+\cdots+k_{i_n}\equiv 0(\mathrm{mod}\,n)=s_1n$,这里 s_1 是某个正整数. 因此$(f^n)^{s_1}(x_0)\in U_1$. 这样就证得了 $O^+_{f^n}(x_0)$中存在一个子序列收敛于 x_0. 因此 $x_0\in R(f^n)$,即 $R(f)\subset R(f^n)$. 所以 $R(f)=R(f^n)$.

命题 3 f 是区间 I 上的连续自映射,则对于每一个整数 $n>0$,则 $\omega(f)=\omega(f^n)$.

证明 设 $x\in I$. 根据定义 4$\omega(x,f^n)\subset\omega(x,f)$. 因此 $\omega(f^n)\subset\omega(f)$. 另一方面由定理 3 得:$\omega(x,f)=\cup_{i=1}^{n}\omega(f^i(x),f^n)\subset\omega(f^n)$. 因此 $\omega(f)\subset\omega(f^n)$. 所以 $\omega(f)=\omega(f^n)$.

致谢:撰写过程中得到了导师金渝光教授的悉心指导,特此表示感谢!

参考文献:

[1] 熊金城. 点集拓扑讲义[M]. 北京:高等教育出版社,2003
[2] 张景中,熊金城. 函数迭代与一维动力系统[M]. 成都:四川教育出版社,1992
[3] 张伟年. 动力系统基础[M]. 北京:高等教育出版社,2001
[4] 熊金城. 线段映射的动力体系:非游荡集,拓扑熵和混乱[J]. 中国科学技术大学学报,1988
[5] IRWIN M C. Smooth Dynamical Systems[M]. Academic Press,1980

Invariance of Nth Iteration of Point Set in Power System

MAO Ran

(College of Mathematics, Chongqing Normal University,Chongqing 400047,China)

Abstract: The periodic point set, regression point set and ω-limit set are important conceptual point sets in dynamical system,the concept of regression point set, ω-limit set and non-wandering point set is obtained by the generalization of periodic point set concept and is the important point set in power system, this paper further discusses iterative invariance of regression point set and ω-limit set under the research on iterative invariance of periodic point set.

Key words: power system; periodic point set; regression point set; ω - limit set

责任编辑:李翠薇
校　　对:田　静