文章编号:1672 - 058X(2011)06 - 0558 - 06

一类具有偏差变元的三阶泛函微分方程周期解的存在唯一性*

沈钦锐, 周宗福
(安徽大学 数学科学学院,合肥 230039)

摘 要:利用重合度理论,研究一类具有偏差变元的三阶时滞泛函微分方程 $x'''(t)+\sum_{i=1}^{2}[a_ix^{(i)}+b_ix^{(i)}(t-\tau_i)]+cx(t)+g_1(x(t))+g_2(x(t-\tau(t)))=e(t)$ 的 T- 周期解问题,获得了上述方程 T- 周期解存在和唯一性的若干新结果.

关键词:三阶时滞泛函微分方程;周期解;重合度
中图分类号:O155 **文献标志码:** A

0 引 言

有关泛函微分方程周期解存在性问题的研究,已经有了许多很好的研究成果[1-5]. 文献[1]研究 $x''+g(x(t-\tau))=p(t)$ 的 2π-周期解存在性,得出方程至少存在一个 2π-周期解的充分条件. 文献[2]利用重合度理论研究一类耗散型时滞 Duffing 方程 $ax''+f[x'(t-\tau_1(t))]+cx(t)+g(x(t-\tau_2(t)))=p(t)$ 周期解的存在性,得到该方程存在 2π-周期解的充分性定理. 文献[3]研究一类具有偏差变元的二阶微分方程 $x''(t)+f(x'(t))+h(x(t))x'(t)+g(t,x(t-\tau(t)))=p(t)$ 的周期解存在性问题. 文献[4]研究的是一类三阶微分方程的 2π-周期解问题,获得了该方程 2π-周期解存在唯一性的一些结论.

周期解的存在唯一性问题目前还研究得不多. 研究的方程较文献[4]广泛,采用新的分析方法,在更少的条件下,研究一类具有偏差变元的三阶泛函微分方程:

$$x'''(t)+\sum_{i=1}^{2}[a_ix^{(i)}+b_ix^{(i)}(t-\tau_i)]+cx(t)+g_1(x(t))+g_2(x(t-\tau(t)))=e(t) \tag{1}$$

周期解的存在和唯一性问题,获得了方程(1)周期解存在和唯一性的若干新结果. 其中 $a_i,b_i(i=1,2)$ 为常数,τ_1,τ_2,c 为非零常数,$g_i(x)(i=1,2)$ 为 R 上的连续函数,$\tau(t),e(t)$ 为 R 上连续的 T-周期函数且满足 $\int_0^T e(t)\,\mathrm{d}t=0$.

引入下列记号:$|x|_k=(\int_0^T|x(t)|^k\mathrm{d}t)^{\frac{1}{k}}$,$|x|_0=\max\limits_{t\in[0,T]}|x(t)|$. $X=\{x\,|\,x\in C^2(R,R),x(t+T)=x(t),\forall t\in R\}$,定义范数:$\|x\|_X=\max\{|x|_0,|x'|_0,|x''|_0\}$.

$Z=\{x\,|\,x\in C(R,R),x(t+T)=x(t),\forall t\in R\}$,在 Z 中定义范数:$\|x\|_Z=|x|_0$,则 X,Z 均为 Banach 空间,在 X 上定义如下线性算子:

$$L:\mathrm{Dom}\,L\subset X\to Z,Lx=x''', \tag{2}$$

其中 $\mathrm{Dom}\,L=\{x\,|\,x\in X,x'''\in C(R,R)\}$.

收稿日期:2011 - 05 - 25;**修回日期:**2011 - 06 - 20.
* **基金项目:**国家自然科学基金(11071001);安徽省教育厅重点基金(KJ2009A005Z);高校博士点专项科研基金(20093401110001).
作者简介:沈钦锐(1984-),男,福建漳州市人,硕士研究生,从事泛函微分方程研究.

定义非线性算子：$N:X\to Z$，

$$Nx\to -\sum_{i=1}^{2}\left[a_i x^{(i)}+b_i x^{(i)}(t-\tau_i)\right]-cx(t)-g_1(x(t))-g_2(x(t-\tau(t)))+e(t) \tag{3}$$

由 $Lx=x'''$，再根据 x 的周期性易得：$\mathrm{Ker}L=R$，$\mathrm{Im}L=\{x\,|\,x\in Z,\int_0^T x(t)\,\mathrm{d}t=0\}$.

Im L 是 Z 中的闭集，$\dim(\mathrm{Ker}L)=1$，$\dim(Z/\mathrm{Im}\,L)=1$，$\mathrm{codim}(\mathrm{Im}\,L)=\dim(\mathrm{Ker}L)=1$，因此 L 是一个指标为 0 的 Fredholm 算子.

定义如下投影算子：

$$P:X\to \mathrm{Ker}L,P(x)=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,\mathrm{d}t;\quad Q:Z\to R,Q(z)=\frac{1}{T}\int_0^T z(t)\,\mathrm{d}t.$$

则 Im $P=$ Ker$L$，Im $L=$ Ker$Q$，容易验证：$L|_{\mathrm{Dom}L\cap\mathrm{Ker}P}$ 是连续的一一映射. 则 $L|_{\mathrm{Dom}L\cap\mathrm{Ker}P}$ 有逆映射 L_P^{-1}：Im$L\to$ Dom$L\cap$Ker$P$，

$$L_P^{-1}y(t)=k_1t+\int_0^t k_2 s\,\mathrm{d}s-\frac{1}{T}\int_0^T k_1 t\,\mathrm{d}t+\int_0^t\int_0^u\int_o^w y(s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}w\mathrm{d}u+k_3.$$

其中

$$k_2=-\frac{1}{T}\int_0^T\int_0^\tau y(s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau,k_1=-\int_0^T k_2 s\,\mathrm{d}s-\frac{1}{T}\int_0^T\int_0^u\int_0^\tau y(s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\mathrm{d}u,$$

$$k_3=-\frac{1}{T}\int_0^T\int_0^u k_2 s\,\mathrm{d}s\mathrm{d}u-\frac{1}{T}\int_0^T\int_0^w\int_0^u\int_0^\tau y(s)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\mathrm{d}u\mathrm{d}w.$$

由 Arezela-Ascoli 定理知 L_P^{-1} 是线性紧算子，从而 $L_P^{-1}(I-Q)$ 也是紧算子，根据 N 的定义，对 X 中任意有界开集 Ω，QN 和 $L_P^{-1}(I-Q)N$ 均在 $\bar{\Omega}$ 上为紧的，故 N 在 $\bar{\Omega}$ 上是 L-紧的.

1　几个引理

引理 1[5]　设 X,Z 为 Banach 空间，L 是指标为 0 的 Fredholm 算子，N：$\bar{\Omega}\to Z$ 在 $\bar{\Omega}$ 上是 L-紧的，其中 Ω 是 X 中的有界开集，且满足：

（a）$Lx\neq\lambda Nx$，$\forall\lambda\in(0,1)$，$\forall x\in DomL\cap\partial\Omega$.

（b）$Nx\notin \mathrm{Im}L$，$\forall x\in \mathrm{Ker}L\cap\partial\Omega$.

（c）$\deg(QNx,\mathrm{Ker}L\cap\Omega,0)\neq 0$.

则方程 $Lx=Nx$ 在 $DomL\cap\bar{\Omega}$ 上至少有一个解.

引理 2[6]　（Writinger 不等式）；

设 $x\in C^2(R,R)$，且 $x(t+T)=x(t)$，$\forall t\in R$，则 $|x'(t)|_2^2\leqslant\dfrac{T^2}{4\pi^2}|x''(t)|_2^2$.

2　主要结果

定理 1　假设下列条件(H_1)，(H_2)成立，则方程(1)至少存在一个 T-周期解.

(H_1) 存在正常数 $M_i(i=1,2)$，使得：$|g_i(x)|\leqslant M_i$.

(H_2) $|a_1|+|b_1|+\dfrac{2\pi}{T}|b_2|+|c|T<\dfrac{4\pi^2}{T^2}$.

证明　利用引理 1 证明方程(1)至少存在一个 T-周期解，由式(2)，式(3)可知算子方程：

$$Lx=\lambda Nx,\ \forall\lambda\in(0,1)$$

等价于下列方程：

$$x'''(t)+\lambda\sum_{i=1}^{2}\left[a_i x^{(i)}+b_i x^{(i)}(t-\tau_i)\right]+\lambda cx(t)+\lambda g_1(x(t))+\lambda g_2(x(t-\tau(t)))=\lambda e(t) \tag{4}$$

将方程(4)两边从 0 到 T 积分后有：

$$\int_0^T [cx(t)+g_1(x(t))+g_2(x(t-\tau(t)))]\mathrm{d}t=0 \tag{5}$$

由此得到存在 $t_1\in[0,T]$，使得 $cx(t_1)+g_1(x(t_1))+g_2(x(t_1-\tau(t_1)))=0$，所以有：

$$|x(t_1)|\leqslant\frac{|g_1(x(t_1))|+|g_2(x(t_1-\tau(t_1)))|}{|c|}\leqslant\frac{M_1+M_2}{|c|}=\frac{M}{|c|}.\ (M\overset{\Delta}{=\!=}M_1+M_2)$$

又 $x(t)=x(t_1)+\int_{t_1}^{t}x'(s)\mathrm{d}s$，由此得：$|x|_0\leqslant|x(t_1)|+\int_{t_1}^{T}|x'(s)|\mathrm{d}s\leqslant\frac{M}{|c|}+\int_0^T|x'(t)|\mathrm{d}t$

利用 Hölder 不等式有：

$$|x|_0\leqslant\frac{M}{|c|}+\sqrt{T}|x'|_2 \tag{6}$$

设 $x(t)$ 是方程(4)的任意 T-周期解，将(4)式的两边同时乘以 $x'''(t)$ 并从 0 到 T 积分得：

$$\begin{aligned}
|x'''|_2^2=&\int_0^T|x'''(t)|^2\mathrm{d}t=\\
&\lambda a_1|x''|_2^2-\lambda b_1\int_0^T x'''(t)x'(t-\tau_1)\mathrm{d}t-\lambda b_2\int_0^T x'''(t)x''(t-\tau_2)\mathrm{d}t-\lambda c\int_0^T x'''(t)x(t)\mathrm{d}t-\\
&\lambda\int_0^T x'''(t)g_1(x(t))\mathrm{d}t-\lambda\int_0^T x'''(t)g_2(x(t-\tau(t)))\mathrm{d}t+\lambda\int_0^T x'''(t)e(t)\mathrm{d}t\leqslant\\
&|a_1||x''|_2^2+|b_1||x'''|_2|x'|_2+|b_2||x'''|_2|x''|_2+|c||x|_0\sqrt{T}|x'''|_2+\\
&M_1\sqrt{T}|x'''|_2+M_2\sqrt{T}|x'''|_2+|e(t)|_0\sqrt{T}|x'''|_2\leqslant\\
&\frac{T^2}{4\pi^2}|a_1||x'''|_2^2+\frac{T^2}{4\pi^2}|b_1||x'''|_2^2+\frac{T}{2\pi}|b_2||x'''|_2^2+|c|\left(\frac{M}{|c|}+\sqrt{T}|x'|_2\right)\sqrt{T}|x'''|_2+\\
&M_1\sqrt{T}|x'''|_2+M_2\sqrt{T}|x'''|_2+|e(t)|_0\sqrt{T}|x'''|_2\leqslant\\
&\left(\frac{T^2}{4\pi^2}|a_1|+\frac{T^2}{4\pi^2}|b_1|+\frac{T}{2\pi}|b_2|+\frac{|c|T^3}{4\pi^2}\right)|x'''|_2^2+(M+M_1+M_2+|e|_0)\sqrt{T}|x'''|_2
\end{aligned}$$

由(H_2)知：$\frac{T^2}{4\pi^2}|a_1|+\frac{T^2}{4\pi^2}|b_1|+\frac{T}{2\pi}|b_2|+\frac{|c|T^3}{4\pi^2}<1.$

故存在常数 R_1，使得：

$$|x'''|\leqslant R_1 \tag{7}$$

由 $x(0)=x(T)$，所以存在 $t_0\in[0,T]$，满足 $x'(t_0)=0$，对 $\forall t\in[0,T]$ 有：

$$|x'(t)|=|x'(t_0)+\int_{t_0}^{t}x''(s)\mathrm{d}s|\leqslant\int_0^T|x''(s)|\mathrm{d}s\leqslant\sqrt{T}|x''|_2\leqslant\frac{T^{\frac{3}{2}}}{2\pi}|x'''|_2 \tag{8}$$

同理可得：

$$|x''(t)|\leqslant\int_0^T|x'''(s)|\mathrm{d}s\leqslant\sqrt{T}|x'''|_2 \tag{9}$$

由式(6)、(7)、(8)、(9)知存在与 λ 无关的正常数 R_2,R_3,R_4 满足：

$$|x'|_0<R_3;\ |x''|_0<R_4;\ |x|_0\leqslant\frac{M}{|c|}+\sqrt{T}|x'|_2<\frac{M}{|c|}+TR_3=R_2$$

令 $R_0=\max\{R_2,R_3,R_4\}$，取 $\Omega=\{x\mid x\in X,\ \|x\|_X<R_0\}$，则引理 1 的条件($a$)成立.

当 $x\in\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}L$ 时 x 为常数，且 $|x|=R_0$，所以：

$$\begin{aligned}
|QNx|=&\frac{1}{T}\left|\int_0^T\left(-\sum_{i=1}^{2}[a_ix^{(i)}+b_ix^{(i)}(t-\tau_i)]-cx(t)-g_1(x(t))-g_2(x(t-\tau(t)))+e(t)\right)\mathrm{d}t\right|=\\
&|-cx(t)-g_1(x(t))-g_2(x(t-\tau(t)))|=\\
&|c|\left|x(t)+\frac{g_1(x(t))+g_2(x(t-\tau(t)))}{c}\right|\geqslant
\end{aligned}$$

$$|c|\left[|x(t)|-\frac{|g_1(x(t))|+|g_2(x(t-\tau(t)))|}{|c|}\right]\geqslant$$

$$|c|\left[R_0-\frac{M}{|c|}\right]>0$$

从而 $QNx\neq 0$,引理 1 的条件(b)成立.

作变换:$H(x,\mu)=\mu cx+(1-\mu)[cx+g_1(x(t))+g_2(x(t-\tau(t)))]$,$0\leqslant\mu\leqslant 1$

则当 $x\in\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}L$ 时 x 为常数,且 $|x|=R_0$,有:

(1) 当 $x=R_0$,$c>0$ 时.

$$\begin{aligned}H(x,\mu)&=\mu cR_0+(1-\mu)[cR_0+g_1(R_0)+g_2(R_0)]=\\&c\left(\mu R_0+(1-\mu)\left[R_0+\frac{g_1(R_0)+g_2(R_0)}{c}\right]\right)\geqslant\\&c\left[\mu R_0+(1-\mu)\left(R_0-\frac{M}{c}\right)\right]>0\end{aligned}$$

(2) 当 $x=R_0$,$c<0$ 时.

$$\begin{aligned}H(x,\mu)&=\mu cR_0+(1-\mu)[cR_0+g_1(R_0)+g_2(R_0)]=\\&c\left(\mu R_0+(1-\mu)\left[R_0+\frac{g_1(R_0)+g_2(R_0)}{c}\right]\right)\leqslant\\&c\left[\mu R_0+(1-\mu)\left(R_0-\frac{M}{c}\right)\right]<0\end{aligned}$$

这样当 $x=R_0$ 时,$H(x,\mu)\neq 0$,同理可证当 $x=-R_0$ 时 $H(x,\mu)\neq 0$.

由 Brouwer 度的同伦不变性知:

$$\begin{aligned}\deg(QNx,\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}L,0)&=\deg(-cx(t)-g_1(x(t))-g_2(x(t-\tau(t))),\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}L,0)=\\&\deg(-cx,(-R_0,R_0),0)\neq 0\end{aligned}$$

所以条件(c)满足,根据定理 1 知方程(2)至少存在一个 T-周期解.

定理 2　假设方程(1)既满足条件(H_1),又满足下列条件(H_3),(H_4):

(H_3) 存在非负常数 c_1,c_2 使得 $|g_i(x_1)-g_i(x_2)|\leqslant c_i|x_1-x_2|$,其中 $i=1,2$,$x_i\in R$,且:$|a_1|+|b_1|+\frac{2\pi}{T}|b_2|+|c|T+c_1T+c_2T<\frac{4\pi^2}{T^2}$.

(H_4) 在下列条件之一成立:

(1) 当 $c>0$ 时,$(g_i(x_1)-g_i(x_2))(x_1-x_2)>0$,其中 $i=1,2$. $x_i\in R$ 且 $x_1\neq x_2$

(2) 当 $c<0$ 时,$(g_i(x_1)-g_i(x_2))(x_1-x_2)<0$,其中 $i=1,2$. $x_i\in R$ 且 $x_1\neq x_2$

则方程(1)存在唯一的 T-周期解.

证明　设 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 是方程(1)的两个 T-周期解,则有

$$x'''_1(t)+\sum_{i=1}^{2}[a_ix_1^{(i)}+b_ix_1^{(i)}(t-\tau_i)]+cx_1(t)+g_1(x_1(t))+g_2(x_1(t-\tau(t)))=e(t)$$

$$x'''_2(t)+\sum_{i=1}^{2}[a_ix_2^{(i)}+b_ix_2^{(i)}(t-\tau_i)]+cx_2(t)+g_1(x_2(t))+g_2(x_2(t-\tau(t)))=e(t)$$

上面两式做差得:

$$\begin{aligned}&[x_1(t)-x_2(t)]'''+\sum_{i=1}^{2}[a_i(x_1(t)-x_2(t))^{(i)}+b_i(x_1(t-\tau_i)-x_2(t-\tau_i))^{(i)}]+\\&c[x_1(t)-x_2(t)]+g_1(x_1(t))-g_1(x_2(t))+g_2(x_1(t-\tau(t)))-g_2(x_2(t-\tau(t)))=0\end{aligned}\tag{10}$$

令 $u(t)=x_1(t)-x_2(t)$,则由式(10)可得:

$$\begin{aligned}&u'''(t)+\sum_{i=1}^{2}[a_iu^{(i)}(t)+b_iu^{(i)}(t-\tau_i)]+cu(t)+(g_1(x_1(t))-g_1(x_2(t)))+\\&(g_2(x_1(t-\tau(t)))-g_2(x_2(t-\tau(t))))=0\end{aligned}\tag{11}$$

将式(11)两边从 0 到 T 积分有：

$$\int_0^T[cu(t)+g_1(x_1(t))-g_1(x_2(t))+g_2(x_1(t-\tau(t)))-g_2(x_2(t-\tau(t)))]\mathrm{d}t=0$$

由积分中值定理知，$\exists\eta\in[0,T]$，满足：

$$cu(\eta)+g_1(x_1(\eta))-g_1(x_2(\eta))+g_2(x_1(\eta-\tau(\eta)))-g_2(x_2(\eta-\tau(\eta)))=0 \tag{12}$$

由式(12)并结合条件(H_4)可以证明：$\exists\xi\in R, u(\xi)=0$. 事实上，假设 $\forall t\in R, u(t)\neq 0$

由 $u(t)=x_1(t)-x_2(t)$ 是 R 上的连续函数，知恒有 $u(t)>0$，或者 $u(t)<0$.

(1) 当 $c>0, u(t)>0$ 时，$g_1(x_1(t))>g_1(x_2(t))$，$g_2(x_1(t-\tau(t)))>g_2(x_2(t-\tau(t)))$，从而 $cu(t)+g_1(x_1(t))-g_1(x_2(t))+g_2(x_1(t-\tau(t)))-g_2(x_2(t-\tau(t)))>0$ 与式(12)矛盾.

(2) 当 $c>0, u(t)<0$ 时，$g_1(x_1(t))<g_1(x_2(t))$，$g_2(x_1(t-\tau(t)))<g_2(x_2(t-\tau(t)))$ 从而 $cu(t)+g_1(x_1(t))-g_1(x_2(t))+g_2(x_1(t-\tau(t)))-g_2(x_2(t-\tau(t)))<0$ 与(12)矛盾.

当 $c<0$，类似以上的讨论同样得出矛盾. 故 $\exists\xi\in R$ 使得：

$$u(\xi)=0. \tag{13}$$

令 $\xi=nT+\sigma$，其中 $\sigma\in[0,T]$，n 为整数，由 $u(t)$ 的周期性可知 $u(\sigma)=u(\xi)=0$.

根据 Hölder 不等式有下列关系式成立：

$$|u(t)|=\left|u(\sigma)+\int_\sigma^t u'(s)\mathrm{d}s\right|\leqslant\int_0^T|u'(s)|\mathrm{d}s\leqslant\sqrt{T}|u'|_2 \tag{14}$$

由引理 2 和式(14)有：

$$|u|_0\leqslant\sqrt{T}|u'|_2\leqslant\frac{T^{\frac{5}{2}}}{4\pi^2}|u'''|_2 \tag{15}$$

将式(11)两边同乘以 $u'''(t)$ 并从 0 到 T 积分，由 (H_3)(15)和 Hölder 不等式有：

$$\begin{aligned}
|u'''(t)|_2^2=&\int_0^T|u'''(t)|^2\mathrm{d}t=\\
&a_1|u''|_2^2-b_1\int_0^T u'''(t)u'(t-\tau_1)\mathrm{d}t-b_2\int_0^T u'''(t)u''(t-\tau_2)\mathrm{d}t-c\int_0^T u'''(t)u(t)\mathrm{d}t-\\
&\int_0^T(g_1(x_1(t))-g_1(x_2(t)))u'''(t)\mathrm{d}t-\int_0^T(g_2(x_1(t-\tau(t)))-g_2(x_2(t-\tau(t))))u'''(t)\mathrm{d}t\leqslant\\
&\frac{T^2}{4\pi^2}|a_1||u'''|_2^2+|b_1||u'''|_2|u'|_2+|b_2||u'''|_2|u''|_2+|c||u|_0\sqrt{T}|u'''(t)|_2+\\
&c_1\int_0^T|u(t)||u'''(t)|\mathrm{d}t+c_2\int_0^T|x_1(t-\tau(t))-x_2(t-\tau(t))||u'''(t)|\mathrm{d}t\leqslant\\
&\frac{T^2}{4\pi^2}|a_1||u'''|_2^2+\frac{T^2}{4\pi^2}|b_1||u'''|_2^2+\frac{T}{2\pi}|b_2||u'''|_2^2+|c|\frac{T^3}{4\pi^2}|u'''|_2^2+\\
&(c_1+c_2)\sqrt{T}|u|_0|u'''|_2^2\leqslant\\
&\left(\frac{T^2}{4\pi^2}|a_1|+\frac{T^2}{4\pi^2}|b_1|+\frac{T}{2\pi}|b_2|+|c|\frac{T^3}{4\pi^2}+c_1\frac{T^3}{4\pi^2}+c_2\frac{T^3}{4\pi^2}\right)|u'''|_2^2
\end{aligned} \tag{16}$$

由条件(H_3)知：$\frac{T^2}{4\pi^2}|a_1|+\frac{T^2}{4\pi^2}|b_1|+\frac{T}{2\pi}|b_2|+|c|\frac{T^3}{4\pi^2}+c_1\frac{T^3}{4\pi^2}+c_2\frac{T^3}{4\pi^2}<1$，故由式(16)知：$|u'''|_2^2=0$.

由式(15) $|u|_0\leqslant\sqrt{T}|u'|_2\leqslant\frac{T^{\frac{5}{2}}}{4\pi^2}|u'''|_2$，故 $|u(t)|_0=0$，即有 $x_1(t)\equiv x_2(t)$，$\forall t\in[0,T]$.

因而方程(1)至多有一个 T-周期解.

由于(H_3)包含了(H_2)，并结合定理 1 可知方程(1)存在唯一 T-周期解.

注 在定理 1,2 中，若把 $g_1(x)$ 改为 $g_1(t,x)$，且 $g_1(t,x)$ 关于 t 是 T-周期解的，结论仍然成立.

3　应用举例

考虑三阶泛函微分方程:

$$x'''(t)-6x''(t)+\frac{1}{5}x'(t)-\frac{1}{60}x''(t-3)+\frac{1}{10}x'(t-2)+\frac{1}{30}x(t)+$$
$$\frac{1}{40}\arctan(x(t)\cos^2 t)+\frac{x(t-\sin t)}{60(1+|x(t-\sin t)|)}=\cos t \tag{17}$$

因为 $g_1(t,x)=\frac{1}{40}\arctan(x\cos^2 t)$, $g_2(x)=\frac{x}{60(1+|x|)}$. 故可取 $c_1=\frac{1}{40}$, $c_2=\frac{1}{60}$, 取 $T=2\pi$, 则:

$$|a_1|+|b_1|+\frac{2\pi}{T}|b_2|+|c|T+c_1T+c_2T=$$
$$\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{60}+2\pi\left(\frac{1}{30}+\frac{1}{40}+\frac{1}{60}\right)=\frac{19}{60}+\frac{3\pi}{20}<1$$

由定理 1,定理 2 知道方程(17)存在唯一的 2π-周期解.

注　应用文献[4]无法判断方程(17)是否存在唯一的周期解.

参考文献:

[1] 黄先开,向子贵. 具有时滞的 Duffing 型方程 $x''+g(x(t-\tau))=p(t)$ 的 2π 周期解[J]. 科学通报,1944,39(3):201-203

[2] 弥鲁芳,武延树. 一类具时滞耗散型 Duffing 方程的周期解[J]. 数学的实践与认识 2008,38(19):235-238

[3] 佘志炜,王全义. 一类二阶微分方程周期解的存在性[J]. 华侨大学学报,2010,4(3): 235-240

[4] 汪一高,鲁世平. 一类三阶泛函微分方程周期解的存在唯一性[J]. 数学研究,2009,42(1):58-62

[5] GAINES R,MAWHIN J. Coincide Degree and Nonlinear Differential Equation[M[. Berlin:Springer-Verlag. 1977

[6] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 济南:山东科学技术出版社,2001

[7] 孙经先,刘兆理,郭大钧. 非线性常微分方程的泛函方法[M]. 济南:山东科学技术出版社,1995

[8] 王根强,燕居让. 二阶非线性中立型泛函微分方程周期解的存在性[J]. 数学学报,2004,47(2):379-384

[9] 王少敏,冷天玖. 关于一类常微分方程组周期解的存在性定理[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版,2007,24(2):119-121

Existence and Uniqueness of Periodic Solution to a Third Order Functional Differential Equation with Delays

SHEN Qin-rui, ZHOU Zong-fu

(School of Mathematical Science, University of Anhui, Hefei 230039, China)

Abstract: In this paper, by means of the theory of coincident degree, T-periodic solution of a type of third order functional differential equation with delays

$$x'''(t)+\sum_{i=1}^{2}[a_i x^{(i)}+b_i x^{(i)}(t-\tau_i)]+cx(t)+g_1(x(t))+g_2(x(t-\tau(t)))=e(t)$$

is studied. Several new results about the existance and uniqueness of T-periodic solution of above equation are obtained.

Key words: three order functional differential equation with delays; periodic solution; coincidence degree

责任编辑:田　静