

文章编号:1672-058X(2011)06-0551-07

一个多维混沌系统的最终有界集和正向不变集及其在同步之中的应用^{*}

龙健生¹,舒永录^{1**},杨洪亮²

(1. 重庆大学 数学与统计学院,重庆 401331;2. 临沂大学 信息学院,山东 临沂 276005)

摘 要:研究了一个新的不同于 Lorenz 系统、Chen 系统和 Lü 系统、T 系统、Qi 系统的五维自治混沌系统,该系统有 1 个参数,6 个非线性乘积项;得到了该系统的一个五维椭球最终有界集和正向不变集界估计;最后,结果应用到混沌同步之中去,数值仿真显示了方案的可行性.

关键词:混沌系统;分岔图;混沌吸引子;同步;数值模拟

中图分类号:O175.14;O415.5

文献标志码:A

1 引言与基础知识

Lorenz^[1]提出一个形象的比喻:“巴西的一只蝴蝶闪动几下翅膀,可能会改变 3 个月后美国德克萨斯州的气候”,这就是著名的“蝴蝶效应”,揭示了混沌系统的长期行为对初值的敏感依赖性. Lorenz 的这一发现成为混沌研究的里程碑.

特别地,混沌系统的界在混沌系统的控制和同步中起着非常重要的作用^[2,3]. 如果可以证明一个混沌系统有界,那么可以断定在最终有界集之外不会存在系统其他的平衡位置、周期解、概周期解、游荡回复解和其他任何吸引子. 混沌系统的界还可以用于估计 Hausdorff 维数^[4]. 不少人都在这方面做出了大量工作,廖晓昕^[5]对混沌系统定义一全局指数吸引集的概念和洛伦兹系统进行了深入的研究. 2007 年,廖晓昕^[5]等人引进了全局指数吸引集的概念,使得对 Lorenz 的估计进一步完善. 然而,估计一个混沌系统的混沌吸引子的界是一个十分困难的事情,况且对一个混沌系统吸引子界的估计大多是居于三维系统,据作者所知只有一篇文章(参考文献[6])研究四维超混沌 L-S 系统的吸引子的界,并没有统一的构造李雅普函数的方法来研究一个混沌系统的界,因此有必要对新出现的系统加以研究.

此处提出一个维纳-斯托克斯方程截断时的混沌系统^[7]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + 4x_2x_3 + 4x_4x_5 \\ \dot{x}_2 = -9x_2 + 3x_1x_3 \\ \dot{x}_3 = -5x_3 - 7x_1x_2 + d \\ \dot{x}_4 = -5x_4 - x_1x_5 \\ \dot{x}_5 = -x_5 - 3x_1x_4 \end{cases} \quad (1)$$

这里 d 为该系统的正参数. 当 $d > 29$ 时,系统处于混沌状态^[7]. 当 $d = 30$ 时,其典型吸引子如图 1 所示.

收稿日期:2011-03-09;修回日期:2011-05-10.
^{*} 基金项目:国家自然科学基金青年基金(No. 10601071);重庆市自然科学基金(No. 2009BB3185);中央高校基本科研业务费资助(No. CDJXS 10 10 00 29;No. CDJXS 11 10 00 26).
作者简介:龙健生(1974-),男,湖南人,硕士研究生,从事微分方程定性理论研究.
^{**} 通讯作者:舒永录(1963-),男,四川武胜人,副教授,博士,从事泛函分析与动力系统研究.

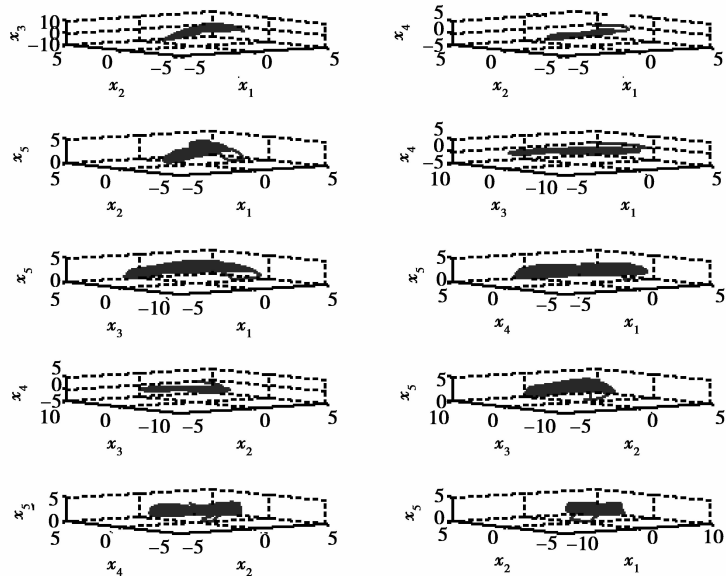


图 1 系统(1)的混沌吸引子在各个三维坐标系上的投影相图

2 基本动力学特性

2.1 对称性

系统(1)具有自然的对称性,即做变换:

$$(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \rightarrow (x_1,x_2,x_3,-x_4,-x_5)$$
 (2)

后,系统保持不变. 式(2)变式可以表示为:

$$P:R^5 \rightarrow R^5,X \rightarrow PX,P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

它满足:

$$f(PX) = Pf(X)$$
 (3)

即系统关于 $x_1x_2x_3$ 平面对称,且这种对称性对系统所有参数均成立.

2.2 耗散度

由于散度 $\nabla V = \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \dot{y}_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \dot{y}_2}{\partial y_2} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = -22$,从而系统(1)为耗散的,并以指数形式 $\frac{dV}{dt} = e^{-22t}$ 收敛. 也就是说一个初始体积为 $V(0)$ 的体积元在时刻 t 时收缩为体积元 $V(0)e^{-22t}$. 这意味着,当 $t \rightarrow \infty$ 时,包含系统轨线的每个小体积元以指数速率 -22 收缩到零,所有系统的轨线最终会被限制到一个体积为零的极限子集上,其渐进运动将被固定在一个吸引子上. 这说明了吸引子的存在性.

2.3 平衡点

令系统的左端为零,若 $d > 29$,则系统具有如下的 4 个平衡点:

$$\begin{aligned}
 E_1 &= \left(\sqrt{\frac{d\sqrt{6}-15}{7}}, \sqrt{\frac{d\sqrt{6}-15}{42}}, \frac{\sqrt{6}}{2}, 0, 0 \right) \\
 E_2 &= \left(-\sqrt{\frac{d\sqrt{6}-15}{7}}, -\sqrt{\frac{d\sqrt{6}-15}{42}}, \frac{\sqrt{6}}{2}, 0, 0 \right) \\
 E_3 &= \left(\frac{\sqrt{15}}{3}, \frac{\sqrt{15}d}{800}, \frac{9d}{800}, \sqrt{\frac{9d^2}{6400} - \frac{1}{6}}, -\sqrt{15} \times \sqrt{\frac{9d^2}{6400} - \frac{1}{6}} \right) \\
 E_4 &= \left(\frac{\sqrt{15}}{3}, \frac{\sqrt{15}d}{800}, \frac{9d}{800}, -\sqrt{\frac{9d^2}{6400} - \frac{1}{6}}, \sqrt{15} \times \sqrt{\frac{9d^2}{6400} - \frac{1}{6}} \right)
 \end{aligned} \tag{4}$$

2.4 分岔图

改变正参数 d , 当 $d \in [27, 32]$ 时, 系统的 Hopf 分岔图, 如图 2 所示.

2.5 系统的混沌吸引子界范围

引理 1 定义一个集合:

$$\Gamma = \left\{ (x_1, x_2, y_1, y_2, z) \left| \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{(z-c)^2}{c^2} + \frac{y_1^2}{d^2} + \frac{y_2^2}{e^2} = 1 \right. \right. \\
 \left. \left. (a > 0, b > 0, c > 0, d > 0, e > 0) \right\}$$

令 $G = x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 + z^2$, $H = x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 + (z - 2c)^2$, $(x_1, x_2, y_1, y_2, z) \in \Gamma$. 则:

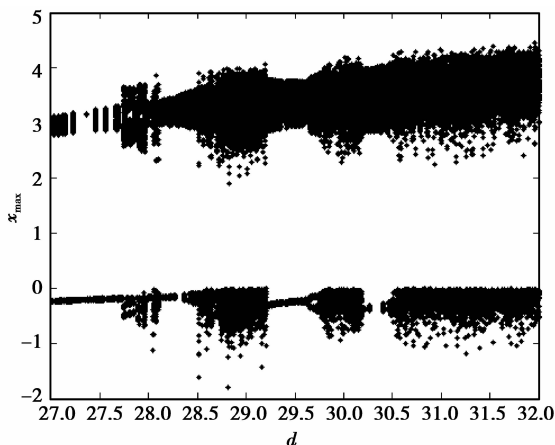


图 2 系统关于参数 $d \in [27, 32]$ 的 Hopf 分岔图

$$G_m \equiv \max_{(x_1, x_2, y_1, y_2, z) \in \Gamma} G = H_m \equiv \max_{(x_1, x_2, y_1, y_2, z) \in \Gamma} H = \begin{cases} \frac{a^4}{a^2 - c^2}, a \geq b, a \geq d, a \geq e, a \geq \sqrt{2}c \\ \frac{b^4}{b^2 - c^2}, b > a, b \geq d, b > e, b \geq \sqrt{2}c \\ \frac{d^4}{d^2 - c^2}, d > a, d > b, d \geq e, d \geq \sqrt{2}c \\ \frac{e^4}{e^2 - c^2}, e > a, e \geq b, e > d, e \geq \sqrt{2}c \\ 4c^2, a < \sqrt{2}c, b < \sqrt{2}c, d < \sqrt{2}c, e < \sqrt{2}c \end{cases}$$

定理 1 令 $\Omega = \{(x_1, x_2, y_1, y_2, z) | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 \leq R^2\}$, 则 Ω 是系统(1)的一个正向不变集和最终有界集.

$$V(x_1, x_2, y_1, y_2, z) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2, R^2 = \max_{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \Gamma_1} V(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$

$$\Gamma_1 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \left| \frac{x_1^2}{\frac{d^2}{40}} + \frac{x_2^2}{\frac{d^2}{180}} + \frac{x_4^2}{\frac{d^2}{100}} + \frac{x_5^2}{\frac{d^2}{20}} + \frac{\left(x_3 - \frac{d}{10}\right)^2}{\left(\frac{d}{10}\right)^2} = 1 \right. \right\} \tag{5}$$

其中 $R^2 = \frac{d^2}{16}$.

证明

令 $V(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2$, 沿着系统(1)的轨线对时间求导:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \dot{V}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= x_1 \dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 + x_3 \dot{x}_3 + x_4 \dot{x}_4 + x_5 \dot{x}_5 = \\
 &= x_1(-2x_1 + 4x_2x_3 + 4x_4x_5) + x_2(-9x_2 + 3x_1x_3) + \\
 &+ x_3(-5x_3 - 7x_1x_2 + d) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &x_4(-5x_4-x_1x_5)+x_5(-x_5-3x_1x_4)=\\ &-2x_1^2-9x_2^2-5x_3^2+dx_3-5x_4^2-x_5^2=\\ &-2x_1^2-9x_2^2-5(x_3-\frac{d}{10})^2-5x_4^2-x_5^2+\frac{d^2}{20} \end{aligned}$$

令 $\dot{V}=0$,可以得到下列椭球面 Γ_1 :

$$\Gamma_1=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\left|\frac{x_1^2}{\frac{d^2}{40}}+\frac{x_2^2}{\frac{d^2}{180}}+\frac{x_4^2}{\frac{d^2}{100}}+\frac{x_5^2}{\frac{d^2}{20}}+\frac{\left(x_3-\frac{d}{10}\right)^2}{\left(\frac{d}{10}\right)^2}=1\right.\right\}$$

在 Γ_1 外, $\dot{V}<0$,在 Γ_1 内部, $\dot{V}>0$,因此函数 V 的最大值只能在 Γ_1 上取得. 令 $a_0^2=\frac{d^2}{40}, b_0^2=\frac{d^2}{180}, d_0^2=\frac{d^2}{100}, c_0^2=\frac{d^2}{100}, e_0^2=\frac{d^2}{20}, c_0=\frac{d}{10}$,根据引理 1,当 $e_0>a_0, e_0\geq b_0, e_0>d_0, e_0\geq\sqrt{2}c_0$,可得结论:

$$V_m=\max_{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in\Gamma_1}V(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=\frac{e_0^4}{e_0^2-c_0^2}=\frac{d^2}{16}$$

下面证明 Ω 为系统(1)的最终有界集.

接下来要证:

$$\lim_{t\rightarrow+\infty}\rho(X(t),\Omega)=0 \tag{6}$$

这里 $X(t)=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$.

用反证法证明式(6)成立. 若不然,则设系统(1)的轨线恒停留在 Ω 之外. 因为 $V(X)$ 在 Ω 之外严格单调下降,故极限 $\lim_{t\rightarrow+\infty}V(X(t))=V^*>l_0$ 存在.

令 $s=\inf_{X\in D}(-\dot{V}(X(t)))$,其中 $D=\{X(t)\mid V^*\leq V(X(t))\leq V(X(t_0))\}$,其中 t_0 为初始时间,这里 $V^*>0, s>0$,所以有:

$$\frac{dV(X(t))}{dt}\leq-s \tag{7}$$

从而 $t\rightarrow+\infty$ 时,有 $0\leq V(X(t))\leq V(X(t_0))-s(t-t_0)\rightarrow-\infty$,这显然是一个矛盾,式(6)成立. 所以说 Ω 是系统(1)的最终有界集.

Ω 也是系统(1)的正向不变集,原因如下:

假设 $V(X(t))$ 在 Γ_1 上的 $P_0(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3,\vec{x}_4,\vec{x}_5)$ 达到它的最大值. 因为 $\Gamma_1\subset\Omega$,对于 Ω 上的任何点,当 $X(t)\neq P_0$ 时,有 $\dot{V}(X(t))<0$,因此系统(1)的任何轨线 $X(t)(X(t)\neq P_0)$ 将进入 Ω 内. 当 $X(t)=P_0$ 时,由连续定理, $X(t)$ 将进入 Ω 内. 总结以上几种情况,推断出 Ω 是系统(1)的正向不变集,所以 Ω 是系统(1)的最终有界集和正向不变集.

定理证毕.

2.6 微分同胚和拓扑等价

由于系统(1)和 Lorenz 系统、Chen 系统和 Lü 系统之间的维数不同,因此它们之间不存在同胚变换,故系统(1)与这三个系统均不是拓扑等价的.

3 吸引子的界在同步之中的应用

式(8)为驱动系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + 4x_2y_1 + 4y_2z \\ \dot{x}_2 = -9x_2 + 3x_1y_1 \\ \dot{y}_1 = -7x_1x_2 - 5y_1 + d \\ \dot{y}_2 = -x_1z - 5y_2 \\ \dot{z} = -3x_1y_2 - z \end{cases} \quad (8)$$

响应系统为:

$$\begin{cases} \dot{x}_3 = -2x_3 + 4x_4y_3 + 4y_4z_1 + u_1 \\ \dot{x}_4 = -9x_4 + 3x_3y_3 + u_2 \\ \dot{y}_3 = -5y_3 - 7x_3x_4 + d \\ \dot{y}_4 = -5y_4 - x_3z_1 + u_4 \\ \dot{z}_1 = -3x_3y_4 - z_1 + u_5 \end{cases} \quad (9)$$

这里, $u_1=0, u_2=-7y_1(x_3-x_1), u_3=3x_2(x_3-x_1)-k_1(y_3-y_1), u_4=-3z(x_3-x_1), u_5=-y_2(x_3-x_1)-k_2(z_1-z)$ 为控制向量. 从定理1可以得到 $|x_1| \leq R, |x_2| \leq R, |y_1| \leq R, |y_2| \leq R, |z| \leq R$.

定理2 当控制系数满足 $k_1 > \frac{4R^2}{9} - 5, k_2 > \frac{4R^2}{5} - 1$ 时, 驱动系统(8)能和响应系统(9)达到完全同步.

证明 令误差向量为 $e_1 = x_3 - x_1, e_2 = x_4 - x_2, e_3 = y_3 - y_1, e_4 = y_4 - y_2, e_5 = z_1 - z$; 则误差系统为:

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -2e_1 + 4x_2e_3 + 4y_1e_2 + 4e_2e_3 + 4y_2e_5 + 4ze_4 + 4e_4e_5 + u_1 \\ \dot{e}_2 = -9e_2 + 3x_1e_3 + 3y_1e_1 + 3e_1e_3 + u_2 \\ \dot{e}_3 = -5e_3 - 7x_1e_2 - 7x_2e_1 - 7e_1e_2 + u_3 \\ \dot{e}_4 = -5e_4 - x_1e_5 - e_1z - e_1e_5 + u_4 \\ \dot{e}_5 = -e_5 - 3x_1e_4 - 3e_1y_2 - 3e_1e_4 + u_5 \end{cases} \quad (10)$$

选择李雅普函数 $V = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2 + e_5^2$, 沿着系统(10)的轨线对时间 t 求导可以得到:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2e_1 \dot{e}_1 + 2e_2 \dot{e}_2 + 2e_3 \dot{e}_3 + 2e_4 \dot{e}_4 + 2e_5 \dot{e}_5 = \\ &e_1(-2e_1 + 4x_2e_3 + 4y_1e_2 + 4e_2e_3 + 4y_2e_5 + 4ze_4 + 4e_4e_5 + u_1) + \\ &e_2(-9e_2 + 3x_1e_3 + 3y_1e_1 + 3e_1e_3 + u_2) + e_3(-5e_3 - 7x_1e_2 - 7x_2e_1 - 7e_1e_2 + u_3) + \\ &e_4(-5e_4 - x_1e_5 - e_1z - e_1e_5 + u_4) + e_5(-e_5 - 3x_1e_4 - 3e_1y_2 - 3e_1e_4 + u_5) = \\ &-2e_1^2 - 9e_2^2 - 5(1+k_1)e_3^2 - 5e_4^2 - (1+k_2)e_5^2 + 7y_1e_1e_2 + y_2e_1e_5 + 3ze_1e_4 - 4x_1e_3e_2 - \\ &3x_2e_3e_1 - 4x_1e_4e_5 + e_2u_2 + e_3u_3 + e_4u_4 + e_5u_5 = \\ &-2e_1^2 - 9e_2^2 - 5(1+k_1)e_3^2 - 5e_4^2 - (1+k_2)e_5^2 - 4x_1e_3e_2 - 4x_1e_4e_5 \leq \\ &-2e_1^2 - 9e_2^2 - 5(1+k_1)e_3^2 - 5e_4^2 - (1+k_2)e_5^2 + 4R|e_2| + |e_3| + 4R|e_4| + |e_5| = -X^T P X \end{aligned}$$

这里:

$$X = (\|e_1\|, \|e_2\|, \|e_3\|, \|e_4\|, \|e_5\|)^T$$

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -2R & 0 & 0 \\ 0 & -2R & 5+k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -2R \\ 0 & 0 & 0 & -2R & k_2+1 \end{bmatrix}$$

为保证误差系统(10)的原点为渐进稳定, 矩阵 P 必须为正定矩阵, 也就是说矩阵 P 必须满足下列条件:

i) $9(k_1 + 5) - 4R^2 > 0$; ii) $[9(k_1 + 5) - 4R^2][10(1 + k_2) - 8R^2] > 0$.

显然,当 $k_1 > \frac{4R^2}{9} - 5, k_2 > \frac{4R^2}{5} - 1$ 时,条件 i) ii) 得到满足,误差系统(10)的原点为渐进稳定,驱动系统(8)和响应系统(9)能达到完全同步.

4 数值模拟

取参数 $d = 30^{[7]}$,系统(1)的混沌吸引子估计在各个三维坐标系中的投影相图,如图 3 所示. 驱动系统(8)和响应系统(9)的初始条件分别取为 $(0.2; 2; 0.5; 0.9; 0.2)$ 和 $(1; 1.8; 0.9; 0.3; 0.3)$,这时可以由定理 1 得到 $R = \frac{d}{4} = 7.5$. 由定理 2 知,当 $k_1 > \frac{4R^2}{9} - 5 = 20, k_2 > \frac{4R^2}{5} - 1 = 44$ 时,驱动系统(8)和响应系统(9)达到完全同步. 取控制系数 $k_1 = 25, k_2 = 50$,驱动系统(8)和响应系统(9)同步效果图如图 4 所示. 取时间 $t = 250$ s,系统(1)的各个变量演化的波形图如图 5 所示.

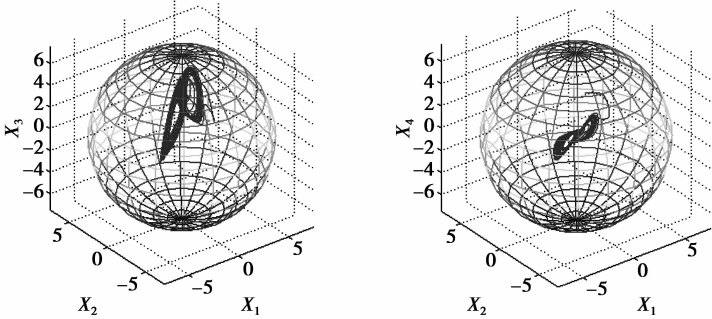


图 3 系统(1)的混沌吸引子在三维坐标系中投影的球估计相图

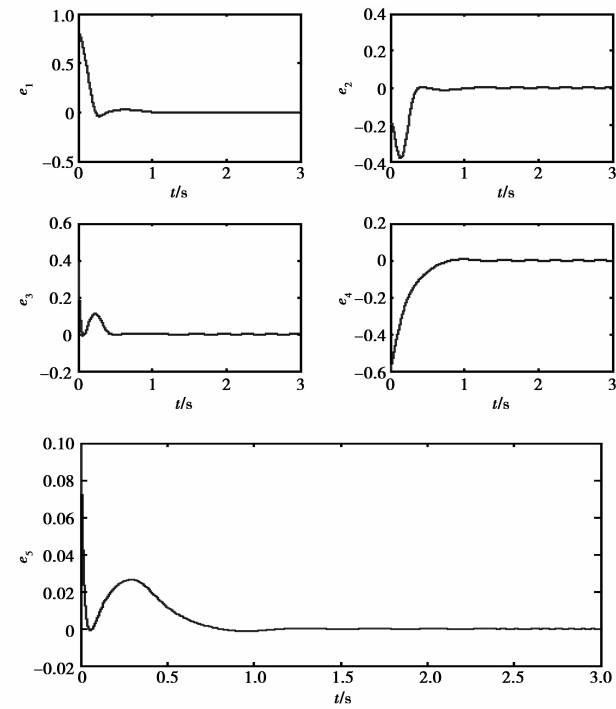


图 4 反馈控制下两个系统的同步误差

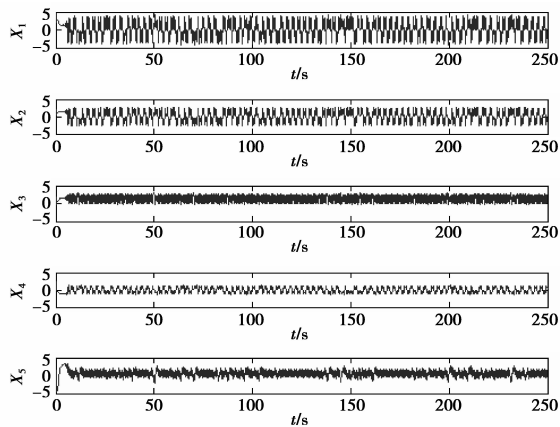


图 5 时间序列下的系统(1)的各个变量的演化图

5 结 论

研究了一个新的不同于 Lorenz 系统、Chen 系统和 Lü 系统、Qi 系统的五维自治混沌系统,系统有 1 个参数,6 个非线性乘积项. 通过理论推导、数值仿真、数值计算、同步图、分岔图、研究了该混沌系统的基本动力学特性,并分析了该系统混沌吸引子界的范围,验证了系统丰富的混沌特性. 该系统对于混沌在信息加密中具有重要的应用价值.

参考文献:

[1] LI D, LU J A, WU X Q, et al. Estimating the ultimate bound and positively invariant set for the Lorenz system and a unified chaotic system [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2006, 323 (2): 844-853

[2] ZHANG F C, SHU Y L, YANG H L. Bounds for a new chaotic system and its application in chaos synchronization. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 2011, 16(3): 1501-1508

[3] LIAO X. On the global basin of attraction and positively invariant set for the Lorenz chaotic system and its application in chaos control and synchronization [J]. Sci China ser E, 2004, 34: 1404-1419

[4] BOICHENKO V A, LEONOV G A. Dimension theory for ordinary differential equations[M]. Wiesbaden: Teubner Verlag, 2005

[5] 廖晓昕, 罗海庚, 傅予力, 等. 论 Lorenz 系统族的全局指数吸引集和正向不变集[J]. 中国科学, 2007, 37: 757-769

[6] WANG P, LI D M, HU Q L. Bounds of the hyper-chaotic Lorenz-Stenflo sys -tem[J]. Communications in Nonlinear Science and Numeical Simulations, 2010, 15(9): 2514-2520

[7] 高普云. 非线性动力学—分叉混沌与孤立子[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 2005

The Ultimate Bound Set and Positively Invariant Set for a Multi-dimension Chaotic System and Its Application in Chaos Synchronization

LONG Jian-sheng¹ , SHU Yong-lu¹ , YANG Hong-liang²

(1. College of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing 400044, China;
2. School of Information, Linyi University, Shandong Linyi 276005, China)

Abstract: We have studied a five-dimension autonomous chaotic system which is different from the Lorenz system, Chen system, Lü system, T system and Qi system. The system has one parameter and six non-linear product terms. For this system, we derive a bound estimation for five-dimensional ellipsoidal ultimate bound set and positively invariant set. Finally, the result is applied to the chaos synchronization. Numerical simulations are presented to show the effectiveness of the proposed scheme.

Key words: chaotic system; bifurcation diagram; chaotic attractor; synchronization; numerical simulations

责任编辑:李翠薇