文章编号:1672-058X(2011)03-0284-05

运用统一强度理论分析预应力组合圆筒分层半径和过盈量

敖文刚,王　歆
(重庆工商大学 机械工程学院,重庆 400067)

摘　要:运用双剪统一强度理论,考虑拉、压异性和中间主应力的影响,对受工作内压作用时预应力组合模具的分层半径和过盈量进行了详细的分析,得到了计算组合圆筒分层半径和过盈量计算的表达式。分析结果表明:分层半径只跟组合圆筒内外径相关,与运用的强度理论和材料特性没有关系;过盈量不但与组合圆筒内外径相关,同时与运用的强度理论和材料特性也有关系。

关键词:预应力组合模具;统一强度理论;分层半径;过盈量;屈服准则
中图分类号:TH721　　文献标志码:A

模具寿命是冷锻成形工艺的关键问题之一,增加模具强度就能显著地提高模具寿命。模具的强度提高通常是采用预应力组合模具结构,它是利用双层或多层厚壁圆筒过盈配合所产生的预应力来达到的。如何确定预应力组合模具的分层半径和过盈量是组合圆筒分析的重要问题,对此的一个基本原则就是要提高组合圆筒内外筒(预应力圈和凹模)同时达到弹性极限的取值。在弹性力学中,对组合厚壁圆筒的分析一般情况下采用了Tresca屈服准则,但是Tresca屈服准则不考虑材料拉压异性和中间应力对材料屈服的影响,所以Tresca屈服准则只能使用于拉压强度相等且$\tau_S=0.5\sigma_S$的材料,运用统一强度理论进行分析的结果对其他材料均可适用。

1　统一强度理论

双剪统一强度理论[1]定义为:当作用于双剪单元体上的两个较大剪应力及其相应的正应力函数达到某一极限值时,材料开始发生破坏。双剪统一强度理论在主应力空间的数学表达式为

$$f=\sigma_1-\frac{\alpha}{1+b}(b\sigma_2+\sigma_3)=\sigma_t\qquad\left(\text{当 }\sigma_2\leqslant\frac{\sigma_1+\alpha\sigma_3}{1+\alpha}\text{ 时}\right)\tag{1}$$

$$f'=\frac{1}{1+b}(\sigma_1+b\sigma_2)-\alpha\sigma_3=\sigma_t\qquad\left(\text{当 }\sigma_2\geqslant\frac{\sigma_1+\alpha\sigma_3}{1+\alpha}\text{ 时}\right)\tag{2}$$

式中参数$\alpha=\dfrac{\sigma_t}{\sigma_c}$为材料拉伸强度极限$\sigma_t$和压缩强度极限$\sigma_c$之比,参数$b=\dfrac{(1+\alpha)\tau_b-\sigma_t}{\sigma_t-\tau_b}$为中间应力影响因素。

2　组合厚壁圆筒分析

圆筒的外径R与内径r之比$\dfrac{R}{r}>1.2$时,称为厚壁圆筒,它的几何形状对称于中心轴,且沿筒体轴向无变化,当圆筒的荷载分布对称于中心轴,并沿轴向无变化,则它是平面轴对称问题。在工程中,柱形压力容

收稿日期:2010-10-17;修回日期:2010-11-20.
作者简介:敖文刚(1976-),男,重庆人,讲师,从事工程力学研究.

器的筒体、汽缸、套环、冷挤压用的凹模、以及涵管与火炮的身管等,都可以简化为厚壁圆筒。当圆筒内外径都确定的情况下,可采用组合厚壁圆筒可提高圆筒的承载能力。本文所讨论的组合圆筒就可看成是组合凹模的简化模型,凹模简化为内筒,预应力圈简化为外筒。

2.1 厚壁圆筒弹性分析

结构荷载较小时,圆筒处于弹性状态,对厚壁圆筒的讨论将从弹性分析开始。在进行分析时,采用极坐标(ρ,θ)表示各分量。由于轴对称性,$\tau_{\rho\theta}=0$,径向应力与切向应力仅是ρ的函数,即$\sigma_{\theta(\rho)}$和$\sigma_{\rho(\rho)}$。对外径为R,内径为r的厚壁圆筒,在内压p_1和外压p_2的作用下,通过应力法进行弹性分析可以得到其应力分量为[4]:

$$\sigma_r=\frac{R^2r^2(p_2-p_1)}{(R^2-r^2)\rho^2}+\frac{r^2p_1-R^2p_2}{R^2-r^2} \tag{3}$$

$$\sigma_\theta=-\frac{R^2r^2(p_2-p_1)}{(R^2-r^2)\rho^2}+\frac{r^2p_1-R^2p_2}{R^2-r^2} \tag{4}$$

这就是拉梅公式,它和弹性常数无关,可以适用于两类平面问题。这里可以考虑两种均压作用下的结果。

(1) 只有均匀内压p_1,即$p_2=0$,应力分量为:

$$\sigma_r=\frac{r^2p_1}{R^2-r^2}\left(1-\frac{R^2}{\rho^2}\right) \tag{5}$$

$$\sigma_\theta=\frac{r^2p_1}{R^2-r^2}\left(1+\frac{R^2}{\rho^2}\right) \tag{6}$$

(2) 只有均匀外压p_2,即$p_1=0$,应力分量为:

$$\sigma_r=-\frac{R^2p_2}{R^2-r^2}\left(1-\frac{r^2}{\rho^2}\right) \tag{7}$$

$$\sigma_\theta=-\frac{R^2p_2}{R^2-r^2}\left(1+\frac{r^2}{\rho^2}\right) \tag{8}$$

2.2 运用统一强度理论确定厚壁圆筒屈服条件

由于厚壁圆筒可以看成轴对称的平面应变问题,则有$\tau_{\rho\theta}=\tau_{\theta Z}=\tau_{Z\rho}=0$,而$\sigma_\theta$、$\sigma_Z$、$\sigma_\rho$都是主应力。对于两端刚性封闭的厚壁圆筒并考虑材料屈服时体积不变,则有$\varepsilon_Z=0$以及$\nu=0.5$,可知$\sigma_Z=0.5(\sigma_\theta+\sigma_\rho)$。根据厚壁圆筒所受的应力状态来看,有$\sigma_\theta>\sigma_Z>\sigma_\rho$。则有$\sigma_1=\sigma_\theta>0$、$\sigma_2=\sigma_z$、$\sigma_3=\sigma_\rho<0$,由于拉压比$\alpha<1$,可以求得:$\sigma_Z=\frac{\sigma_\theta+\sigma_\rho}{2}\leqslant\frac{\sigma_\theta+\alpha\sigma_\rho}{1+\alpha}$,根据式(1)有屈服条件为:

$$\sigma_\theta-\frac{\alpha}{1+b}\left(b\,\frac{\sigma_\theta+\sigma_\rho}{2}+\sigma_\rho\right)=\sigma_s \tag{9}$$

将式(9)化简为:

$$\frac{2+2b-b\alpha}{2+2b}\sigma_\theta-\frac{b\alpha+2\alpha}{2+2b}\sigma_\rho=\sigma_s \tag{10}$$

这就是统一强度理论用于厚壁圆筒而得到的判断材料屈服的条件[1]。

2.3 组合厚壁圆筒分层半径与过盈量分析

首先,设定内半径为r,外半径为R的组合圆筒是由两层圆筒套装而成,内筒的内半径为r,外半径为$r_1+\delta_1$,外筒的内半径为$r_1-\delta_2$,外半径为R,并设两圆筒材料相同。这样的内外圆筒套装后可知内外筒间会产生套装压力,根据弹性力学可得到其表达式为[4]:

$$p=\frac{E'\delta(r_1^2-r^2)(R^2-r_1^2)}{2r_1^3(R^2-r^2)} \tag{11}$$

式中$\delta=\delta_2-\delta_1$为过盈量,E'为平面应变条件下的弹性模量。在套装压力作用下,组合筒体内就会产生套装应力,它是预应力,将与筒体受均匀内压作用后产生的应力进行叠加。

在实际工程中,组合圆筒还会承受工作内压 p_1,这是已知的,而重要任务是要确定其分层半径 r_1 和过盈量 δ。考虑工作内压 p_1 和套装压力 p 的共同作用,那么引起材料屈服的应力组合 $\left(\frac{2+2b-b\alpha}{2+2b}\sigma_\theta-\frac{b\alpha+2\alpha}{2+2b}\sigma_\rho\right)$ 不仅在内筒内表面 $\rho=r$ 处可能到达临界值,而且在外筒内表面 $\rho=r_1$ 处亦可能达到临界值,甚至可能先于 $\rho=r$ 处。确定了合理的分层半径 r_1 和过盈量 δ 可以使组合圆筒到达最优的结果,即组合圆筒在 $\rho=r_1$ 处和 $\rho=r$ 处同时到达屈服。

对于内筒,在内表面($\rho=r$)作用工作内压 p_1,在外表面($\rho=r_1$)作用外压 q,且 $q=p+(\sigma_\rho)_{\rho=r_1}$,式中 p 为套装压力,$(\sigma_\rho)_{\rho=r_1}$ 是在内压作用下组合圆筒(按内径 r,外径 R 计算)的 $\rho=r_1$ 的径向应力,即 $(\sigma_\rho)_{\rho=r_1}=\frac{r^2(r_1^2-R^2)}{r_1^2(R^2-r^2)}p_1$,对于外筒,在内表面($\rho=r_1$)作用内压 q,外表面($\rho=R$)是自由边界。内筒在内表面($\rho=r$)的应力组合 $\left(\frac{2+2b-b\alpha}{2+2b}\sigma_\theta-\frac{b\alpha+2\alpha}{2+2b}\sigma_\rho\right)$,由式(3)(4)可得:

$$\left(\frac{2+2b-b\alpha}{2+2b}\sigma_\theta-\frac{b\alpha+2\alpha}{2+2b}\sigma_\rho\right)_{\rho=r}=\frac{2+2b-b\alpha}{2+2b}\left[\frac{(r_1^2+r^2)p_1-2r_1^2q}{(r_1^2-r^2)}\right]+\frac{b\alpha+2\alpha}{2+2b}p_1$$

外筒在内表面($\rho=r_1$)的应力组合 $\left(\frac{2+2b-b\alpha}{2+2b}\sigma_\theta-\frac{b\alpha+2\alpha}{2+2b}\sigma_\rho\right)$,由式(5)(6)可得:

$$\left(\frac{2+2b-b\alpha}{2+2b}\sigma_\theta-\frac{b\alpha+2\alpha}{2+2b}\sigma_\rho\right)_{\rho=r_1}=\frac{(2+2b-b\alpha)(R^2+r_1^2)}{(2+2b)(R^2-r_1^2)}q+\frac{b\alpha+2\alpha}{2+2b}q$$

为了得到最优结果有:

$$\left(\frac{2+2b-b\alpha}{2+2b}\sigma_\theta-\frac{b\alpha+2\alpha}{2+2b}\sigma_\rho\right)_{\rho=r}=\left(\frac{2+2b-b\alpha}{2+2b}\sigma_\theta-\frac{b\alpha+2\alpha}{2+2b}\sigma_\rho\right)_{\rho=r_1}$$

则可求得:

$$q=\frac{(R^2-r_1^2)[mr_1^2+nr^2]}{lR^2r_1^2-nr_1^2r^2-m(R^2r^2+r_1^4)}p_1 \tag{12}$$

式中 $l=6+6b+2\alpha-2b\alpha$,$m=2+2b+2\alpha$,$n=2+2b-2b\alpha-2\alpha$。

为使内外圆筒在内表面有较小的应力组合 $\left(\frac{2+2b-b\alpha}{2+2b}\sigma_\theta-\frac{b\alpha+2\alpha}{2+2b}\sigma_\rho\right)$,即提高组合圆筒同时产生屈服的承载能力,在 r 和 R 不变的情况下,调节 r_1,将此应力组合表达为函数:

$$f_{(r_1)}=\left(\frac{2+2b-b\alpha}{2+2b}\sigma_\theta-\frac{b\alpha+2\alpha}{2+2b}\sigma_\rho\right)_{\rho=r}=\left(\frac{2+2b-b\alpha}{2+2b}\sigma_\theta-\frac{b\alpha+2\alpha}{2+2b}\sigma_\rho\right)_{\rho=r1}$$

有:

$$f_{(r_1)}=\frac{(mR^2+nr_1^2)(mr_1^2+nr^2)}{(2+2b)[lR^2r_1^2-nr_1^2r^2-m(R^2r^2+r_1^4)]}p_1$$

则可由 $\frac{\partial f}{\partial r_1}=0$ 推出当 $f_{(r_1)}$ 最小时的 r_1 取值,得到:

$$r_1=\sqrt{Rr} \tag{13}$$

这说明分层半径 r_1 只与组合圆筒的内外径相关,与材料的特性无关,进而与选用什么样强度理论来作为屈服条件也是无关的,此结果于运用弹性力学中运用 *Tresca* 屈服准则分析的结果相同。将此结果代入式(12),可得到应力组合 $\left(\frac{2+2b-b\alpha}{2+2b}\sigma_\theta-\frac{b\alpha+2\alpha}{2+2b}\sigma_\rho\right)$ 取最小时,q 为:$q=\frac{(R-r)(mR+nr)}{lR^2-nr^2-2mRr}p_1$. 则此时对应的工作内压 p_1 为:

$$p_1=\frac{(2+2b)(LR^2-nr^2-2mRr)}{(mR+nr)^2}\sigma_S \tag{14}$$

此时的套装压力 $p=q-(\sigma_\rho)_{\rho=r_1}$ 可计算得到:

$$p=\frac{mR^3+(n-l)R^2r+mRr^2}{(R+r)(lR^2-nr^2-2mRr)}p_1 \tag{15}$$

根据套装压力与过盈量的关系，把式(13)(15)代入式(11)，可得到:

$$\delta = \frac{mR^3 + (n-l)R^2r + mRr^2}{lR^3 - (2m+l)rR^2 + (2m-n)r^2R - nr^3}\frac{2\sqrt{Rr}}{E'}p_1 \tag{16}$$

说明过盈量不仅与组合圆筒的内外径相关，也与材料的特性相关，进而与选用什么样强度理论来作为屈服条件相关。当 $\alpha=1$ 时，有 $l=8+4b$，$m=4+2b=0.5l$，$n=0$，则 $\delta=\frac{\sqrt{Rr}}{E'}p_1$，由此可以看出对拉压同性的材料，中间应力系数对过盈量没有影响。

但在 $\alpha\neq1$ 时，过盈量 δ 的计算应该按式(16)计算，必须考虑参数 b 和组合圆筒内外径的综合影响。假设 $R=2r$ 和 $R=3r$ 的情况下，分别取 $\alpha=0.8$、0.6、0.4、$b=1$、0.5、0 时，计算过盈量 δ 的值，得到表1、表2所示的结果。

表1　$R=2r$ 时过盈量 δ 的取值

α	0.8	0.6	0.4
1	$\delta=0.966\frac{\sqrt{Rr}}{E'}p_1$	$\delta=0.9286\frac{\sqrt{Rr}}{E'}p_1$	$\delta=0.8888\frac{\sqrt{Rr}}{E'}p_1$
0.5	$\delta=0.968\frac{\sqrt{Rr}}{E'}p_1$	$\delta=0.9333\frac{\sqrt{Rr}}{E'}p_1$	$\delta=0.8941\frac{\sqrt{Rr}}{E'}p_1$
0	$\delta=0.973\frac{\sqrt{Rr}}{E'}p_1$	$\delta=0.9412\frac{\sqrt{Rr}}{E'}p_1$	$\delta=0.9032\frac{\sqrt{Rr}}{E'}p_1$

表2　$R=3r$ 时过盈量 δ 的取值

α	0.8	0.6	0.4
1	$\delta=0.9231\frac{\sqrt{Rr}}{E'}p_1$	$\delta=0.8465\frac{\sqrt{Rr}}{E'}p_1$	$\delta=0.7742\frac{\sqrt{Rr}}{E'}p_1$
0.5	$\delta=0.9293\frac{\sqrt{Rr}}{E'}p_1$	$\delta=0.8571\frac{\sqrt{Rr}}{E'}p_1$	$\delta=0.7835\frac{\sqrt{Rr}}{E'}p_1$
0	$\delta=0.9391\frac{\sqrt{Rr}}{E'}p_1$	$\delta=0.8727\frac{\sqrt{Rr}}{E'}p_1$	$\delta=0.8\frac{\sqrt{Rr}}{E'}p_1$

3　实例分析

一转子毛坯挤压组合凹模，内径为25 mm、外径为125 mm，凹模材料的弹性系数为200 GPa，凹模工作内压为1 900 MPa，设计此组合凹模的分层半径和过盈量[2]。取 $\alpha=1$，$b=\frac{1}{1+\sqrt{3}}$，相当于运用 Mises 屈服准则，通过上述推导的公式(13)、(14)、(16)可以计算出分层半径 $r_1=55.9$ mm、材料许用应力 $\sigma_5=2\ 100$ MPa、过盈量 $\delta=0.4141$ mm。根据以上结果，使用 Ansys(运用 Mises 屈服准则)软件对此问题进行了分析，得结果(图1、图2)。

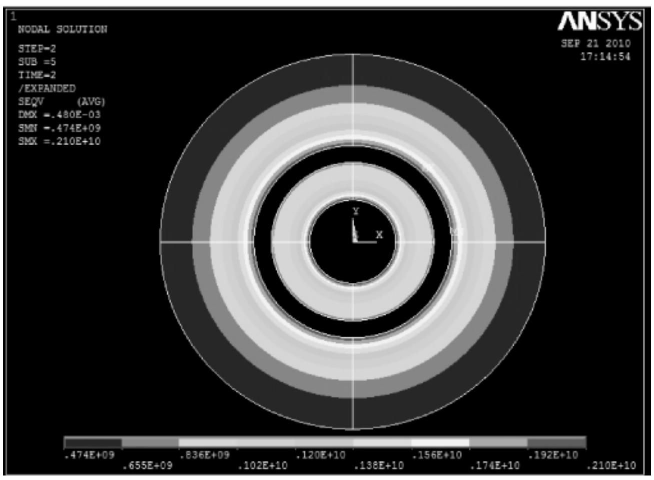

图1　组合凹模 Mises 等效应力云图

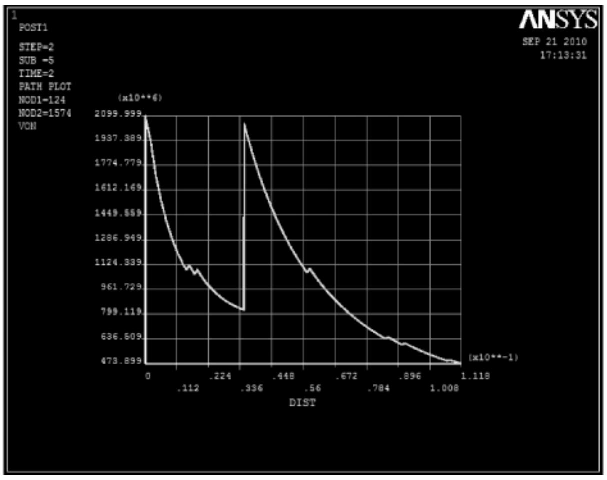

图2　组合凹模 Mises 等效应力曲线

从上述分析可以看出，根据公式计算出来的分层半径、材料许用应力、过盈量可使凹模和预应力圈同时达到材料的许用应力，最大程度的发挥了预应力圈和凹模材料的强度潜能。

4 结 论

运用统一强度理论来分析的组合圆筒的分层半径 $r_1 = \sqrt{Rr}$,它仅与组合圆筒的内外径相关,而与材料的特性无关,所以分层半径计算是组合圆筒自身确定的,与屈服条件的选择无关。用统一强度理论来分析的组合圆筒的过盈量不仅与组合圆筒的内外径相关,也与材料的特性相关,所以过盈量 δ 的计算不仅考虑组合圆筒的内外径尺寸,还要根据材料特性考虑屈服条件的选择。

当 $\alpha = 1$ 时,有 $l = 8 + 4b = 2m$,$n = 0$,则无论 b 取什么值都有 $\delta = \frac{\sqrt{Rr}}{E'} p_1$,这表明拉压同性的材料可以不用考虑参数 b 的影响。当 $\alpha \neq 1$ 时,过盈量 δ 的计算应该按式(16)计算,考虑参数 b 和组合圆筒内外径的综合影响。通过计算可发现:过盈量 δ 随着 $\frac{R}{r}$ 增加而减小,过盈量 δ 随着 α 减小而减小;而在 α 确定的情况下,δ 随着 b 减小而增大。

参考文献:

[1] 俞茂宏. 工程强度理论[M]. 北京:高等教育出版社,1997.
[2] 高汉华. 转子挤压组合凹模的应力分析[J]. 模具技术,2006,23(1):33-35
[3] 敖文刚. 双剪统一强度理论在厚壁圆筒分析中的应用[J]. 模具工业,2007,33(8):28-31
[4] 徐秉业,刘信声. 应用弹塑性力学[M]. 北京:清华大学出版社,1995.

Application of Unified Strength Theory to Analysis of Separate Radius and Shrinkrange of Prestressed Combination Tubes

AO Wen-gang, WANG Xin

(School of Mechanical Engineering, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

Abstract: Based on unified strength theory, difference in tension and compression in strength as well as the influence of intermediate principle stress, the separate radius and shrinkrange of prestressed combination die with internal working pressure are in detail analyzed, and a formulae for calculating the separate radius and shrinkrange is obtained. Analysis results show that separate radius is only related to the inside radius and outer radius of combination tubes and is irrelative to applied strength theory and material characteristics and that the shrinkrange is not only related to inside radius and outer radius of combination tubes but also is related to applied strength theory and material characteristics.

Key words: prestressed combination die; unified strength theory; separate radius; shrinkrange; yield criterion

责任编辑:李翠薇
校 对:田 静