第 28 卷第 3 期 重庆工商大学学报(自然科学版) 2011 年 6 月
Vol. 28 NO. 3 J Chongqing Technol Business Univ. (Nat Sci Ed) Jun. 2011

文章编号:1672 - 058X(2011)03 - 0265 - 03

随机利率下的 n 年家庭收入保险

蔡井伟
(江苏农林职业技术学院 基础部,江苏 镇江 212400)

摘 要:采用维纳过程对利息力累积函数建模,研究了连续支付的 n 年家庭收入保险现值的期望值在 3 种特殊的死亡假设下得到了现值期望值的具体表达式。

关键词:随机利率; 家庭收入保险; 维纳过程; 现值
中图分类号:O211.6;F840.6 **文献标志码:** A

常规的年金都是以人的生存为给付条件,按预先约定金额进行一系列给付的寿险保障问题所采用的利率是确定的利率由于现实的利率和人的生命都是随机的(双随机),所以有必要在随机的利率、随机的死亡率假设下来研究年金问题,随机利率下年金的研究已经越来越成为精算领域的重要课题[1-4],这些成果都以离散型为研究对象谢杰华研究了随机利率下的连续型生存年金[5],但这种年金是以人的生存为给付条件的此处突破以人的生存为给付条件的限制,在双随机模型下研究了 n 年家庭收入保险,给出了 n 年家庭收入保险现值的期望值,并且在 3 种特殊的死亡假设下给出了现值期望值的具体表达式。

1 随机利率下 n 年家庭收入保险的现值

$T(x)$ 表示一个年龄 x 岁的人的未来余命,$T(x)$ 的分布函数记为 $F_T(t) = Pr(T(x) \leqslant t)$,$T(x)$ 的概率密度函数记为 $f_T(t)$ 记 $\delta(t)$ 为时刻 t 的利息力,$y(t) = \int_0^t \delta(s)\,\mathrm{d}s$ 表示时刻 t 的利息力累积函数,假设 $y(t)$ 是独立于 $T(x)$ 的随机过程。

n 年家庭收入保险是指当被保险人在 n 年内死亡时开始提供年金给付,直至第 n 年的一种特殊年金假设连续给付年支付额为 1,则 n 年家庭收入保险的现值 Y 为:

$$Y = \begin{cases} \mathrm{e}^{-y(T)} \cdot \int_T^n \mathrm{e}^{-y(t)}\,\mathrm{d}t & (T(x) \leqslant n) \\ 0 & (T(x) > n) \end{cases} \tag{1}$$

2 n 年家庭收入保险现值的期望值

对利息力累积函数采用 wiener 过程建模,即假设:

$$y(t) = \delta t + \sigma W_t \tag{2}$$

其中 δ 是常数利息力,σ 是常数,$\sigma \geqslant 0$,W_t 是标准的 wiener 过程,$W_t N(0,t)$

为了便于定理的证明,给出如下的结论[6](证明见文献 6):在式(1)模型下,有 $E[\mathrm{e}^{-y(t)}] = \mathrm{e}^{-\delta t + \frac{\sigma^2 t}{2}}$,$E[\mathrm{e}^{-y(t)-y(s)}] = \mathrm{e}^{-\delta(s+t) + \frac{\sigma^2}{2}(s+t+2\min(s,t))}$.

收稿日期:2010 - 05 - 10;修回日期:2010 - 12 - 28.
作者简介:蔡井伟(1976 -),男,讲师,硕士研究生,从事保险精算与决策分析研究.

研究n年家庭收入保险,得到了连续支付给付额为1的n年家庭收入保险现值的期望值。

定理1 利息力累积函数采用wiener过程建模,即设$y(t)=\delta t+\sigma W_t$,其中δ为常数利息力,σ是常数,$\sigma\geqslant 0$,那么对于连续支付给付额为1的n年家庭收入保险的现值Y的期望值有表达式:

$$E[Y]=\int_0^n \frac{e^{(\frac{1}{2}\sigma^2-\delta)n+(\frac{3}{2}\sigma^2-\delta)t}-e^{(2\sigma^2-2\delta)t}}{\frac{1}{2}\sigma^2-\delta}\cdot f_T(t)\,dt$$

证明 由于$y(t)$独立于$T(x)$,因此,有条件概率:

$$E[Y\mid T(x)=t\leqslant n]=E\left[e^{-y(T)}\cdot\int_T^n e^{-y(s)}ds\mid T(x)=t\leqslant n\right]=$$

$$E\left[\int_t^n e^{-(y(s)+y(t))}ds\right]=\int_t^n E\left[e^{-(y(s)+y(t))}\right]ds=\int_t^n e^{-\delta(s+t)+\frac{1}{2}\sigma^2(s+t+2\min(s,t))}ds=$$

$$\int_t^n e^{-\delta(s+t)+\frac{1}{2}\sigma^2(s+3t)}ds=\frac{e^{(\frac{1}{2}\sigma^2-\delta)n+(\frac{3}{2}\sigma^2-\delta)t}-e^{(2\sigma^2-2\delta)t}}{\frac{1}{2}\sigma^2-\delta}$$

$$E[Y]=\int_0^n E[Y\mid T(x)=t\leqslant n]\cdot f_T(t)\,dt=\int_0^n \frac{e^{(\frac{1}{2}\sigma^2-\delta)n+(\frac{3}{2}\sigma^2-\delta)t}-e^{(2\sigma^2-2\delta)t}}{\frac{1}{2}\sigma^2-\delta}\cdot f_T(t)\,dt$$

3 特殊死亡假设下现值期望值的表达式

在精算学3种常见的死亡精算假设下,给出上述定理的具体表达式:

(1) 死亡满足de moivre假设,假定$0<t<\omega-x$时,$f_T(t)=\frac{1}{\omega-x}$,其他情况下,$f_T(t)=0$,其中$\omega$为极大年龄,则有结果:

$$E[Y]=\int_0^n\left(\frac{e^{(\frac{1}{2}\sigma^2-\delta)n+(\frac{3}{2}\sigma^2-\delta)t}-e^{(2\sigma^2-2\delta)t}}{\frac{1}{2}\sigma^2-\delta}\right)\cdot\frac{1}{\omega-x}dt=$$

$$\frac{e^{(2\sigma^2-2\delta)n}-e^{(\frac{1}{2}\sigma^2-\delta)n}}{(\omega-x)(\frac{1}{2}\sigma^2-\delta)\left(\frac{3}{2}\sigma^2-\delta\right)}-\frac{e^{(2\sigma^2-2\delta)n}-1}{(\omega-x)\left(\frac{1}{2}\sigma^2-\delta\right)(2\sigma^2-2\delta)}=$$

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\sigma^2-\delta\right)e^{(2\sigma^2-2\delta)n}-(2\sigma^2-2\delta)e^{(\frac{1}{2}\sigma^2-\delta)n}+\left(\frac{3}{2}\sigma^2-\delta\right)}{(\omega-x)\left(\frac{1}{2}\sigma^2-\delta\right)\left(\frac{3}{2}\sigma^2-\delta\right)(2\sigma^2-2\delta)}$$

(2) 假设死亡满足指数分布假设,假定$f_T(t)=\lambda e^{-\lambda t}$,其中$t\in[0,\infty)$,$\lambda>0$,有:

$$E[Y]=\int_0^n\frac{e^{(\frac{1}{2}\sigma^2-\delta)n+(\frac{3}{2}\sigma^2-\delta)t}-e^{(2\sigma^2-2\delta)t}}{\frac{1}{2}\sigma^2-\delta}\cdot\lambda e^{-\lambda t}dt=$$

$$\frac{\lambda}{\frac{1}{2}\sigma^2-\delta}\left(\frac{e^{(2\sigma^2-2\delta-\lambda)n}-e^{(\frac{1}{2}\sigma^2-\delta)n}}{\frac{3}{2}\sigma^2-\delta-\lambda}-\frac{e^{(2\sigma^2-2\delta-\lambda)n}-1}{2\sigma^2-2\delta-\lambda}\right)=$$

$$\frac{\lambda\left(\left(\frac{1}{2}\sigma^2-\delta\right)e^{(2\sigma^2-2\delta-\lambda)n}-(2\sigma^2-2\delta-\lambda)e^{(\frac{1}{2}\sigma^2-\delta)n}+\left(\frac{3}{2}\sigma^2-\delta-\lambda\right)\right)}{\left(\frac{1}{2}\sigma^2-\delta\right)\left(\frac{3}{2}\sigma^2-\delta-\lambda\right)(2\sigma^2-2\delta-\lambda)}$$

(3) 死亡满足年度均匀分布假设,即假定在每个保单年度内死亡是均匀发生的,$[0,\infty)=\bigcup_{j=0}^{\infty}[j,j+1)$,

则在每个 $[j, j+1)$ 上，$T(x)$ 服从均匀分布，所以有 $f_T(t) = \sum_{j=0}^{\infty} I_{[j,j+1)}(t) \cdot {}_jp_x q_{x+j}$ 其中，$I_{[j,j+1)}(t)$ 是示性函数，q_x 表示 x 岁的人将在未来一年内死亡的概率，${}_jp_x$ 表示 x 岁的人在 $(x+j)$ 岁仍将活着的概率。

$$E[Y] = \sum_{j=0}^{n-1} \int_j^{j+1} \frac{e^{(\frac{1}{2}\sigma^2-\delta)n+(\frac{3}{2}\sigma^2-\delta)t} - e^{(2\sigma^2-2\delta)t}}{\frac{1}{2}\sigma^2-\delta} \cdot f_T(t)\,dt =$$

$$\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{{}_jp_x \cdot q_{x+j}}{\frac{1}{2}\sigma^2-\delta} \cdot \left(\frac{e^{(\frac{1}{2}\sigma^2-\delta)n} \cdot (e^{(\frac{3}{2}\sigma^2-\delta)(j+1)} - e^{(\frac{3}{2}\sigma^2-\delta)j})}{\frac{3}{2}\sigma^2-\delta} - \frac{e^{(2\sigma^2-2\delta)(j+1)} - e^{(2\sigma^2-2\delta)j}}{2\sigma^2-2\delta}\right)\right)$$

4 结　语

在寿险业实际使用的保险业务上建立模型，对其进行研究具有很现实的意义。可为寿险精算师对该业务的定价、责任准备金的计算等提供理论、技术上的支持。有了现代计算机强大的计算功能，计算特殊死亡假设下这类年金的现值不成问题。

参考文献：

[1] BEEKMAN J A, FUELLING C P. Interest and mortality randomness in some annuities [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 1990(9): 185-196

[2] HE W J, ZHANG Y. Dual random model of increasing annuity [J]. Appl Math J Chinese Univ Ser B, 2001, 16(4): 430-438

[3] 高建伟，邱菀华. 随机利率下的生存年金模型 [J]. 系统工程理论与实践，2002(6): 97-100

[4] 李长林，陈敏，顾勇. 随机利率下的生存年金组合精算模型 [J]. 系统工程，2007(7): 116-118

[5] 谢杰华，邹娓. 随机利率下的连续型生存年金 [J]. 经济数学，2007(9): 229-233

[6] 东明. 随机利率下的联合寿险精算模型 [J]. 系统工程，2006(4): 68-72

[7] 李秀芳. 寿险精算实务 [M]. 北京: 中国财政经济出版社，2006

Family Income Insurance in n Years under Stochastic Interest Rate

CAI Jing-wei

(Basic Course Teaching Department, Jiangsu Polytechnic College of Agriculture and Forestry, Jiangsu Zhenjiang 212400, China)

Abstract: In this paper, a model for the interest force accumulation function by Wiener process is established. Based on the model, the expectation of present value of family income insurance in n years is given, and the material expressions of the expectations of present value are given in three special mortality hypotheses.

Key words: stochastic interest rate; family income insurance; Wiener process; present value

责任编辑：李翠薇
校　　对：田　静