第28卷第3期 重庆工商大学学报(自然科学版) 2011年6月
Vol. 28 NO. 3 J Chongqing Technol Business Univ. (Nat Sci Ed) Jun. 2011

文章编号:1672－058X(2011)03－0254－04

一种优化GM(1,1)模型及其应用

何 霞,刘卫锋
(郑州航空工业管理学院 数理系,郑州 450015)

摘 要:在优化背景值的基础上,针对传统灰色GM(1,1)模型参数估计的最小二乘算法稳健性较差的情况,提出基于全最小一乘准则的灰色GM(1,1)模型参数估计算法,同时将初始条件进行优化,从而得到了一个背景值、初始条件和模型参数同时优化的灰色GM(1,1)模型.最后,应用实例说明了优化灰色GM(1,1)模型的可行性与有效性.

关键词:灰色GM(1,1)模型;参数估计;全最小一乘;背景值;初始条件
中图分类号:O122.1;N94 文献标志码:A

1 概 述

灰色GM(1,1)模型是灰色系统理论的核心内容和方法之一[1,2],目前该方法在经济、管理、社会和工程技术等多个领域得到了广泛的应用.由于灰色GM(1,1)模型本身也存在着一系列问题,因此许多学者提出了改进方法,其中,文献[3-5]通过优化背景值改进了模型,文献[6-9]通过选取和修正初值来优化模型,文献[10]通过遗传算法优化了GM(1,1)模型.但是,传统灰色GM(1,1)模型及以上优化GM(1,1)模型都使用最小二乘准则求解参数,而文献[11]研究发现使用最小二乘准则求解参数会出现严重的方程病态,从而使得模型的计算结果以及依据计算结果做出的结论的正确性和可信度大打折扣.为此,文献[12,13]利用最小一乘准则改进了求解参数的算法,从而克服了使用最小二乘准则求解参数会出现严重的方程病态的情况,提高模型的稳健性和预测精度.

在综合分析已有研究文献的基础上,采用文献[14]中的全最小一乘准则求解GM(1,1)模型参数,既克服了传统GM(1,1)模型的病态问题,也使得参数求解更加符合人们的直觉[14],同时,在此将$x^{(1)}(n)$作为初始条件,从而建立了背景值优化、全最小一乘准则参数求解和初值优化三者相结合的稳健性较好的GM(1,1)模型.此外,给出了全最小一乘准则参数求解的相应LINGO程序对初始值.最后,计算实例验证了文中优化灰色GM(1,1)模型的可行性与有效性.

2 灰色GM(1,1)模型建模机理

定义1[1,2] 设$X^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n))$是非负序列,$X^{(1)}=(x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n))$是$X^{(0)}$的1－AGO序列,其中$x^{(1)}(k)=\sum_{i=1}^{k}x^{(0)}(i)$,$k=1,2,\cdots,n$,背景值序列$Z^{(1)}=(z^{(1)}(2),z^{(1)}(3),\cdots,z^{(1)}(n))$,其中$z^{(1)}(k)=\frac{1}{2}(x^{(1)}(k)+x^{(1)}(k-1))$,$k=2,3,\cdots,n$,则称$x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b$为GM(1,1)模型的基本形式.

定理1[1,2] 设$X^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n))$是非负序列,$X^{(1)}=(x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n))$

收稿日期:2010－09－25;修回日期:2011－01－14.
作者简介:何霞(1976－),女,河南周口人,讲师,硕士,从事灰色系统理论研究.

是 $X^{(0)}$ 的 1 - AGO 序列,其中 $x^{(1)}(k)=\sum_{i=1}^{k}x^{(0)}(i)$,$k=1,2,\cdots,n$,背景值序列 $Z^{(1)}=(z^{(1)}(2),z^{(1)}(3),\cdots,z^{(1)}(n))$,其中 $z^{(1)}(k)=\frac{1}{2}(x^{(1)}(k)+x^{(1)}(k-1))$,$k=2,3,\cdots,n$,初始值为 $x^{(1)}(1)=x^{(0)}(1)$. 则:

(1) GM(1,1) 模型 $x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b$ 的最小二乘估计参数列满足 $\hat{a}=[a,b]^{\mathrm{T}}=(B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}Y$,其中 $Y=[x^{(0)}(2),x^{(0)}(3),\cdots,x^{(0)}(n)]^{\mathrm{T}}$,$B=\begin{pmatrix}-z^{(1)}(2) & -z^{(1)}(3) & \cdots & -z^{(1)}(n)\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$;

(2) 白化方程 $\frac{\mathrm{d}x^{(1)}(t)}{\mathrm{d}t}+ax^{(1)}=b$ 的解为: $x^{(1)}(t)=\left(x^{(0)}(1)-\frac{b}{a}\right)\mathrm{e}^{-a(t-1)}+\frac{b}{a}$;

(3) GM(1,1) 模型 $x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b$ 的时间响应序列为 $\hat{x}^{(1)}(k+1)=(x^{(0)}(1)-\frac{b}{a})\mathrm{e}^{-ak}+\frac{b}{a}$,$k=1,2,\cdots$;

(4) 还原值 $\hat{x}^{(0)}(k+1)=\hat{x}^{(1)}(k+1)-\hat{x}^{(0)}(k)=(1-\mathrm{e}^{a})(x^{(0)}(1)-\frac{b}{a})\mathrm{e}^{-ak}$,$k=1,2,\cdots$.

3　优化灰色 GM(1,1) 模型

由定理 1 及文献 [6] 可知,传统的梯形公式构造法 $z^{(1)}(k)=\frac{1}{2}(x^{(1)}(k)+x^{(1)}(k-1))$ 与积分式 $\int_{k-1}^{k}x^{(1)}(t)\,\mathrm{d}t$ 之间存在着误差,从而导致 GM(1,1) 模型的精度不高. 于是,文献 [6] 通过将 $x^{(1)}(t)$ 抽象为指数曲线 $x^{(1)}(t)=B\mathrm{e}^{At}$,从而得到优化的背景值 $z^{(1)}(k)=\frac{x^{(1)}(k)-x^{(1)}(k-1)}{\ln x^{(1)}(k)-\ln x^{(1)}(k-1)}$,从而提高了 GM(1,1) 模型的精度. 同时由定理 1 可知,GM(1,1) 模型的初始值为 $x^{(1)}(1)=x^{(0)}(1)$,从而导致模型的预测值与原序列中的 $x^{(0)}(1)$ 无关,这不符合最小信息原理,同时也不符合新信息优先原理. 为此文献 [9] 提出将 $x^{(1)}(n)$ 作为模型的初始值,不仅克服了 GM(1,1) 建模与 $x^{(0)}(1)$ 无关的弊端,同时更加符合新信息优先原理,使得模型的精度得到了极大的提高.

此外,从定理 1 中可以得知,传统灰色 GM(1,1) 模型的参数求解是根据最小二乘准则得到的,尽管最小二乘准则有许多优点,但是其稳健性较差,尤其是数据中出现异常点时,会对参数的求解产生较大的影响[14]. 而全最小一乘准则不仅能够较好地解决稳健性问题,而且要求点到直线的距离之和最小,为此尝试使用全最小一乘准则来作为求解 GM(1,1) 模型的参数的一种新算法. 以全最小一乘准则求灰色 GM(1,1) 模型的参数 a,b,即令: $\min=Q(a,b)=\frac{\sum_{k=2}^{n}|x^{(0)}(k)-az^{(1)}(k)-b|}{\sqrt{1+a^2}}$.

为求解上述问题,在此使用 LINGO 软件,其程序如下:

```
model:
  sets:
   LAD/1..n/:x,z;
  endsets
  data:
   x = x2,x3,…,xn; ! 此处的 x 表示原始数据 x(0)(2),x(0)(3),…,x(0)(n);
   z = z2,z3,…,zn; ! 此处的 z 表示背景值数据 z(1)(2),z(1)(3),…,z(1)(n);
  enddata
  @free(a); @free(b);
  min = @sum(LAD: @abs(x + a* z - b) /(1 + a^2)^0.5);
end
```

现将上述背景值优化、全最小一乘准则参数估计和初始值优化结合在一起,就得到了优化灰色 GM(1,

1)模型.

定理2 设 $X^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n))$ 是非负序列,$X^{(1)}=(x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n))$ 是 $X^{(0)}$ 的1-AGO序列,其中 $x^{(1)}(k)=\sum_{i=1}^{k}x^{(0)}(i)$,$k=1,2,\cdots,n$,背景值序列 $Z^{(1)}=(z^{(1)}(2),z^{(1)}(3),\cdots,z^{(1)}(n))$,其中 $z^{(1)}(k)=\dfrac{x^{(1)}(k)-x^{(1)}(k-1)}{\ln x^{(1)}(k)-\ln x^{(1)}(k-1)}$,$k=2,3,\cdots,n$,初始值为 $x^{(1)}(n)$.则:

(1) GM(1,1)模型 $x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b$ 的全最小一乘估计参数列满足 $\min=Q(a,b)=\dfrac{\sum_{k=2}^{n}|x^{(0)}(k)-az^{(1)}(k)-b|}{\sqrt{1+a^2}}$;

(2) 白化方程 $\dfrac{dx^{(1)}(t)}{dt}+ax^{(1)}=b$ 的解为 $x^{(1)}(t)=\left(x^{(1)}(n)-\dfrac{b}{a}\right)e^{-a(t-n)}+\dfrac{b}{a}$;

(3) GM(1,1)模型 $x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b$ 的时间响应序列为 $\hat{x}^{(1)}(k+1)=\left(x^{(1)}(n)-\dfrac{b}{a}\right)e^{-a(k-n+1)}+\dfrac{b}{a}$,$k=1,2,\cdots$;

(4) 还原值 $\hat{x}^{(0)}(k+1)=\hat{x}^{(1)}(k+1)-\hat{x}^{(0)}(k)=(1-e^{a})\left(x^{(1)}(n)-\dfrac{b}{a}\right)e^{-a(k-n+1)}$,$k=1,2,\cdots$.

4 应用实例

现使用文献[10]中昌吉市1982—1997年间的 NO_x 年平均浓度监测值作为计算实例,如表1所示.通过建立文中优化GM(1,1)模型,然后与文献[10]中通过遗传算法建立的GM(1,1)模型,文献[12]中基于折扣最小一乘参数估计的灰色GM(1,1)模型,传统灰色GM(1,1)模型的计算结果进行比较.

由定理2,利用LINGO程序可以求出在全最小一乘准则下的参数 $\hat{a}=(-0.073\,203\,32,0.020\,800\,46)$,于是得到 $\hat{x}^{(0)}(k+1)=0.047\,304\,4e^{0.073\,203\,32(k-11)}$.

现将所求的结果列入表1进行对比.

表1 模型的精度比较

$x(t)$	模拟预测值 $\hat{x}^{(0)}(k)$				相对误差(%) $\Delta k=\dfrac{\lvert\varepsilon(k)\rvert}{x^{(0)}(k)}$			
	GM(1,1)	文献[10]	文献[12]	此处	GM(1,1)	文献[10]	文献[12]	此处
0.020	0.020	0.020	0.020	0.021 14				5.72
0.023	0.022 18	0.022 16	0.023 000	0.022 75	3.565	3.652	0	5.82
0.017	0.023 93	0.023 90	0.024 578	0.024 48	40.765	40.588	44.575	43.99
0.030	0.025 82	0.025 79	0.026 264	0.026 63	13.933	14.033	12.454	11.22
0.032	0.027 85	0.027 82	0.028 065	0.028 34	12.969	13.063	12.296	11.45
0.024	0.030 55	0.030 01	0.029 990	0.030 49	25.208	25.042	24.958	27.04
0.031	0.032 42	0.032 37	0.032 047	0.032 81	4.581	4.419	3.377	5.82
0.035	0.034 97	0.034 92	0.032 245	0.035 30	0.086	0.288	2.156	0.85
0.035	0.037 73	0.037 67	0.036 594	0.037 98	7.800	7.629	4.554	8.51
0.049	0.040 71	0.040 63	0.039 104	0.040 86	16.918	17.082	20.195	16.61
0.056	0.043 92	0.043 83	0.041 786	0.043 96	21.571	21.732	25.381	21.49
0.034	0.047 38	0.047 28	0.044 653	0.047 30	39.353	39.058	31.331	39.13
				平均相对误差	16.977	16.957	16.479	16.076
0.045	0.051 1	0.051 0	0.047 716	0.050 9	13.556	13.333	6.035	13.10
0.058	0.055 1	0.055 0	0.050 988	0.054 8	5.000	5.172	12.089	5.58
0.052	0.059 5	0.059 4	0.054 486	0.058 9	14.423	14.231	4.781	11.75
0.050	0.064 2	0.064 0	0.058 223	0.063 40	28.400	28.000	16.446	26.79
				平均相对误差	15.345	15.184	9.838	14.305

从表 1 计算结果可以得知,在模拟和预测精度上,文中优化 GM(1,1) 模型均比文献[10]中遗传算法优化 GM(1,1) 模型和传统 GM(1,1) 模型均有较大改进,因此说明了该模型具有一定可行性和有效性. 同时,表 1 显示,文中优化 GM(1,1) 模型在模拟精度上较文献[12]中改进灰色 GM(1,1) 模型有所改进,但是预测精度不如文献[12]中改进模型,而文献[12]中模型计算过于复杂,不如文中优化 GM(1,1) 模型易于计算. 因此,文中优化 GM(1,1) 模型无论在精度上还是在计算上,都具有一定的优势.

参考文献:

[1] 邓聚龙. 灰色系统理论教程[M]. 武汉: 华中理工大学出版社,1990

[2] 刘思峰,党耀国,方志耕,等. 灰色系统理论及其应用[M]. 5 版. 北京: 科学出版社,2010

[3] 谭冠军. GM(1,1) 模型的背景值构造方法和应用(Ⅰ) [J]. 系统工程理论与实践,2000(4) : 98-103

[4] 陈永刚,杨定远,戴文战. 基于背景值改进的 GM(1,1) 预测模型的研究及其应用[J]. 浙江理工大学学报,2007,24(4) : 444-447,460

[5] 邱淑芳,王泽文. 灰色 GM(1,1) 模型背景值计算的改进[J]. 统计与决策,2007(2) : 129-131

[6] 罗党,刘思峰,党耀国. 灰色模型 GM(1,1) 优化[J]. 中国工程科学,2003,5(8) : 50-53

[7] 张辉,胡适耕. GM(1,1) 模型的边值分析[J]. 华中科技大学学报,2001,19(4) : 110-111

[8] 李云贵,李清富,赵国藩. 灰色 GM(1,1) 预测模型的改进[J]. 系统工程,1992,10(6) : 27-31

[9] 党耀国,刘思峰,刘斌. 以 $x^{(1)}(n)$ 为初始条件的 GM 模型[J]. 中国管理科学,2005,13(1) : 132-135

[10] 李祚泳,张明,邓新民. 基于遗传算法优化的 GM(1,1) 模型及效果检验[J]. 系统工程理论与实践,2002(8) : 136-139

[11] 郑照宁,武玉英,程小辉,等. 灰色模型的病态性问题[J]. 系统工程理论方法应用,2001,10(2) : 140-144

[12] 穆勇. 灰色预测模型参数估计的优化方法[J]. 青岛大学学报,2003,16(3) : 95-98

[13] 田林亚,赵小飞,何习平. 灰色模型 GM(1,1) 的稳健算法及其应用[J]. 吉首大学学报: 自然科学版. 2006,27(4) : 47-49

[14] 冯守平. 全最小一乘法[J]. 安徽大学学报: 自然科学版. 2009,33(3) : 23-26

An Optimized Grey GM(1,1) Model and Its Application

HE Xia, LIU Wei-feng

(Department of Mathematics and Physics, Zhengzhou Institute of Aeronautical Industry Management, Zhengzhou 450015, China)

Abstract: Based on the premise of optimized background value, according to bad robustness of estimating parameters of traditional grey GM(1,1) model based on least square method, this paper presents a new algorithm of total least absolute deviation for estimating parameters of grey GM(1,1) model with optimization of initial value, and an optimized grey GM(1,1) model is put forward based on simultaneous optimization of background value, initial condition and model parameters. Lastly, a calculation example illustrates the feasibility and validity of the optimized grey GM(1,1) model.

Key words: grey GM(1,1) model; estimating parameters; total least absolute deviation; background value; initial condition

责任编辑:代小红
校　　对:李翠薇