文章编号:1672-058X(2011)03-0238-03

矩阵最小奇异值下界的一种估计

张 丛[a],马丽宾[b],匡德胜[a]
(重庆大学 a. 数学与统计学院;b. 通信工程学院;重庆 400044)

摘 要:矩阵的奇异值是矩阵分析中的重要课题.其中矩阵奇异值的下界估计在许多领域中也是非常重要的,因此矩阵奇异值的下界估计得到了普遍的关注.对奇异值的下界做了进一步的研究,改进了黄廷祝的"矩阵最小奇异值下界的估计"一文的定理1以及定理2,并给出了相应的证明和数值算例.

关键词:最小奇异值;分块矩阵;Hermite 半正定矩阵

中图分类号:O241 **文献标志码**:A

1 基础知识

矩阵的奇异值是矩阵分析中的重要课题.在用迭代法求线性方程组的解时,往往需要估计矩阵 A 的谱条件 $K(A)=\dfrac{\sigma_1(A)}{\sigma_n(A)}\leqslant\dfrac{(\|A\|_1\|A\|_\infty)^{\frac{1}{2}}}{\gamma}$($\sigma_1(A)$ 为 A 的最大奇异值),其中最小奇异值 $\sigma_n(A)$ 的下界估计 γ 是非常重要的.矩阵奇异值的下界估计在其他许多领域中也是非常重要的,因此得到了普遍的关注.1975年,J. M. Varah 在文献[1]中利用矩阵元素给出了最小奇异值的下界.1989年,C. R. Johnson 在文献[2]中将 Gerschgorin 圆盘定理应用于最小奇异值的下界估计.到1997年,黄廷祝在文献[3]中,利用了矩阵分块得到了矩阵奇异值下界的估计.

此处在黄廷祝利用分块矩阵求奇异值下界的估计的基础上进行了改进,得到了一个更精确的界值估计.

采用如下一系列符号:其中 N 表示自然数集;$M_n(C)$ 表示 $n\times n$ 阶复矩阵集合;$\lambda(A)$ 表示 A 的特征值;$\sigma_n(A)$ 表示 A 的最小奇异值;A^* 代表 A 的共轭转置;$\|\cdot\|$ 表示向量范数诱导的矩阵范数.A 奇异值用 $\sigma(A)=\sqrt{\lambda(AA^*)}$ 表示.

将 A 的 n 个奇异值按降序排列,即 $\sigma_1(A)\geqslant\sigma_2(A)\geqslant\cdots\geqslant\sigma_n(A)$.此外,设 $A=(a_{ij})\in M_n(C)$,根据文献[3]将 A 分块为:

$$A=(A_{ij})=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & \cdots\\ A_{21} & A_{22} & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ A_{k1} & A_{k2} & \cdots\end{pmatrix},A_{ii}\text{ 非奇异}\tag{1}$$

其中 $A_{ij}\in M_{n_in_j}(C)$,$i,j\in K=\{1,2,\cdots,k\}$,$\sum\limits_{i=1}^{n}n_i=n$.

若 $|A_{ii}^{-1}|\geqslant\sum\limits_{j\neq i}|A_{ij}|$,$i\in K$,则称 A 为对角占优矩阵,将具有这类性质的一切矩阵的集合记为 $A\in\Omega$.

收稿日期:2010-09-09;修回日期:2010-10-26.

作者简介:张 丛(1984-),女,山东聊城人,硕士研究生,从事数值代数研究.

2　主要结果

引理 1[4]　如果对于 $A=(a_{ij})\in C^{n\times n}$，存在 $r_i, s_i>0$，对任意 $i\in N$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}(1+r_i)^{-1}+\sum\limits_{i=1}^{n}(1+s_i)^{-1}\leqslant 1$，且 $|a_{ii}|>r_i\max\limits_{j\neq i}|a_{ij}|$ 和 $|a_{ii}|>s_i\max\limits_{j\neq i}|a_{ji}|$，则 A 非奇异，且它的最小奇异值满足 $\sigma_n(A)\geqslant \min\limits_i\left\{\frac{|a_{ii}|}{r_i},\frac{|a_{ii}|}{s_i}\right\}>\min\limits_i\{\max\limits_{j\neq i}|a_{ij}|,\max\limits_{j\neq i}|a_{ji}|\}$.

引理 2[3]　设 $A\in M_n(C)$ 分块如式(1)，若 $A\in\Omega$，$A_{ii}(i\in K)$ 为 M 阵，则 $\mathrm{Re}\lambda(A)>0$.

定理 1　设 $A\in M_n(C)$ 分块如式(1)，若数 α 满足：

$$\|(A_{ii}+(A_{ii})^*-\alpha I_{n_i})^{-1}\|^{-1}\geqslant\sum_{j\neq i}\|A_{ij}+(A_{ij})^*\| \tag{2}$$

$A_{ii}+(A_{ii})^*-\alpha I_{n_i}$ 为 M 阵，同时存在 $r_i, s_i>0$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}(1+r_i)^{-1}+\sum\limits_{i=1}^{n}(1+s_i)^{-1}\leqslant 1$，对任意 $i\in N$，有 $|a_{ii}|>r_i\max\limits_{j\neq i}|a_{ij}|+\frac{\alpha}{2}$，$|a_{ii}|>s_i\max\limits_{j\neq i}|a_{ji}|+\frac{\alpha}{2}$，则：

$$\sigma_n(A)>\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+\alpha\min_i\{\max_{j\neq i}|a_{ij}|,\max_{j\neq i}|a_{ji}|\}+(\min_i\{\max_{j\neq i}|a_{ij}|,\max_{j\neq i}|a_{ji}|\})^2}$$

证明　记 $B=A-\frac{\alpha}{2}I$，$C=B+B^*=A+A^*-\alpha I$. 由式(2)知 $C\in\Omega$. 又 $A_{ii}+(A_{ii})^*-\alpha I_{n_i}$ 为 M 阵，于是由引理 2 知，C 为 Hermite 半正定矩阵. 因为 $A=B+\frac{\alpha}{2}I$，根据文献[3]知 $AA^*=\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2I+\frac{\alpha}{2}(B+B^*)+BB^*$. 显然 $B+B^*$，BB^* 均为 Hermite 半正定矩阵.

又由 $B=A-\frac{\alpha}{2}I$，则 $|b_{ii}|=\left|a_{ii}-\frac{\alpha}{2}\right|\geqslant|a_{ii}|-\frac{\alpha}{2}>r_i\max\limits_{j\neq i}|a_{ij}|$，$b_{ij}=a_{ij}$ 对 $j\neq i$. 同理，$|b_{ii}|=\left|a_{ii}-\frac{\alpha}{2}\right|\geqslant|a_{ii}|-\frac{\alpha}{2}>s_i\max\limits_{j\neq i}|a_{ji}|$，$b_{ji}=a_{ji}$ 对 $j\neq i$. 由引理 1 知 B 非奇异，且 $\sigma_n(B)\geqslant\min\limits_i\left\{\frac{|b_{ii}|}{r_i},\frac{|b_{ii}|}{s_i}\right\}>\min\limits_i\{\max\limits_{j\neq i}|b_{ij}|,\max\limits_{j\neq i}|b_{ji}|\}$. 由 $(B+B^*)^2=(B)^2+2BB^*+(B^*)^2$，则 $\sigma_n(B+B^*)>2\sigma_n(B)$. 从而：

$$\begin{aligned}\lambda(AA^*)&\geqslant\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+\alpha\min_i\left\{\frac{|b_{ii}|}{r_i},\frac{|b_{ii}|}{s_i}\right\}+\left(\min_i\left\{\frac{|b_{ii}|}{r_i},\frac{|b_{ii}|}{s_i}\right\}\right)^2>\\&\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+\alpha\min_i\{\max_{j\neq i}|b_{ij}|,\max_{j\neq i}|b_{ji}|\}+(\min_i\{\max_{j\neq i}|b_{ij}|,\max_{j\neq i}|b_{ji}|\})^2=\\&\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+\alpha\min_i\{\max_{j\neq i}|a_{ij}|,\max_{j\neq i}|a_{ji}|\}+(\min_i\{\max_{j\neq i}|a_{ij}|,\max_{j\neq i}|a_{ji}|\})^2\end{aligned}$$

即 $\sigma_n(A)>\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+\alpha\min\limits_i\{\max\limits_{j\neq i}|a_{ij}|,\max\limits_{j\neq i}|a_{ji}|\}+(\min\limits_i\{\max\limits_{j\neq i}|a_{ij}|,\max\limits_{j\neq i}|a_{ji}|\})^2}$.

定理 2　设 $A\in M_n(C)$ 分块如式(1). 若数 α 满足：存在 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_k)^{\mathrm{T}}>0$，使得：

$$x_i\|(A_{ii}+(A_{ii})^*-\alpha I_{n_i})^{-1}\|^{-1}\geqslant\sum_{j\neq i}x_j\|A_{ij}+(A_{ij})^*\| \tag{3}$$

和 $A_{ii}+(A_{ii})^*-\alpha I_{n_i}$ 为 M 阵，同时存在 $r_i, s_i>0$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{n}(1+r_i)^{-1}+\sum\limits_{i=1}^{n}(1+s_i)^{-1}\leqslant 1$，对任意 $i\in N$，有 $|a_{ii}|>r_i\max\limits_{j\neq i}|a_{ij}|+\frac{\alpha}{2}$，$|a_{ii}|>s_i\max\limits_{j\neq i}|a_{ji}|+\frac{\alpha}{2}$，那么：

$$\sigma_n(A)>\sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2+\alpha\min_i\{\max_{j\neq i}|a_{ij}|,\max_{j\neq i}|a_{ji}|\}+(\min_i\{\max_{j\neq i}|a_{ij}|,\max_{j\neq i}|a_{ji}|\})^2}$$

证明　记 $B=A-\frac{\alpha}{2}I$，　$C=B+B^*=A+A^*-\alpha I$，由文献[3]知 C 为 Hermite 半正定阵. 又 $A=B+\frac{\alpha}{2}I$，所以 $AA^*=(\frac{\alpha}{2})^2I+\frac{\alpha}{2}(B+B^*)+BB^*$. 显然 $B+B^*$，BB^* 均为 Hermite 半正定矩阵. 又由 $B=A-\frac{\alpha}{2}I$，则

$|b_{ii}| = \left| a_{ii} - \frac{\alpha}{2} \right| \geqslant |a_{ii}| - \frac{\alpha}{2} > r_i \max_{j\neq i}|a_{ij}|$,$b_{ij} = a_{ij}$对$j\neq i$. 同理,$|b_{ii}| = \left| a_{ii} - \frac{\alpha}{2} \right| \geqslant |a_{ii}| - \frac{\alpha}{2} > s_i \max_{j\neq i}|a_{ji}|$,$b_{ji} = a_{ji}$对$j\neq i$.

由引理1知B非奇异,且$\sigma_n(B) \geqslant \min_i \left\{ \frac{|b_{ii}|}{r_i}, \frac{|b_{ii}|}{s_i} \right\} > \min_i \{ \max_{j\neq i}|b_{ij}|, \max_{j\neq i}|b_{ji}| \}$. 又$\sigma_n(B+B^*) > 2\sigma_n(B)$. 从而得:

$$\lambda(AA^*) \geqslant \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \alpha \min_i \left\{ \frac{|b_{ii}|}{r_i}, \frac{|b_{ii}|}{s_i} \right\} + \left(\min_i \left\{ \frac{|b_{ii}|}{r_i}, \frac{|b_{ii}|}{s_i} \right\} \right)^2 >$$

$$\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \alpha \min_i \{ \max_{j\neq i}|b_{ij}|, \max_{j\neq i}|b_{ji}| \} + (\min_i \{ \max_{j\neq i}|b_{ij}|, \max_{j\neq i}|b_{ji}| \})^2 =$$

$$\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \alpha \min_i \{ \max_{j\neq i}|a_{ij}|, \max_{j\neq i}|a_{ji}| \} + (\min_i \{ \max_{j\neq i}|a_{ij}|, \max_{j\neq i}|a_{ji}| \})^2$$

即$\sigma_n(A) > \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \alpha \min_i \{ \max_{j\neq i}|a_{ij}|, \max_{j\neq i}|a_{ji}| \} + (\min_i \{ \max_{j\neq i}|a_{ij}|, \max_{j\neq i}|a_{ji}| \})^2}$.

3 数值算例

例1[3] 设$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$,$\sigma_2(A) \approx 1.842\,4$[3].

由文献[3]的结果为$\sigma_2(A) \geqslant 1.500\,0$. 由此处可得$\sigma_2(A) > 1.500\,0$.

例2 设$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$,$\sigma_2(A) \approx 2.236\,0$.

由文献[3]的结果为$\sigma_2(A) \geqslant 1.500\,0$. 由此处可得,$\sigma_2(A) > 1.750\,0$.

显然此处的估计要比文献[3]中的估计更精确些.

参考文献:

[1] VARAH J M. A lower bound for the smallest singular value [J]. Linear Algebra,1975(2):3-5

[2] JOHNSON C R. A Gersgorin-type lower bound for the smallest singular value [J]. Linear Algebra Appl,1989,112:1-7

[3] 黄廷祝,游兆永. 矩阵最小奇异值下界的估计 [J]. 计算数学,1997(4):359-364

[4] LI H B, HUANG T ZH, LIU X P, et al. Singularity,Wielandt's lemma and singular values [J]. J Comput Appl Math,2010,234:2943-2952

One Estimate about Lower Bound for the Smallest Singular Value of Matrices

ZHANG Cong[1], MA Li-bin[2], KUANG De-sheng[1]

(1. School of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing 400044;
2. School of Communication Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract: Singular value of matrices is an important topic in matrix research, among which, the lower bound estimate of singular value of matrices is important in many fields, as a result, the lower bound estimate of singular value of matrices is universally focused. This paper makes further research on the lower bound of singular value and improves Theorem 1 and Theorem 2 of Huang Tingzhu's Lower Bounds Estimate for the Smallest Singular Value of Matrices and gives corresponding proof and numerical examples.

Key words: the smallest singular value; block matrix; Hermite positive semidefinite matrix

责任编辑:李翠薇