第 28 卷第 3 期 重庆工商大学学报(自然科学版) 2011 年 6 月
Vol. 28 NO. 3 J Chongqing Technol Business Univ. (Nat Sci Ed) Jun. 2011

文章编号:1672-058X(2011)03-0236-02

开映射的性质*

霍承刚
(宿州学院 数学与统计学院,安徽 宿州 234000)

摘　要:开映射是点集拓扑中的一个概念,它在拓扑空间的研究中有着十分重要的作用,对开映射的研究是有意义的.利用与开映射有关的结论例如开映射与同胚的关系等,进一步探讨了开映射的性质定理.

关键词:开映射; 连续映射; 同胚; 商拓扑
中图分类号:O189　　**文献标志码**: A

定义 1[1] 设 X 和 Y 是两个拓扑空间,映射 $f: X\to Y$ 称为一个开映射,如果对于 X 中的任何一个开集 U,像集 $f(U)$ 是 Y 中的一个开集.

定义 2[2] 设 X 和 Y 都是拓扑空间,$f: X\to Y$. 如果 Y 中每一个开集 U 的原像 $f^{-1}(U)$ 是 X 中一个开集,则称 f 是从 X 到 Y 的一个连续映射,或简称 f 连续.

例[3] 设 $X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 是 $n\geqslant 1$ 个拓扑空间 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的积空间,则对于每一个 $i=1,2,\cdots,n$,笛卡尔积 X 到它的第 i 个坐标集 X_i 的投射 $P_i: X\to X_i$ 是一个满的连续开映射,且 X 的拓扑为相对于满射 f 而言的拓扑.

定理 1 1) 从离散空间到离散空间的任何映射都是开映射; 2) 从平庸空间到离散空间的任何映射都是开映射.

证明 1) 设 $f: X\to Y$ 为离散空间 X 到离散空间 Y 的映射,对 X 中任一开集 U,因为 Y 是离散空间,所以 $f(U)$ 是 Y 中的一个开集,即 f 是一个开映射.

2) 设 $f: X\to Y$ 为平庸空间 X 到离散空间 Y 的映射,因为 $f(\varnothing)=\varnothing$,$f(X)\subset Y$,而 Y 为离散空间,所以 $f(\varnothing)$ 和 $f(X)$ 为 Y 中的开集,即 f 是一个开映射.

定义 3[2] 设 X 和 Y 都是拓扑空间. 如果 $f: X\to Y$ 是一个一一映射,并且 f 和 f^{-1} 都是连续的,则称 f 是一个同胚映射或同胚.

定理 2 设 X 和 Y 是两个拓扑空间,映射 $f: X\to Y$ 为同胚,则映射 $f: X\to Y$ 为一个开映射.

证明 设 U 是 X 的任意开集,由于映射 $f: X\to Y$ 为同胚,则 $f^{-1}: Y\to X$ 也是同胚,因而 $f^{-1}: Y\to X$ 是连续映射. 对 X 的任意开集 U,有 $(f^{-1})^{-1}(U))=f(U)$ 为 Y 中的开集,从而 $f: X\to Y$ 为一个开映射.

定理 3 设 X 和 Y 是两个拓扑空间,映射 $f: X\to Y$ 为一一映射,若 f 为连续的开映射,则 $f: X\to Y$ 为同胚.

证明 欲证明 $f: X\to Y$ 为同胚,由已知条件,只需证明 $f^{-1}: Y\to X$ 连续即可. 对 X 中的任意开集 U 有 $(f^{-1})^{-1}(U))=f(U)$. 由于 f 为开映射,故 $f(U)$ 为 Y 中的开集,从而说明 $f^{-1}: Y\to X$ 连续.

这样由定理 2 和定理 3 即有如下的结论: X 和 Y 是两个拓扑空间,$f: X\to Y$ 为同胚的充要条件是 f 为一一的连续开映射.

下面给出开映射的一个重要性质.

定理 4 设 X,Y 和 Z 是拓扑空间,映射 $f: X\to Y$ 和 $g: Y\to Z$ 都为开映射,则 $g\circ f: X\to Z$ 也为开映射.

证明 设 W 为 Z 中的任意开集,由 $f: X\to Y$ 为开映射有 $f(U)$ 为 Y 中的开集,再由 $g: Y\to Z$ 为开映射得

收稿日期:2010-08-12;修回日期:2010-09-25.
* 基金项目:宿州学院硕士科研启动基金项目(2008yss18).
作者简介:霍承刚(1980-),男,山东德州人,讲师,硕士研究生,从事基础数学低维拓扑研究.

$g(f(u))$ 为 Z 中的开集. 而 $g\circ f(u)=g(f(U))$，所以 $g\circ f(u)$ 为 Z 中的开集，这就证明了 $g\circ f: X\to Z$ 为开映射.

定义 4[2] 一个拓扑空间如果有一个可数基(在它的每一点处有一个可数邻域基)，则称这个拓扑空间是满足第二可数性公理的空间(满足第一可数性公理的空间).

引理 1[1] 设 X 和 Y 是两个拓扑空间，$f: X\to Y$ 是一个满的连续开映射，如果 X 满足第二可数性公理(满足第一可数性公理)，则 Y 也满足第二可数性公理(满足第一可数性公理).

定理 5 设 $X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 是 $n\geqslant 1$ 个拓扑空间 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的积空间，如果 X 满足第二可数性公理(满足第一可数性公理)，则 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 也满足第二可数性公理(满足第一可数性公理).

证明 考虑积空间 X 到第 i 个坐标空间的自然投射 $P_i: X\to X_i(i=1,2,\cdots,n)$，由于 $P_i: X\to X_i$ 是一个满的连续开映射(其中 $i=1,2,\cdots,n$)，再结合引理 1，定理结论成立.

定义 5[3] 设 (X,T) 是一个拓扑空间，Y 是一个集合，$f: X\to Y$ 是一个满射. Y 的拓扑 $T_1=\{U\subset Y | f^{-1}(U)\in T\}$，称为 Y 的相对于满射 f 而言的商拓扑.

引理 2[4] 设 X 和 Y 是两个拓扑空间，$f: X\to Y$ 是一个满的连续开映射，则 Y 的拓扑是相对于满射 f 而言的商拓扑.

定理 6 设 $X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 是 $n\geqslant 1$ 个拓扑空间 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的积空间，$P_i: X\to X_i$ 为 X 到它的第 i 个坐标空间 X_i 的自然投射，则 X_i 的拓扑是相对于满射 P_i 而言的商拓扑，其中 $i=1,2,\cdots,n$.

证明 由引理 2 定理结论自然成立.

参考文献:

[1] 熊金城. 点集拓扑讲义[M]. 北京: 高等教育出版社，1998

[2] ARMSTRONG M A. 基础拓扑学[M]. 孙以丰，译. 北京: 北京大学出版社，1983

[3] 李元熹，张国梁. 拓扑学[M]. 上海: 上海科学技术出版社，1986

[4] 杨鼎文. 代数拓扑基础[M]. 北京: 科学出版社，1992

[5] 霍承刚. 对一类拓扑空间的研究[J]. 西部论坛，2010，20(增 1): 157

Properties of the Open Mapping

HUO Cheng-gang

(School of Mathematics and Statistics，Suzhou University，Anhui Suzhou 234000，China)

Abstract: Open mapping is a concept in point set topology and it plays a very important role in the study of topological spaces. So it is significant to reserch the open mapping. In this paper，some properties and theorems about open mapping are discussed by using conclusions related to open mapping，for example，the reletionship between open mapping and homeomorphism and so on.

Key words: open mapping; continuous mapping; homeomorphism; quotient topology

责任编辑:李翠薇