第 28 卷第 3 期 重庆工商大学学报(自然科学版) 2011 年 6 月
Vol. 28 NO. 3 J Chongqing Technol Business Univ. (Nat Sci Ed) Jun. 2011

文章编号:1672 - 058X(2011)03 - 0221 - 04

弱极限点与 SS 混沌*

邓 金 虹
(广西师范大学 数学科学学院,广西 桂林 541004)

摘 要:引入 $W\omega(f)$-弱极限点的概念,使得 $\omega(f)\subset W\omega(f)$,并研究了 f 在 I 上为 SS 混沌的充分条件,从而推广了 SS 混沌与回复点的研究范围.

关键词:$W\omega(f)$-弱极限点;SS 混沌;充分条件
中图分类号:O19 文献标志码:A

混沌的研究开始于混沌现象的发现,所谓混沌现象就是指动力系统中出现的貌似不规则的运动.对于"混沌的本质是什么"这一问题,人们从多个角度得到了若干充分和必要条件[1-4],但还有很多不完善的地方.在动力系统复杂性的研究中,Li-Yorke 混沌与 SS 混沌受到普遍关注,其中 SS 混沌除了具有对初值敏感依赖性外,还带有统计规律,也就是说,SS 混沌是概率方法与混沌研究相结合的新应用.廖公夫等在文献[5]中构造了 Li-Yorke 混沌但不是 SS 混沌的例子,王宏仁等在文献[6]中给出了 σ 在极限点集 $\omega(\sigma)$ 上是 Li-Yorke 混沌的例子.赵勇在文献[7]中研究了 Li-Yorke 混沌映射下周期点集的性质.为了更好的研究 SS 混沌,此处构造 $W\omega(f)$-弱极限点,并研究它与 SS 混沌的关系.

1 相关概念与引理

文中周期点集 $P(f)$ 和极限点集 $\omega(f)$ 如常定义,下面引入 $W\omega(f)$-弱极限点的概念.

定义 1 设(X,d)为紧致度量空间,$f:X\to X$ 连续.对于 $x\in X$,如果存在 $y\in X$,对任意 $\varepsilon>0$,$\exists N_\varepsilon>0$,$\forall n\geqslant 1$,$\#(\{i:f^i(x)\in V(y,\varepsilon),0\leqslant i<nN_\varepsilon\})\geqslant n$,则称 y 为 x 的弱极限点,x 的全体弱极限点记为 $W\omega(x,f)$,X 的所有弱极限点记作 $W\omega(f)=\bigcup\limits_{x\in X}W\omega(x,f)$.其中$\#(\{\cdot\})$表示集合的基数,$V(y,\varepsilon)$表示球形邻域.易见,$\omega(f)\subset W\omega(f)$.

Li-Yorke 混沌的概念来自文献[8],下面介绍 SS 混沌(也称分布混沌)的概念.

定义 2[9] 设(X,d)是一个紧致的度量空间,$f:X\to X$ 连续,称 f 是 SS 混沌的,如果存在不可数集 $D\subset X$,使得对于任意 $x,y\in D$,$x\neq y$,有:

(i) 存在 $\delta>0$,使得 $F_{xy}=\liminf\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\#\{i:d(f^i(x),f^i(y))<\delta,0\leqslant i<n\}=0$;

(ii) 对任意 $t>0$,$f^*_{xy}(t,n)=\limsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\#\{i:d(f^i(x),f^i(y))<t,0\leqslant i<n\}=1$.

其中 $\chi_{[0,\delta)}$ 表示区间$[0,\delta)$上的特征函数,即当 $z\in[0,\delta)$,$\chi_{[0,\delta)}(z)=1$,否则 $\chi_{[0,\delta)}(z)=0$.

引理 1 $y\in W\omega(x,f)$ 当且仅当对 $\forall\varepsilon>0$,$\liminf\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\#(\{i:f^i(x)\in V(y,\varepsilon),0\leqslant i<n\})>0$.

证明 设 $y\in W\omega(x,f)$,则对任意 $\varepsilon>0$,$\exists N_\varepsilon>0$,$\forall k\geqslant 1$,$\#(\{i:f^i(x)\in V(y,\varepsilon),0\leqslant i<kN_\varepsilon\})\geqslant k$,取正整数的递增序列 n_k,使得 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{n_k}\#(\{i:f^i(x)\in V(y,\varepsilon),0\leqslant i<n_k\})$ 存在.记 $n_k=k_jN_\varepsilon+r_j$,$k_j\geqslant 0$,$0\leqslant r_j<N_\varepsilon$,$k=1,2,\cdots$,有 $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{n_k}\#(\{i:f^i(x)\in V(y,\varepsilon),0\leqslant i<n_k\})=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{k_jN_\varepsilon+r_j}\#(\{i:f^i(x)\in V(y,\varepsilon),0\leqslant i<k_jN_\varepsilon+r_j\})\geqslant$

收稿日期:2010 - 11 - 12;修回日期:2010 - 12 - 20.
* 基金项目:国家自然科学基金资助项目(10961005);广西壮族自治区研究生教育创新基金(2009106020701M35).
作者简介:邓金虹(1984 -),女,广西灵山人,硕士研究生,从事动力系统研究.

$\lim_{k\to\infty}\frac{k_j}{k_jN_\varepsilon+r_j}=\frac{1}{N_\varepsilon}>0$. 也就是$\forall\varepsilon>0$,$\lim_{n\to\infty}\inf\frac{1}{n}\#(\{i:f^i(x)\in V(y,\varepsilon),0\leqslant i<n\})>0$.

反证,设$y\notin W\omega(x,f)$,则$\exists\varepsilon>0$,对$\forall N>0$,$\exists k_j>0$,$\forall j>0$,有$\#(\{i:f^i(x)\in V(y,\varepsilon),0\leqslant i<k_jN\})<k_j$,因此,$\lim_{n\to\infty}\inf\frac{1}{n}\#(\{i:f^i(x)\in V(y,\varepsilon),0\leqslant i<n\})\leqslant\lim_{j\to\infty}\frac{1}{k_jN}\#(\{i:f^i(x)\in V(y,\varepsilon),0\leqslant i<k_jN\})\leqslant\frac{k_j}{k_jN}=\frac{1}{N}$. 由$N$的任意性,得$\lim_{n\to\infty}\inf\frac{1}{n}\#(\{i:f^i(x)\in V(y,\varepsilon),0\leqslant i<n\})=0$,矛盾. 即$y\in W\omega(x,f)$. 证毕.

引理2 $W\omega(x,f)$为闭集.

证明 设$y_n\to y$,$n\to\infty$且$y_n\in W\omega(x,f)$,只要证$y\in W\omega(x,f)$. 由$y_n\to y$,则对$\varepsilon>0$,$\exists N>0$,$\forall n\geqslant N$时,$y_n\in V(y,\varepsilon)$,则$y_N\in V(y,\varepsilon)$,则$\exists\delta>0$,$V(y_N,\delta)\subset V(y,\varepsilon)$. 由$y_N\in W\omega(x,f)$,则对$\delta>0$,$\exists N_\delta>0$,对$\forall n\geqslant 1$,有$\#(\{i:f^i(x)\in V(y_N,\delta),0\leqslant i<nN_\delta\})\geqslant n$,则$\#(\{i:f^i(x)\in V(y,\varepsilon),0\leqslant i<nN_\delta\})\geqslant\#(\{i:f^i(x)\in V(y_N,\delta),0\leqslant i<nN_\delta\})\geqslant n$,所以$y\in W\omega(x,f)$,则$W\omega(x,f)$为闭集. 证毕.

引理3 $W\omega(f)$为非空不变集,并且$W\omega(f)\subset\Omega(f)$.

证明 由于$\omega(f)\subset W\omega(f)$并且任意紧致度量空间中都有$\omega(f)\neq\Phi$,则$W\omega(f)\neq\Phi$,即$W\omega(f)$为非空的. 要证$f(W\omega(f))\subset W\omega(f)$,只要$\forall x\in X$,$f(W\omega(x,f))\subset W\omega(x,f)$. $\forall y\in W\omega(x,f)$,由$f$连续可得,$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,有$f(V(y,\delta))\subset V(f(y),\varepsilon)$. 由$y\in W\omega(x,f)$及引理1,则对$\delta>0$,$\forall n_k\to\infty$使得$\lim_{n_k\to\infty}\frac{1}{n_k}\#(\{i:f^i(x)\in V(y,\delta),0\leqslant i<n_k\})>0$. 对满足上式的$i$,$f^{i+1}(x)=f(f^i(x))\in f(V(y,\delta))\subset V(f(y),\varepsilon)$,则$\forall\varepsilon>0$,$\forall n_k\to\infty$,$\lim_{n_k\to\infty}\frac{1}{n_k}\#(\{i+1:f^{i+1}(x)\in V(f(y),\varepsilon),1\leqslant i<n_k+1\})>0$,所以$f(y)\in W\omega(x,f)$. 由$y$的任意性知,$f(W\omega(x,f))\subset W\omega(x,f)$,由$x$的任意性知,$f(W\omega(f))\subset W\omega(f)$.

要证$W\omega(f)\subset\Omega(f)$,只要$\forall y\in W\omega(f)$有$y\in\Omega(f)$,即$\exists x\in X$,$y\in W\omega(x,f)$时,$y\in\Omega(f)$. 由$y\in W\omega(x,f)$及引理1,有:

$$\forall\varepsilon>0,\forall n_k\to\infty,\lim_{n_k\to\infty}\frac{1}{n_k}\#(\{i:f^i(x)\in V(y,\varepsilon),1\leqslant i<n_k\})>0 \tag{1}$$

下面开始构造x_j使得$j\to\infty$,$x_j\to y$. 由式(1),$\exists i\in[0,n_k)$,使$f^i(x)\in V(y,\varepsilon)$,令最小的这样的$i$为$i_1$且令$f^{i_1}(x)=x_1$,则$\forall i\in[0,i_1)$,$f^i(x)\notin V(y,\varepsilon)$但$x_1\in V(y,\varepsilon)$;

由式(1),$\exists i\in[0,n_k)-[0,i_1)$使得$f^i(x)\in V(y,\varepsilon)$,令最小的这样的$i$为$i_2$且令$f^{i_2}(x)=x_2$,则$\forall i\in[i_1,i_2)$,$f^i(x)\notin V(y,\varepsilon)$但$x_1,x_2\in V(y,\varepsilon)$;

由式(1),$\exists i\in[0,n_k)-[0,i_2)$使得$f^i(x)\in V(y,\varepsilon)$,令最小的这样的$i$为$i_3$且令$f^{i_3}(x)=x_3$,则$\forall i\in[i_2,i_3)$,$f^i(x)\notin V(y,\varepsilon)$但$x_1,x_2,x_3\in V(y,\varepsilon)$;

由式(1),$\exists i\in[0,n_k)-[0,i_{j-1})$使得$f^i(x)\in V(y,\varepsilon)$,令最小的这样的$i$为$i_j$且令$f^{i_j}(x)=x_j$,则$\forall i\in[i_{j-1},i_j)$,$f^i(x)\notin V(y,\varepsilon)$但$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_j\in V(y,\varepsilon)$. 即当$j\to\infty$,$x_j\to y$.

下面开始构造n_j使得$n_j\to\infty$,$f^{n_j}(x_j)\to y$. 由$f^{i_1}(x)=x_1$,$f^{i_2}(x)=x_2$,$f^{i_3}(x)=x_3$,$\cdots$,$f^{i_j}(x)=x_j$,则令$n_1=i_2-i_1$,有$f^{n_1}(x_1)=f^{n_1}(f^{i_1}(x))=f^{i_2-i_1+i_1}(x)=f^{i_2}(x)=x_2\in V(y,\varepsilon)$;

令$n_2=i_3-i_2$,有$f^{n_2}(x_2)=x_3\in V(y,\varepsilon)$,$\cdots$,令$n_j=i_{j+1}-i_j$,有$f^{n_j}(x_j)=x_{j+1}\in V(y,\varepsilon)$,即$f^{n_1}(x_1)\in V(y,\varepsilon)$,$f^{n_2}(x_2)\in V(y,\varepsilon)$,$\cdots$,$f^{n_j}(x_j)\in V(y,\varepsilon)$,即$\exists n_j>0$有$f^{n_j}(x_j)\in V(y,\varepsilon)$,则$n_j\to\infty$,$f^{n_j}(x_j)\to y$.

也就是,当$j\to\infty$,$\exists x_j\to y$且$\exists n_j\to\infty$,$f^{n_j}(x_j)\to y$,则$y\in\Omega(f)$. 由x的任意性知,$W\omega(f)\subset\Omega(f)$. 证毕.

引理4 若$W\omega(f)$仅含一点,则此点一定是不动点.

证明 设$W\omega(f)=\{y\}$,由引理3知$W\omega(f)$为不变集,则$f(y)\in W\omega(f)=\{y\}$,即$f(y)=y$,故y为不动点. 证毕.

引理5[6] 设$x_1,x_2\in X$,$\varepsilon>0$. 若存在$e\in X$,使得对于$j=1,2$,有$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\#\{i:f^i(x_j)\notin V(e,\varepsilon),0\leqslant i<n\}=0$,则$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\#\{i:d(f^i(x_1),f^i(x_2))<2\varepsilon,0\leqslant i<n\}=1$.

引理6[10] 设$f:I\to I$连续,则以下条件等价:

1) f有非2方幂的周期点;2) 存在闭区间$J,K\subset I$,以及某一个正整数$n>0$使得$f^n(J)\cap f^n(K)\Leftrightarrow J\cup K$,并且$J$与$K$最多有一个公共点.

2　主要结论

定理1　设连续映射 $f: I\to I$ 为 SS 混沌, S 为其 SS 混沌集, 则 $\forall x\in S$, $W\omega(x,f)$ 至少包含2个点.

证明　反证法, 假设 $W\omega(x,f)$ 为单点集. 从定义易见, SS 混沌蕴涵 Li-Yorke 混沌, 则 S 为其 Li-Yorke 混沌集, $\forall x\in S$, $\omega(x,f)\subset W\omega(x,f)$, 故 $\omega(x,f)$ 也为单点集. 这与文献[7]的命题4矛盾, 因此假设错误, 则 $\forall x\in S$, $W\omega(x,f)$ 至少包含2个点. 证毕.

定理2　设 (X,d) 为紧致度量空间, 若 $f: X\to X$ 为 SS 混沌的, 则 $W\omega(f)$ 至少包含2个点.

证明　反证, 假设 $W\omega(f)=\{y\}$ 为单点集. $\forall x_1,x_2\in X$, $\forall\varepsilon>0$, 对任意 $z\in X-V(y,\varepsilon)$, 因为 $z\notin W\omega(f)$, 则存在 z 的开邻域 $V_z\cap V(y,\varepsilon)=\Phi$, 使得对 $j=1,2$, 当 $n\to\infty$ 时, 有 $\frac{1}{n}\#\{i: f^i(x_j)\in V_z, 0\leqslant i<n\}\to 0$, 即 $\frac{1}{n}\#\{i: f^i(x_j)\notin V(y,\varepsilon), 0\leqslant i<n\}\to 0$.

由于 $X-V(y,\varepsilon)$ 为闭集且 X 为紧致的, 则 $X-V(y,\varepsilon)$ 为紧致的, 由引理5, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\#\{i: d(f^i(x_1),f^i(x_2))<2\varepsilon, 0\leqslant i<n\}=1$, 则 $\{x_1,x_2\}$ 不是 f 的 SS 混沌点, 由其任意性, f 不是 SS 混沌的, 矛盾. 故假设错误, 则 $W\omega(f)$ 至少包含2个点. 证毕.

定理3　设 $f: I\to I$ 连续, 令 $y\in W\omega(f)-P(f)$, 若存在 $k_1,k_2,k_3>0$ 使得 $f^{k_3}(y)<T_2<f^{k_2}(y)<T_1<f^{k_1}(y)$, 且 T_1,T_2 为 f 的不动点, 则 f 必有非2方幂周期点, 即 f 在 I 上为 SS 混沌.

证明　由 $y\in W\omega(f)-P(f)$, 则 $\exists x\in I$, x 不是周期点及最终周期点, 使得 $y\in W\omega(x,f)$.

由 $y\in W\omega(x,f)$ 及引理1, 则 $\forall\varepsilon>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\inf\frac{1}{n}\#(\{i: f^i(x)\in V(y,\varepsilon), 0\leqslant i<n\})>0$, 所以 $\exists n_j\to\infty$, 使 $\lim\limits_{j\to\infty}\frac{1}{n_j}\#(\{i: f^i(x)\in V(y,\varepsilon), 0\leqslant i<n_j\})>0$, 则 $\exists i\in[0,n_j)$ 使得 $f^i(x)\in V(y,\varepsilon)$. 其中 i,n_j 与 ε 有依赖关系.

由 f 连续, 则 f^{k_1},f^{k_2},f^{k_3} 也连续, 取 $\varepsilon_1=\frac{d(T_1,f^{k_1}(y))}{2}>0$, 则 $\exists\delta_1>0$ 使 $f^{i_1}(x)\in V(y,\delta_1)$, 有 $d(f^{k_1+i_1}(x),f^{k_1}(y))<\varepsilon_1$, 即 $f^{k_1+i_1}(x)\in V(f^{k_1}(y),\varepsilon_1)$; 取 $\varepsilon_2=\min\left\{\frac{d(T_2,f^{k_2}(y))}{2},\frac{d(T_1,f^{k_1}(y))}{2}\right\}>0$, 则 $\exists\delta_2>0$ 使 $f^{i_2}(x)\in V(y,\delta_2)$, 有 $f^{k_2+i_2}(x)\in V(f^{k_2}(y),\varepsilon_2)$; 取 $\varepsilon_3=\frac{d(f^{k_3}(y),T_2)}{2}>0$, 则 $\exists\delta_3>0$ 使 $f^{i_3}(x)\in V(y,\delta_3)$, 有 $f^{k_3+i_3}(x)\in V(f^{k_3}(y),\varepsilon_3)$.

$f^{k_1+i_1}(x)\in V(f^{k_1}(y),\varepsilon_1)$, $f^{k_2+i_2}(x)\in V(f^{k_2}(y),\varepsilon_2)$, $f^{k_3+i_3}(x)\in V(f^{k_3}(y),\varepsilon_3)$ 且 $T_2<f^{k_2+i_2}(x)<T_1$, 则 $\exists m_1>0$ 使 $d(f^{k_2+i_2+m_1}(x),f^{k_1}(y))<\varepsilon_1$, 即 $f^{k_2+i_2+m_1}(x)\in V(f^{k_1}(y),\varepsilon_1)$; $\exists m_3>0$ 使 $d(f^{k_2+i_2+m_3}(x),f^{k_3}(y))<\varepsilon_3$, 即 $f^{k_2+i_2+m_3}(x)\in V(f^{k_3}(y),\varepsilon_3)$, 则 $f^{m_1}([T_2,f^{k_2+i_2}(x)])\Leftrightarrow[T_2,f^{k_2+i_2+m_1}(x)]\Leftrightarrow[T_2,T_1]$, $f^{m_3}([f^{k_2+i_2}(x),T_1])\Leftrightarrow[f^{k_2+i_2+m_3}(x),T_1]\Leftrightarrow[T_2,T_1]$. 取 $m=\max\{m_1,m_3\}$, 如 $m=m_1$, 有 $f^{m_1}([f^{k_2+i_2}(x),T_1])\supset f^{m_1}-m_3(f^{m_3}([f^{k_2}+i_2(x),T_1]))\supset f^{m_1-m_3}([T_2,T_1])\supset[T_2,T_1]$, 同理可证 $m=m_3$ 有 $f^{m_3}([T_2,f^{k_2+i_2}(x)])\Leftrightarrow[T_2,T_1]$, 即 $m=\max\{m_1,m_3\}$ 时, 有 $f^m([f^{k_2+i_2}(x),T_1])\Leftrightarrow[T_2,T_1]$, $f^m([T_2,f^{k_2+i_2}(x)])\Leftrightarrow[T_2,T_1]$, 也就是 $f^m([T_2,f^{k_2+i_2}(x)])\cap f^m([f^{k_2+i_2}(x),T_1])\Leftrightarrow[T_2,T_1]\Leftrightarrow[T_2,f^{k_2+i_2}(x)]\cup[f^{k_2+i_2}(x),T_1]$.

令 $J=[T_2,f^{k_2+i_2}(x)]$, $K=[f^{k_2+i_2}(x),T_1]$, 则 J,K 为闭集且仅有一个公共点, $\exists m>0$ 使得 $f^m(J)\cap f^m(K)\Leftrightarrow J\cup K$, 由引理6知, f 必有非2方幂周期点, 即 f 在 I 上为 SS 混沌. 证毕.

定理4　设 $f: I\to I$ 连续, 若 $y\in W\omega(f)-P(f)$, 且 $\exists m>0$ 使得 $f^{m+3}(y)<f^m(y)<f^{m+2}(y)<f^{m+1}(y)$, 则 f 在 I 上为 SS 混沌.

证明　因为 $f^3([f^m(y),f^{m+2}(y)])\supseteq f^2(f([f^m(y),f^{m+2}(y)]))\Leftrightarrow f^2([f^{m+3}(y),f^{m+1}(y)])\Leftrightarrow f^2([f^m(y),f^{m+2}(y)])\Leftrightarrow f(f([f^m(y),f^{m+2}(y)]))\Leftrightarrow f([f^{m+3}(y),f^{m+1}(y)])\Leftrightarrow f([f^m(y),f^{m+2}(y)])\Leftrightarrow[f^{m+3}(y),f^{m+1}(y)]$, 及 $f^3([f^{m+2}(y),f^{m+1}(y)])\supseteq f^2(f([f^{m+2}(y),f^{m+1}(y)]))\Leftrightarrow f^2([f^{m+3}(y),f^{m+2}(y)])\Leftrightarrow f^2([f^m(y),f^{m+2}(y)])\Leftrightarrow f(f([f^m(y),f^{m+2}(y)]))\Leftrightarrow f([f^{m+3}(y),f^{m+1}(y)])\Leftrightarrow f([f^m(y),f^{m+2}(y)])\Leftrightarrow[f^{m+3}(y),f^{m+1}(y)]$.

又 $[f^m(y),f^{m+2}(y)]$ 与 $[f^{m+2}(y),f^{m+1}(y)]$ 只有一个不是周期点的公共点 $f^{m+2}(y)$, 令 $J=[f^m(y),f^{m+2}(y)]$, $K=[f^{m+2}(y),f^{m+1}(y)]$, 则 $f^3(J)\cap f^3(K)\Leftrightarrow[f^{m+3}(y),f^{m+1}(y)]\Leftrightarrow J\cup K$, 由引理6, 则 f 必有非2方幂的周期点, 故 f 在 I 上为 SS 混沌. 证毕.

同理可证下面的对称情况.

定理5 设$f: I\to I$连续,若$y\in W\omega(f)-P(f)$,且$\exists m>0$使得$f^{m+1}(y)<f^{m+2}(y)<f^{m}(y)<f^{m+3}(y)$,则$f$在$I$上为$SS$混沌.

定理6 设$f: I\to I$连续,若$y\in W\omega(f)-P(f)$,且$\exists m>0$使得$f^{m+3}(y)<f^{m+2}(y)<f^{m}(y)<f^{m+1}(y)$,则$f$在$I$上为$SS$混沌.

证明 由$f([f^{m}(y),f^{m+1}(y)])\supseteq[f^{m+2}(y),f^{m+1}(y)]\Leftrightarrow[f^{m}(y),f^{m+1}(y)]$,故存在$T\in[f^{m}(y),f^{m+1}(y)]$使得$f(T)=T$. 又$f^2([f^{m+2}(y),f^{m}(y)])\cap f^2([f^{m}(y),T])\Leftrightarrow f([f^{m+3}(y),f^{m+1}])\cap f([T,f^{m+1}(y)])\Leftrightarrow f([f^{m+2}(y),f^{m}(y)])\cap f([T,f^{m+1}(y)])\Leftrightarrow[f^{m+3}(y),f^{m+1}(y)]\cap[f^{m+2}(y),T]\Leftrightarrow[f^{m+2}(y),T]$,令$J=[f^{m+2}(y),f^{m}(y)]$,$K=[f^{m}(y),T]$,则$J,K$只有一个不是周期点的公共点$f^{m}(y)$,且$f^2(J)\cap f^2(K)\Leftrightarrow[f^{m+2}(y),T]\Leftrightarrow J\cup K$,则$f$必有非2方幂周期点,故$f$在$I$上为$SS$混沌. 证毕.

同理可证下面的对称情况.

定理7 设$f: I\to I$连续,若$y\in W\omega(f)-P(f)$,且$\exists m>0$使得$f^{m+1}(y)<f^{m}(y)<f^{m+2}(y)<f^{m+3}(y)$,则$f$在$I$上为$SS$混沌.

定理8 设$f: I\to I$连续,若$y\in W\omega(f)-P(f)$,且$\exists m>0$使得$f^{m+2}(y)<f^{m+3}(y)<f^{m}(y)<f^{m+1}(y)$,则$f$在$I$上为$SS$混沌.

证明 由$f([f^{m}(y),f^{m+1}(y)])\supseteq[f^{m+2}(y),f^{m+1}(y)]\Leftrightarrow[f^{m}(y),f^{m+1}(y)]$,故存在$T\in[f^{m}(y),f^{m+1}(y)]$使得$f(T)=T$. 又$f^2([f^{m}(y),T])\Leftrightarrow f([T,f^{m+1}(y)])\Leftrightarrow[f^{m+2}(y),T]\Leftrightarrow[f^{m}(y),T]$,及$f^2([f^{m+2}(y),f^{m}(y)])\Leftrightarrow f([f^{m+3}(y),f^{m+1}(y)])\Leftrightarrow f([f^{m}(y),f^{m+1}(y)])\Leftrightarrow[f^{m+2}(y),f^{m+1}(y)]\Leftrightarrow[f^{m+2}(y),T]\Leftrightarrow[f^{m+2}(y),f^{m}(y)]$. 令$J=[f^{m+2}(y),f^{m}(y)]$,$K=[f^{m}(y),T]$,则$J,K$只有一个不是周期点的公共点$f^{m}(y)$,且$f^2(J)\cap f^2(K)\Leftrightarrow[f^{m+2}(y),T]\Leftrightarrow J\cup K$,则$f$必有非2方幂周期点,故$f$在$I$上为$SS$混沌. 证毕.

同理可证下面的对称情况.

定理9 设$f: I\to I$连续,若$y\in W\omega(f)-P(f)$,且$\exists m>0$使得$f^{m+1}(y)<f^{m}(y)<f^{m+3}(y)<f^{m+2}(y)$,则$f$在$I$上为$SS$混沌.

参考文献:

[1] 赵勇. 线段上连续自映射混沌现象的几个充分条件[J]. 四川师范学院学报:自然科学版,2002,23(4):342-344

[2] 耿祥义. Li-Yorke 混沌的充要条件[J]. 数学学报,2001(5):20-23

[3] LIAO G. A Note on a Chaotic with Topolgical Entropy[M]. Jilin Vniv Preprint,1985

[4] 周作领. 一维动力系统[J]. 数学季刊,1988,3(1):42-64

[5] 廖公夫,范钦杰. 混沌与SS混沌不等价[J]. 数学年刊,2000,21A(6):749-754

[6] 王宏仁,范钦杰. 强非游荡集与分布混沌[J]. 吉林大学学报:理学版,2009,47(6):1177-1178

[7] 赵勇. Li-Yorke 混沌映射下周期点集的性质[J]. 四川师范学院学报:自然科学版,1999,20(1):25-30

[8] LI T,YORKE J. Period Three Implies Chaos[J]. AmerMath Monthly,1975,82(10):985-992

[9] SCHWEITER B,SMITAL J. Measures of Chaos and Spectal Decomposition of Dynamical System of the Interval[J]. Tran Amer Math Soc,1994,344(2):737-754

[10] 熊金城. 线段映射的动力体系:非游荡集,拓扑熵及混乱[J]. 数学进展,1988,17(1):1-11

[11] 何兴,舒永录,赵显锋. 离散混沌系统的脉冲控制[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版,2010,27(5):431-434

Weak Limit Points and SS Chaos

DENG Jin-hong

(College of Mathematical Science,Guangxi Normal University,Guangxi Guilin 541004,China)

Abstract: In this paper,the concept of $W\omega(f)$-weak limit points is introduced so that $\omega(f)\subset W\omega(f)$, then the sufficient condition of SS chaos of self-maps f on $I=[0,1]$ is discussed. Consequently,the research area of SS chaos and recurrent points is extended.

Key words: $W\omega(f)$-weak limit points; SS chaos; sufficient-condition

责任编辑:李翠薇