文章编号: 1672 - 058X(2011)02 - 0154 - 03

二重积分中值点渐近性的讨论

郭 辉,谭 艳
(重庆师范大学 数学学院,重庆 401331)

摘 要: 利用已有的积分第一中值定理的中值点的渐近性的一些结论,通过对中值点渐进性的研究,讨论了含两个函数的二重积分中值定理中值点的渐近性,并得出类似于积分第一中值定理及其中值点渐近性的结论.

关键词: 积分中值定理; 中值点; 渐近性
中图分类号: O13 **文献标志码**: A

讨论积分中值定理中值点的渐近性的文献很多,文献[1]最早讨论第一中值定理,文献[2]讨论积分第二中值定理的中值点渐近性,文献[3]总结了积分第一、二中值定理的中值点的渐近性,并得出了一些比文献[1]更强的结果. 文献[4]讨论了最简单的二重积分中值定理中值点的渐近性.

这些文献中,没有人讨论含两个函数的二重积分中值定理中值点的渐近性. 此处就这方面进行了研究,定义二重积分中值定理的正则中值点(ζ_x,η_y)并讨论它的渐近性.

1 积分中值点的渐近性

1.1 一元积分中值点的渐近性

积分第一中值定理中值点的渐近线在文献[2][3][5][6][7]中已经给予了讨论,在这里先归纳一元函数第一积分中值定理中值点ζ渐近性的一些结论.

定理 1[7] 设函数$g(x)$在区间$[a,b]$上可积且不变号; 对充分小的$\delta>0(a+\delta<b)$,函数$g(x)$在$[a,a+\delta]$上连续,且$g(a)\neq 0$,函数$f(x)$在区间$[a,b]$上n阶可导,$f'_+(a)=f''_+(a)=f_+^{(3)}(a)=\cdots=f_+^{(n-1)}(a)=0$,$f_+^{(n)}(a)\neq 0$,且$f^{(n)}(x)$在$x=a$处连续; 则积分第一中值定理的$\zeta$,满足$\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{\zeta-a}{x-a}=\sqrt[n]{\dfrac{1}{n+1}}$,$x\in(a,b)$.

定理 2[2] 若$f(x)$在$[a,b]$上连续,$\lim\limits_{b\to a}\dfrac{f(b)-f(a)}{(b-a)^q}=A(\alpha>0)$,$A\neq 0$,实数$\alpha>0$,$g(x)$在$[a,b]$上连续且不变号,$\lim\limits_{b\to a}\dfrac{g(b)}{(b-a)^p}=B\neq 0$,实数$p>-1$,$A$和$B$为实数,则(1)式中的中值点$\zeta$,满足$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\zeta-a}{x-a}=\sqrt[q]{\dfrac{p+1}{p+q+1}}$.

推论 1[7] 若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,$f'_+(a)$存在且$f'_+(a)\neq 0$; 函数$g(x)$在$[a,b]$上m阶导数,且$g(a)=g'_+(a)=g''_+(a)=\cdots=g_+^{(m-1)}(a)=0$,$g_+^{(m)}(a)\neq 0$,并且$g^{(m)}(x)$在$a$点连续,函数$g(x)$在$[a,b]$上不变号,则第一积分中值定理中的中值点$\zeta$,满足$\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{\zeta-a}{x-a}=\dfrac{m+1}{m+2}$,$x\in(a,b)$.

特别地,得到积分第一中值定理中值点ζ的渐近性的一个简单推论.

推论 2[2] 若函数$f(x)$在$[a,b]$上有连续导数,$g(x)$在$[a,b]$上连续且不变号,$f'(a)\neq 0$,$g(a)\neq 0$,则积分第一中值定理的中值点ζ满足$\lim\limits_{b\to a}\dfrac{\zeta-a}{b-a}=\dfrac{1}{2}$.

收稿日期: 2010 - 05 - 25; **修回日期**: 2010 - 06 - 30.
作者简介: 谭艳(1988 -),女,重庆云阳人,从事积分中值定理研究.

2　二元积分第二中值定理中值点的渐近性

在文献[2][3][8]中都对一元函数积分第二中值定理中值点的渐近性进行了讨论，而文献[4][9]在文献[2][3][8]的基础上对二重积分中值定理中值点的渐近性进行了讨论，并得到二重积分正则中值点(ζ_x,η_y)的定义如下：

定义 1[4]　设函数$f(x,y)$在区域$D_{xy}=\{(u,v)\mid a\leqslant u\leqslant x,b\leqslant v\leqslant y\}$上连续，函数$g(x,y)$在$D_{xy}$连续且不变号，则至少存在一点$(\zeta_x,\eta_y)\in D_{xy}$，使得：

$$\iint_{D_{xy}} f(u,v)g(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_a^x f(u,\eta_y)\int_b^y g(u,v)\,\mathrm{d}v\mathrm{d}u=$$

$$\int_b^y \mathrm{d}v\int_a^x f(u,\eta_y)g(u,v)\,\mathrm{d}u=f(\zeta_x,\eta_y)\int_b^y\int_a^x g(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

则称(ζ_x,η_y)为正则中值点.

定理 1　设$f(u,v)$在$D_{xy}=\{(u,v)\mid a\leqslant u\leqslant x,b\leqslant v\leqslant y\}$上连续，$g(u,v)$在$D_{xy}$上连续且不变号，点$(a,b)$为$D_{xy}$的边界点$(x,y)$的极限点，且$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x,y)-f(a,y)}{(x-a)^{\alpha}}=A(y)$，$\lim\limits_{y\to b}\dfrac{f(x,y)-f(x,b)}{(y-b)^{\beta}}=B(x)$；其中$\alpha>0$，$\beta>0$，则中值点$(\zeta_x,\eta_y)$有性质$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\zeta_x-a}{x-a}=\dfrac{1}{\sqrt[\alpha]{1+\alpha}}$，$\lim\limits_{y\to b}\dfrac{\eta_y-b}{y-b}=\dfrac{1}{\sqrt[\beta]{1+\beta}}$.

证明　因为$\iint_{D_{xy}} f(u,v)g(u,v)\,\mathrm{d}\sigma$是定义在矩形区域$D_{xy}=\{(u,v)\mid a\leqslant u\leqslant x,b\leqslant v\leqslant y\}$上的二重积分，所以$\iint_{D_{xy}} f(u,v)g(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_a^x\mathrm{d}u\int_b^y f(u,v)g(u,v)\,\mathrm{d}v=\int_b^y\mathrm{d}v\int_a^x f(u,v)g(u,v)\,\mathrm{d}u$对于任一确定点$x(x\neq a)$，$y\to b$，有$\dfrac{\int_a^x\mathrm{d}u\int_b^y f(u,v)g(u,v)\,\mathrm{d}v-\int_a^x\mathrm{d}u\int_b^y f(u,b)g(u,v)\,\mathrm{d}v}{(y-b)^{1+\beta}}$的分子分母同时趋近于 0，即为$\dfrac{0}{0}$型.

由洛必达法可知：

$$\lim_{y\to b}\frac{\int_a^x\mathrm{d}u\int_b^y f(u,v)g(u,v)\,\mathrm{d}v-\int_a^x\mathrm{d}u\int_b^y f(u,b)g(u,v)\,\mathrm{d}v}{(y-b)^{1+\beta}}=$$

$$\lim_{y\to b}\frac{\int_a^x[f(u,y)g(u,y)-f(u,b)g(u,y)]\,\mathrm{d}u}{(1+\beta)(y-b)^{\beta}}\tag{1}$$

又因为函数$f(u,v)$，$g(u,v)$在矩形区域$D_{xy}=\{(u,v)\mid a\leqslant u\leqslant x,b\leqslant v\leqslant y\}$上都连续，所以式子(1)中的积分和极限可以交换次序，即：

$$\lim_{y\to b}\frac{\int_a^x\mathrm{d}u\int_b^y f(u,v)g(u,v)\,\mathrm{d}v-\int_a^x\mathrm{d}u\int_b^y f(u,b)g(u,v)\,\mathrm{d}v}{(y-b)^{1+\beta}}=$$

$$\lim_{y\to b}\frac{\int_a^x[f(u,y)g(u,y)-f(u,b)g(u,y)]\,\mathrm{d}u}{(1+\beta)(y-b)^{\beta}}=$$

$$\frac{1}{(1+\beta)}\int_a^x\lim_{y\to b}\frac{[f(u,y)-f(u,b)]g(u,y)}{(y-b)^{\beta}}\mathrm{d}u=\frac{1}{(1+\beta)}\int_a^x B(u)g(u,b)\,\mathrm{d}u$$

令$\int_b^y f(u,v)g(u,v)\,\mathrm{d}v=f(u,\eta_y)g(u,\eta_y)$可导，则：

$$\lim_{y\to b}\frac{\int_a^x\mathrm{d}u\int_b^y f(u,v)g(u,v)\,\mathrm{d}v-\int_a^x\mathrm{d}u\int_b^y f(u,b)g(u,v)\,\mathrm{d}v}{(y-b)^{(1+\beta)}}=$$

$$\lim_{y\to b}\frac{\int[f(u,\eta_y)-f(u,b)]g(u,\eta_y)(y-b)\,\mathrm{d}u}{(y-b)^{1+\beta}}=\lim_{y\to b}\frac{\int_a^x[f(u,\eta_y)-f(u,b)]g(u,\eta_y)\,\mathrm{d}u}{(y-b)^{\beta}}=$$

$$\lim_{y\to b}\int_a^x \frac{[f(u,\eta_y)-f(u,b)]g(u,\eta_y)}{(\eta_y-b)^\beta}\left(\frac{(\eta_y-b)}{(y-b)}\right)^\beta du=$$

$$\lim_{y\to b}\frac{[f(u,\eta_y)-f(u,b)]g(u,\eta_y)}{(\eta_y-b)^\beta}\lim_{y\to b}\left(\frac{(\eta_y-b)}{(y-b)}\right)^\beta du=\int_b^y B(u)g(u,b)\,du\lim_{y\to b}\left(\frac{(\eta_y-b)}{(y-b)}\right)^\beta$$

由上可得$\lim\limits_{y\to b}\dfrac{\eta_y-b}{y-b}=\dfrac{1}{(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}}$.

其中,$B(u)=\lim\limits_{y\to b}\dfrac{f(u,\eta_y)-f(u,b)}{(\eta_y-b)^\beta}$.

另一方面,对于任一确定点$y(y\neq b)$,$x\to a$时,同理可得:

$$\lim_{x\to a}\frac{\int_b^y dv\int_a^x f(u,v)g(u,v)\,du-\int_b^y dv\int_a^x f(a,v)g(u,v)\,du}{(x-a)^{1+\alpha}}=$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\int_b^y [f(x,v)-f(a,v)]g(x,v)\,dv}{(1+\alpha)(x-a)^\alpha}=\frac{1}{1+\alpha}\int_b^y A(v)g(a,v)\,dv$$

令$\int_a^x f(u,v)g(u,v)\,dv=f(\zeta_x,v)g(\zeta_x,v)(x-a)$,则:

$$\lim_{x\to a}\frac{\int_b^y du\int_a^x f(u,v)g(u,v)\,dv-\int_b^y du\int_a^x f(a,v)g(u,v)\,dv}{(x-a)^{1+\partial}}=$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\int_b^y [f(\zeta_x,v)-f(a,v)]g(\zeta_x,v)(x-a)\,dv}{(x-a)^{1+\alpha}}=\lim_{x\to a}\frac{\int_b^y [f(\zeta_x,v)-f(a,v)]g(\zeta_x,v)\,dv}{(x-a)^\alpha}$$

$$\int_b^y\lim_{x\to a}\frac{[f(\zeta_x,v)-f(a,v)]g(\zeta_x,v)}{(\zeta_x-a)^\alpha}\lim_{x\to a}\left(\frac{(x-a)}{(\zeta_x-a)}\right)^\alpha dv=\int_a^x A(v)g(a,v)\,dv\lim_{x\to a}\left(\frac{(\zeta_x-a)}{(x-a)}\right)^\alpha$$

则有$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\zeta_x-a}{x-a}=\dfrac{1}{(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}$,其中$A(v)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(\zeta_x,v)-f(a,v)}{(\zeta_x-a)^\alpha}$.

3 结 论

对二重积分中值定理中值点的渐近性进行了讨论. 通过比较,二重积分中值定理中值点渐近性的一些结论完全可以由一元函数中值点渐近性推广得到. 此处二元函数中值点渐近性的一些简单结论是否可以推广到多元函数中值点渐近性的讨论,有待进一步研究,但其方法很具有参考意义.

参考文献:

[1] BERNARD JACOBSON. On the Mean Value Theorem for Integrals [J]. Amer Math Monthly,1982,89:300-301

[2] 郑权. 关于第二积分中值定理的中值点 ξ 的渐近性质 [J]. 大学数学,2005(6):113-115

[3] 郑权. 积分第一、二中值定理的中间点的渐近性质的一般性定理 [J]. 数学实践与认识,2005,35(5):240-243

[4] 蔡文康. 二重积分中值定理中值点的渐近性 [J]. 上海电力学院学报,2005(1):90-92

[5] 邵品琮. 关于积分第一中值定理 [J]. 曲阜师范学报:自然科学版,1979,2(5):12-15

[6] 刘一鸣. 关于积分第一中值定理的证明 [J]. 曲阜师范学报,1980,2(6):56-58

[7] 王成伟,张晓燕. 第一积分中值定理中间点的渐进性 [J]. 北京服装学院学报,2000(4):23-24

[8] 唐金菊. 积分第二中值定理中的渐进性 [J]. 芜湖职业技术学院报,2001,2(3):38-40

[9] 杨彩萍. 二重积分中值定理中间点的进一步讨论 [J]. 中国民航学报,2000(1):57-61

(下转第160页)

发展,以便可以为社会提供更多更优良的劳动力,为社会创造更多社会财富,同时也为构建社会主义和谐社会贡献力量。

参考文献:

[1] 袁建文. 教育对经济发展的影响分析[J]. 北方经贸,2006(08):35-40
[2] 陈正伟. 卫生业对经济影响的定量分析[J]. 西北农林科技大学学报:社会科学版,2004,04(03):39-45
[3] 董承章. 投入产出分析[M]. 北京:中国财政经济出版社,2000
[4] 吴超林,温见海. 教育经济学[M]. 青海:青海人民出版社,1983
[5] 苗润生. 中国地区综合经济实力评价方法研究[M]. 北京:中国人民大学出版社,2006

Modeling Analysis of the Impact of Chongqing's Education on Economy

ZHANG Fang-ling

(School of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

Abstract: By using input-output analysis method and comprehensive evaluation method, the impact of Chongqing's education on economy is analyzed. Firstly, this paper makes industry association influence analysis of the impact of education on Chongqing's economy by using influence coefficient and response coefficient calculated from input-output table, then uses cost-benefit analysis method to analyze the economic benefit of Chongqing's education, and uses comprehensive evaluation model based on Analytic Hierarchy Process to make comprehensive evaluation on the economic benefit of Chongqing's education.

Key words: input-output analysis method; industry association influence; economic benefit analysis; Analytic Hierarchy Process

责任编辑:代晓红

(上接第156页)

Discussion on Asymptotic Properties of Point of Mean Value of Double Integral

GUO Hui, TAN Yan

(School of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: With the help of some research achievements of asymptotic properties of mean value point of the first mean value theorem for integral and through studying asymptotic properties of mean value point, this paper discusses asymptotic properties of point of mean value of the first mean value theorem for double integral of binary function and gets a result that is similar to the first mean value theorem for integral and its asymptotic properties of mean value point.

Key words: mean value theorem for integral; point of mean value; asymptotic properties

责任编辑:李翠薇

校　对:罗泽举