文章编号: 1672 - 058X(2011)02 - 0145 - 02

一类多目标规划问题的混合型对偶*

赵 洁,陈 林,赵克全
(重庆师范大学 数学学院,重庆 400047)

摘 要: 在非光滑 B-预不变凸性条件下,建立了一类多目标规划问题的混合型对偶模型的弱对偶和强对偶结果.

关键词: 不变凸集; B-预不变凸函数; 多目标规划; 混合型对偶
中图分类号: O221.2; O172.2 **文献标志码:** A

近年来,非光滑多目标优化已成为优化领域中的研究热点. 此处利用 Clarke 的非光滑理论[1],在非光滑 B-预不变凸性条件下建立了一类非光滑多目标规划问题的混合对偶模型的弱对偶和强对偶定理. 结果对文献[2-4]中部分结果进行了改进与推广.

1 预备知识

定义 1[1] 实值函数 $f: R^n \to R$ 称为在点 $u \in R^n$ 局部 Lipscitz,若存在 $K>0$ 使得对于所有 $x, y \in U(u)$ 都有 $|f(x) - f(y)| \leqslant K \| x - y \|$. 若 R^n 上的每一点都是局部 Lipscitz,则函数 f 是局部 Lipscitz.

定义 2[1] f 是局部 Lipscitz 函数,f 在 x 方向为 $v \in R^n$ 的 Clarke 广义方向导数为: $f^{\circ}(x; v) = \limsup\limits_{\substack{y \to x \\ t \to 0}} \dfrac{f(y+tv) - f(y)}{t}$,$f$ 在 x 的 Clarke 广义梯度为: $\partial f(x) = \{\xi \in R^n | f^{\circ}(x; v) \geqslant [\xi; v], \forall v \in R^n\}$.

定义 3[1] 设 f 是 X 上的局部 Lipschits 函数,$y \in X$ 且 f 在 y 正则,称 f 在 $y \in X$ 时是关于 η 和 b 的 B-预不变凸函数. 若 $\forall x \in X$, $\exists b: X \times X \times [0,1] \to R^+$,且 $\lim\limits_{\lambda \to 0} b(x,z,\lambda) = b(x,z,0) > 0$, $b(x,y,0)[f(x) - f(y)] \geqslant [\eta(x,y), \xi]$, $\forall \xi \in \partial f(y)$.

考虑下面的多目标规划问题(MP)和混合对偶模型(MD):

$$(\mathrm{MP}) \quad \min \ f(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x))$$
$$\text{s.t.} \quad g_j(x) \leqslant 0; j = 1, 2, \cdots, m$$
$$h_s(x) = 0; s = 1, 2, \cdots, p$$

$$(\mathrm{MD}) \quad \max \ \varphi(y, \mu, \nu) = f(y) + [\mu^{\mathrm{T}} g(y) + \nu^{\mathrm{T}} h(y)] e$$
$$\text{s.t.} \quad 0 \in \lambda^{\mathrm{T}} \partial f(y) + \mu^{\mathrm{T}} \partial g(y) + \nu^{\mathrm{T}} \partial h(y), \forall x \in D \tag{1}$$
$$\mu^{\mathrm{T}} \partial g(y) + \nu^{\mathrm{T}} \partial h(y) \geqslant 0, y \in X \tag{2}$$
$$0 \neq \lambda \in R_+^k, \lambda^{\mathrm{T}} e = 1, e = (1, 1, \cdots, 1)^{\mathrm{T}} \in R^k \tag{3}$$
$$\mu \in R_+^m, \nu \in R^p \tag{4}$$

2 主要结论及其证明

定理 1 设 $\bar{x} \in D$,若存在 $\bar{\lambda} \in R_+^k$, $\bar{\mu} \in R_+^m$, $\bar{\nu} \in R^p$ 满足 K - T 条件: $0 \in \sum\limits_{i \in I} \bar{\lambda}_i \partial f_i(\bar{x}) + \sum\limits_{j \in J} \bar{\mu}_j \partial g_j(\bar{x}) +$

收稿日期: 2010 - 07 - 01; 修回日期: 2010 - 08 - 10.
* 基金项目: 重庆市教委项目(KJ090812); 重庆师范大学青年项目(08XLQ01).
作者简介: 赵洁(1986 -),女,山西忻州人,硕士研究生,从事非光滑多目标优化研究.

$\sum_{s\in S}\bar{\nu}_s\partial h_s(\bar{x})$；$\bar{\mu}_j g_j(\bar{x})=0, j\in J$；$\bar{\lambda}\geqslant 0, \bar{\mu}\geqq 0$. 且满足：(ⅰ) $f_i(i\in I)$ 在$\bar{x}$上关于 η 和 b 是 B－预不变凸函数，$\forall x, z\in X, \lim_{\lambda\to 0}b(x,z,\lambda)=b(x,z,0)>0$, $S_1=\{s:\bar{\nu}_s>0\}$, $S_2=\{s:\bar{\nu}_s<0\}$, $g_j(j\in J)$ 和 $h_s(s\in S_1)$ 在$\bar{x}$上关于相同的 η 和 b 是 B－预不变凸函数，$h_s(s\in S_2)$ 在$\bar{x}$上关于相同的 η 和 b 是 B－预不变凹函数；(ⅱ) $b(x,\bar{x})>0$, $\forall x\in D$；(ⅲ) $f_i, g_j, h_{s_1}, -h_{s_2}$ 正则，则$\bar{x}$是(MP)的弱有效解.

证明 设$\bar{x}$不是(MP)的弱有效解，则存在$\hat{x}\in D$，有：$f_i(\hat{x})<f_i(x)$；$g_j(\hat{x})-g_j(\bar{x})\leqslant 0$；$h_s(\hat{x})-h_s(\bar{x})=0$. f_i 在$\bar{x}$上为 B－预不变凸函数，$b(\hat{x},\bar{x},0)[f_i(\hat{x})-f_i(\bar{x})]\geqslant[\eta(\hat{x},\bar{x}),\alpha_i]$, $\forall\alpha_i\in\partial f(\bar{x})$，则 $[\eta(\hat{x},\bar{x}),\bar{\lambda}_i\alpha_i]<0$. 又因为 g_j 和 $h_s(s\in S_1)$ 在$\bar{x}$上是 B－预不变凸函数，$h_s(s\in S_2)$ 在$\bar{x}$上是 B－预不变凹函数，有 $[\eta(\hat{x},\bar{x}),\bar{\mu}_j\beta_j]\leqslant 0$, $\forall\beta_j\in\partial g(\bar{x}), j\in J(\bar{x})$；$[\eta(\hat{x},\bar{x}),\bar{\nu}_s\gamma_s]\leqslant 0$, $\forall\gamma_s\in\partial h_s(\bar{x})\ s\in S_1(\bar{x})$；$[\eta(\hat{x},\bar{x}),\bar{\nu}_s\gamma_s]\leqslant 0$, $\forall\gamma_s\in\partial h_s(\bar{x})\ s\in S_2(\bar{x})$.

由 $f_i, g_j, h_{s_1}, -h_{s_2}$ 正则，联合上式有：$[\eta(\hat{x},\bar{x}), \sum_{i\in I}\bar{\lambda}_i\alpha_i+\sum_{j\in J}\bar{\mu}_j\beta_j+\sum_{s\in S}\bar{\nu}_s\gamma_s]<0$，与原假设矛盾.

下面考虑混合型对偶问题(MP)，建立弱对偶和强对偶定理.

定理2(弱对偶定理) x 和(y,λ,μ,ν)分别为(MP)和(MD)的可行解，若 $\lambda^{\mathrm{T}}f+\mu^{\mathrm{T}}g+\nu^{\mathrm{T}}h$ 在 y 上关于 η 和 b 为 B－预不变凸函数，$\forall y,z\in X, \lim_{\lambda\to 0}b(y,z,\lambda)=b(y,z,0)>0$，且 $f_i, g_j, h_{s_1}, -h_{s_2}$ 正则，则有 $f(x)\not<\varphi(y,\mu,\nu)$.

证明 假设 $f(x)<\varphi(y,\mu,\nu)$，由式(3)有 $\lambda^{\mathrm{T}}f(x)<\lambda^{\mathrm{T}}f(y)+\mu^{\mathrm{T}}g(y)+\nu^{\mathrm{T}}h(y)$，因为 x 和(y,λ,μ,ν)分别为(MP)和(MD)的可行解，则有 $g_j(x)\leqslant 0\ (j=1,2,\cdots,m)$；$h_s(x)=0\ (s=1,2,\cdots,p)$. 又因为 $\mu\in R_+^m$, $\nu\in R^p$，则 $\mu^{\mathrm{T}}g(x)+\nu^{\mathrm{T}}h(x)\leqslant 0$. 联合上式，有：

$$\lambda^{\mathrm{T}}f(x)+\mu^{\mathrm{T}}g(x)+\nu^{\mathrm{T}}h(x)<\lambda^{\mathrm{T}}f(y)+\mu^{\mathrm{T}}g(y)+\nu^{\mathrm{T}}h(y)$$

$$\lambda^{\mathrm{T}}[f(x)-f(y)]+\mu^{\mathrm{T}}[g(x)-g(y)]+\nu^{\mathrm{T}}[h(x)-h(y)]<0$$

因为 $\lambda^{\mathrm{T}}f+\mu^{\mathrm{T}}g+\nu^{\mathrm{T}}h$ 在 y 上关于 η 和 b 为 B－预不变凸函数，由 $f_i, g_j, h_{s_1}, -h_{s_2}$ 正则及定理1，有：$b(x,y,0)[\lambda^{\mathrm{T}}(f(x)-f(y))+\mu^{\mathrm{T}}(g(x)-g(y))+\nu^{\mathrm{T}}(h(x)-h(y))]\geqslant[\eta(x,y),\xi]$, $b(x,y,0)>0$ 得 $[\eta(x,y),\xi]<0$, $\forall\xi\in\lambda\partial f(y)+\mu\partial g(y)+\nu\partial h(y)$，与原假设矛盾.

定理3(强对偶定理) $\bar{x}$为(MP)的弱有效解，(MD)满足K-T约束规格，存在$\bar{\lambda}\in R_+^k, \lambda\geqslant 0, \bar{\mu}\in R_+^m, \bar{\nu}\in R^p$ 使得$(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu},\bar{\nu})$是(DMNOP)可行解，有(MP)和(MD)的目标函数值相等. 进一步，若弱对偶条件成立，则$(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu},\bar{\nu})$是(MD)的弱有效解.

证明 $\bar{x}$为(MP)的弱有效解，满足K-T约束规格，$\exists\bar{\lambda},\bar{\mu},\bar{\nu}$使：$0\in\sum_{i\in I}\bar{\lambda}_i\partial f_i(\bar{x})+\sum_{j\in J}\bar{\mu}_j\partial g_j(\bar{x})+\sum_{s\in S}\bar{\nu}_s\partial h_s(\bar{x})$；$\bar{\mu}_j g_j(\bar{x})=0$；$\bar{\lambda}\geqslant 0, \bar{\mu}\geqq 0$. 显然，$(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu},\bar{\nu})$是(MD)的可行解. 设$(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu},\bar{\nu})$不是(MD)的弱有效解，则 $\exists(\hat{x},\hat{\lambda},\hat{\mu},\hat{\nu})$是(MD)的可行解，$f(\bar{x})+[\bar{\mu}^{\mathrm{T}}g(\bar{x})+\bar{\nu}^{\mathrm{T}}h(\bar{x})]\mathrm{e}=f(\bar{x})<f(\hat{x})+[\hat{\mu}^{\mathrm{T}}g(\hat{x})+\hat{\nu}^{\mathrm{T}}h(\hat{x})]\mathrm{e}$，这与弱对偶定理矛盾.

参考文献：

[1] CLARKE F H. Optimization and Nonsmooth Analysis [M]. NewYork: John Wiely, 1983

[2] 李延忠，邹杰涛，王作全. B-凸函数下多目标规划的Mond-Weir对偶和Wolf对偶 [J]. 吉林大学学报：自然科学版，1999(1): 38-40

[3] 赵克全. B-预不变凸函数在多目标规划中的对偶问题 [J]. 重庆师范大学学报：自然科学版，2008, 25(2): 1-3

[4] 赵克全，罗杰，唐莉萍. 一类非光滑规划问题的Mond Weir和Wolf对偶 [J]. 重庆师范大学学报：自然科学版，2010, 27(1): 1-5

Mixed Type Duality for a Class of Multi-objective Programming Problems

ZHAO Jie, CHEN Lin, ZHAO Ke-quan

(College of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: In this paper, mixed type dual model is researched for a class of multi-objective programming problems. Weak duality theorem and strong duality theorem are established under the assumption of nonsmooth B-preinvexity.

Key words: invex sets; B-preinvex functions; multi-objective programming; mixed type duality

责任编辑：李翠薇