第 28 卷第 2 期 重庆工商大学学报(自然科学版) 2011 年 4 月
Vol. 28 NO. 2 J Chongqing Technol Business Univ. (Nat Sci Ed) Apr. 2010

文章编号: 1672 - 058X(2011)02 - 0115 - 04

区间数 Fuzzy 集的一种模式识别方法*

夏昊冉,胡永培
(安徽大学 数学科学学院,合肥 230039)

摘　要: 运用 Fuzzy 集理论对区间数的模式识别问题进行了研究. 在确定系数 Fuzzy 集的基础上,提出了"区间数距离"和"贴近区间"的概念,接着给出了两个贴近区间的模型; 最后,实例的求解证明了该算法的可能性和有效性.

关键词: 区间数 Fuzzy 集; 模式识别; 距离; 择近原则
中图分类号: O195　　　　**文献标志码**: A

Fuzzy 逻辑是一门崭新的数学分支,它始于 1965 年美国自动控制论专家 L. A. Iadeh 的开创性论文"Fuzzy 集合". 凭借 Fuzzy 集中的隶属原则和贴近原则,人们能够对问题做出较准确的评判和决策. 但事物的特征信息存在着复杂性、模糊性和不确定性,如: 一个测验,80 分到 90 分为等级"良",70 分到 80 分为等级"中等",一个考试估计分数在 77 分到 82 分之间,那么这个考生的成绩可能为什么等级,正如这样,得到的数据并非是一个确定的信息,而是一个区间或一个范围. 针对这种情形,有学者提出了建立区间数 Fuzzy 集[1],文献[2]给出一种区间数 Fuzzy 集的隶属原则,并介绍了一种模式识别的方法. 郭春香,郭耀煌[3]提出格序决策理论,对区间数 Fuzzy 集做了研究. 运用区间数 Fuzzy 集解决模糊综合评价的文献更是很多,比如文献[4][5].

此处基于区间数 Fuzzy 集知识,对文献[3]提出的"偏好距离"进行简化,并在贴近度的基础上,提出贴近区间概念,给出了一种新的区间数 Fuzzy 集模式识别方法,实例证明了该方法的可靠性和有效性.

1　预备知识

定义 1　设 $A = [a^-, a^+] = \{x \mid a^- \leqslant x \leqslant a^+\}$,称 A 为区间数; 若 $a^- = a^+$,则称 A 为退化区间数; 若 $0 \notin A$,称 A 为无零区间数; 若 $A = [0,1]$,则称 A 为单位闭区间,记作 I.

定义 2　设 $A = [a^-, a^+]$, $B = [b^-, b^+]$,则 $A + B = [a^- + b^-, a^+ + b^+]$; $A - B = [a^- - b^+, a^+ - b^-]$; $A \times B = [\min\{a^-b^-, a^-b^+, a^+b^+, a^+b^-\}, \max\{a^-b^-, a^-b^+, a^+b^+, a^+b^-\}]$; $A \div B = [a^-, a^+] \times \left[\frac{1}{b^+}, \frac{1}{b^-}\right]$; $A \vee B = [\max\{a^-, b^-\}, \max\{a^+, b^+\}]$; $A \wedge B = [\min\{a^-, b^-\}, \min\{a^+, b^+\}]$.

定义 3　设 X 为非空普通集合,称映射 $f: X \to [I]$ 为 X 上的区间数 Fuzzy 集. X 上所有的区间数 Fuzzy 集记为 $IF(X)$; 论域 U 上所有区间数 Fuzzy 子集构成的子集称为区间数 Fuzzy 幂集,记作 $IF(U)$.

2　区间数 Fuzzy 集的序

根据文献[6]中的偏序概念,可以推出如下定理.

收稿日期: 2010 - 06 - 03; 修回日期: 2010 - 06 - 30.
* 基金项目: 国家自然科学基金(60675031).
作者简介: 夏昊冉(1985 -),男,安徽合肥人,硕士研究生,从事智能计算的应用研究.

定理 1　若 P 是一个区间数集合，$\forall A=[a^-,a^+],B=[b^-,b^+]\in P$，称 P 为一个偏序集，满足：$A\leqslant B\Leftrightarrow a^-\leqslant b^-,a^+\leqslant b^+$.

从自反性、反对称性、传递性三方面容易验证.

3　区间数上的距离

可以根据实数上距离的定义，给出区间数上的距离，如下：

定理 2　设 $A=[a^-,a^+],B=[b^-,b^+]$，则区间 A 与区间 B 的距离可以定义为 $d(A,B)=|a^- -b^-|+|a^+ -b^+|$. 显然，这个距离的定义同样满足非负性、自反性和三角不等式.

文献 [3] 通过与两区间数的拟上下确界比较，计算其之间的“偏好距离”，得出这两个区间的“序关系”. 此处提出如下定理，无须求其拟上下确界，简化了文献 [3] 中所提及的方法，但仍可以得到相同的结论.

图 1　两区间关系图示

首先，假设这两个区间是不具备定理 1 条件的“偏序关系”，否则“序关系”已经确定.

即对图 1 的 b 情况做讨论.

定理 3　对于不满足定理 1 的两区间 $A=[a^-,a^+],B=[b^-,b^+]$，C 为区间 A,B 的拟下(上)确界[3]；$D=[d^-,d^+]$ 为任意一个满足序关系 $D\leqslant A,D\leqslant B(A\leqslant D,B\leqslant D)$ 的区间，则 $d(A,B)$ 和 $d(B,C)$ 的大小关系与 $d(A,D)$ 和 $d(B,D)$ 的大小关系相一致.

证明　不妨设 $a^-\leqslant b^-,a^+\geqslant b^+$，$C$ 为 A,B 的拟下确界，则 $C=[a^-,b^+]$，$d^-\leqslant a^-,d^+\leqslant a^+$；$d^-\leqslant b^-,d^+\leqslant b^+$；$d(A,C)=|a^- -a^-|+|a^+ -b^+|=a^+ -b^+$；$d(B,C)=|b^- -a^-|+|b^+ -b^+|=b^- -a^-$. 所以 $d(A,C)-d(B,C)=(a^+ +a^-)-(b^+ +b^-)$. 同理 $d(A,D)-d(B,D)=(a^+ +a^-)-(b^+ +b^-)$，所以 $d(A,C)-d(B,C)=d(A,D)-d(B,D)$. 即 $d(A,B)$ 和 $d(B,C)$ 的大小关系与 $d(A,D)$ 和 $d(B,D)$ 的大小关系相一致.

该定理说明，在求区间数的序关系时，对于不具备偏序关系的区间，只需利用距离定义，与某一“基准”比较即可. “基准”可以是拟上、下确界，也可以是其他区间.

实例 1　(数据来自于文献 [3])

$A=[0.189\,0,0.197\,6]$，$B=[0.202\,2,0.215\,4]$，$C=[0.202\,1,0.211\,2]$，$D=[0.186\,5,0.196\,4]$，$E=[0.188\,8,0.198\,3]$.

根据定理 1，有如下序关系：$D<\begin{matrix}A\\E\end{matrix}<C<B$(其中 A,E 无法比较).

以 D 为基准，利用定理 3，得 $d(D,A)=0.003\,7$，$d(D,E)=0.004\,2$，所以 $d(D,A)<d(D,E)$，也就是 A 离 E 较近. 有理由认为 $D<A<E<C<B$，其判断结果与文献 [3] 相同.

注：若 $d(D,A)=d(D,E)$，可以认为 $A=E$.

4　贴近原则

定义 4　设 A,B 是论域 U 的区间数 Fuzzy 子集，则 A,B 交集 $A\cap B$，A,B 并集 $A\cup B$，A,B 的包含关系定义如下：

(1) $A\cap B(x)=[\min\{A^-(x),B^-(x)\},\min\{A^+(x),B^+(x)\}]=A(x)\wedge B(x)$.

(2) $A\cup B(x)=[\max\{A^-(x),B^-(x)\},\max\{A^+(x),B^+(x)\}]=A(x)\vee B(x)$.

(3) $A\subseteq B\Leftrightarrow\forall x\in U,A(x)\leqslant B(x)$.

定义 5　设 $A\in IF(U)$，有：

(1) $\mathrm{Hgt}\,A=[\max A^-(x),\max A^+(x)]$，$x\in U$ 叫区间数 Fuzzy 集 A 的高度区间.

(2) $\mathrm{Dpn}\,A=[\min A^-(x),\min A^+(x)]$，$x\in U$ 叫区间数 Fuzzy 集 A 的低度区间.

定义 6 (贴近区间) 设对于每对 $A,B\in IF(U)$,有区间 $q(A,B)$ 对应,满足:
(1) $[0,0]\leqslant q(A,B)\leqslant[1,1]$;(2) $q(A,B)=q(B,A)$;(3) $A\subseteq B\subseteq C$ 时,$q(A,C)\leqslant q(A,B)$.
存在 $q(B,C)$,则称 q 为 $IF(U)$ 中贴近区间,称 $q(A,B)$ 为区间数 Fuzzy 集 A 与 B 的贴近区间.

定理 4 每对 $A,B\in IF(U)$,则 $q(A,B)=\frac{1}{2}(\mathrm{Hgt}(A\cap B)+(1-\mathrm{Dpn}(A\cup B))$ 为 A 与 B 的一贴近区间.

证明
(1) 显然 $[0,0]\leqslant\mathrm{Hgt}(A\cap B)\leqslant[1,1]$,$[0,0]\leqslant\mathrm{Dpn}(A\cup B)\leqslant[1,1]$,则 $[0,0]\leqslant q(A,B)\leqslant[1,1]$.
(2) $q(A,B)=q(B,A)$,显然.
(3) 设 $A=\frac{[a_1^-,a_1^+]}{x_1}+\cdots+\frac{[a_n^-,a_n^+]}{x_n}$,$B=\frac{[b_1^-,b_1^+]}{x_1}+\cdots+\frac{[b_n^-,b_n^+]}{x_n}$,$C=\frac{[c_1^-,c_1^+]}{x_1}+\cdots+\frac{[c_n^-,c_n^+]}{x_n}$.

因为 $A\subseteq B\subseteq C$,所以 $a_i^-\leqslant b_i^-\leqslant c_i^-$,$a_i^+\leqslant b_i^+\leqslant c_i^+$,$i=1,2,\cdots,n$. 不妨设 $a_i=\max\{a_1^-,\cdots,a_n^-\}$,$a_j=\max\{a_1^+,\cdots,a_n^+\}$,$b_s=\min\{b_1^-,\cdots,b_n^-\}$,$b_t=\min\{b_1^+,\cdots,b_n^+\}$,$b_m=\max\{b_1^-,\cdots,b_n^-\}$,$b_r=\max\{b_1^+,\cdots,b_n^+\}$,$c_k=\min\{c_1^-,\cdots,c_n^-\}$,$c_l=\min\{c_1^+,\cdots,c_n^+\}$;$\mathrm{Hgt}(A\cap B)=[a_i,a_j]$,$\mathrm{Dpn}(A\cup B)=[b_s,b_t]$;$\mathrm{Hgt}(A\cap C)=[a_i,a_j]$,$\mathrm{Dpn}(A\cup C)=[c_k,c_l]$;$\mathrm{Hgt}(B\cap C)=[b_m,b_r]$,$\mathrm{Dpn}(B\cup C)=[c_k,c_l]$;$q(A,C)=\frac{1}{2}([a_i,a_j]+[1,1]-[c_k,c_l])$;$q(A,B)=\frac{1}{2}([a_i,a_j]+[1,1]-[b_s,b_t])$;$q(B,C)=\frac{1}{2}([b_m,b_r]+[1,1]-[c_k,c_l])$;$q(A,B)\wedge q(B,C)=\frac{1}{2}[\min\{a_i+1-b_s,b_m+1-c_k\},\min\{a_j+1-b_t,b_r+1-c_l\}]$.

因为 $a_i\leqslant a_m\leqslant b_m$,且 $b_s\leqslant b_k\leqslant c_k$,$a_i-c_k\leqslant a_i-b_s$,$a_i-c_k\leqslant b_m-c_k$,所以$\frac{1}{2}(a_i+1-c_k)\leqslant\frac{1}{2}\min\{a_i+1-b_s,b_m+1-c_k\}$.

同理$\frac{1}{2}(a_j+1-c_l)\leqslant\frac{1}{2}\min\{a_j+1-b_t,b_r+1-c_l\}$,有 $q(A,C)\leqslant q(A,B)\wedge q(B,C)$.

定义 7 (择近原则) 设 U 为论域,q 是 IF 中择近区间,$A=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 是 U 的 n 个区间数 Fuzzy 子集,叫区间数 Fuzzy 模式,A^* 也是一个区间数 Fuzzy 子集. 如果 $i_0\leqslant n$,满足 $q(A^*,A_{i_0})=\max\limits_{i\leqslant n}q(A^*,A_i)$,则说 A^* 与区间数 Fuzzy 模式 A_{i_0} 为 A 最贴近.

实例 2 设一个目标跟踪系统有 5 个区间数 Fuzzy 模式(表 1),现在有 1 个目标 A^*:
$A^*=([0.402,0.412],[0.2,0.221],[0.102,0.135],[0.385,0.421],[0.428,0.472],[0.521,0.552])$,那么 A^* 可能属于 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 中哪个模式?

表 1　目标跟踪系统的区间 Fuzzy 模式

模式 \ 特征	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4	θ_5	θ_6
A_1	[0.43,0.52]	[0.38,0.46]	[0.27,0.32]	[0.55,0.61]	[0.39,0.50]	[0.37,0.44]
A_2	[0.28,0.37]	[0.11,0.22]	[0.18,0.21]	[0.10,0.14]	[0.18,0.26]	[0.19,0.20]
A_3	[0.19,0.21]	[0.18,0.20]	[0.18,0.20]	[0.07,0.10]	[0.09,0.11]	[0.20,0.21]
A_4	0	[0.10,0.11]	[0.17,0.20]	[0.10,0.11]	[0.10,0.11]	[0.10,0.12]
A_5	0	[0.09,0.10]	[0.10,0.12]	[0.09,0.10]	[0.08,0.09]	[0.10,0.12]

解 运用定理 4 算法,得出 $q(A^*,A_1)=[0.541,0.585]$,$q(A^*,A_2)=[0.535,0.595]$,$q(A^*,A_3)=[0.5,0.515]$,$q(A^*,A_4)=[0.451,0.4825]$,$q(A^*,A_5)=[0.4825,0.509]$. 则:

$$q(A^*, A_4) < q(A^*, A_5) < q(A^*, A_3) \begin{matrix} < q(A^*, A_1) \\ < q(A^*, A_2) \end{matrix}$$

因为 $d(q(A^*, A_1), q(A^*, A_3)) < d(q(A^*, A_2), q(A^*, A_3))$,所以 A^* 与 A_2 最为贴近,所以可以把 A^* 归为模式 A_2.

参考文献:

[1] GORZALCZALCZANY M B. A method of inference in in approximate reasoning based on interval—valued fuzzy sets [J]. Fuzzy Sets and Systems,1987(21):1-17

[2] 张兴芳,齐玉霞. 区间值 Fuzzy 集的隶属原则及其应用 [J]. 聊城师院学报,1998,11:12-15

[3] 郭春香,郭耀煌. 具有区间数的多目标格序决策方法研究 [J]. 预测,2004,23:71-73

[4] 刘俊娟. 基于最大相对隶属度的区间数多指标评价在交通规划中的应用 [J]. 现代交通技术,2007(4):59-72

[5] 郭志林,陆凤玲. 课堂教学质量的区间值模糊评判 [J]. 南阳师范学院学报,2005(4):34-36

A Pattern Recognition Method of Interval-valued Fuzzy Set

XIA Hao-ran, HU Yong-pei

(School of Mathematical Sciences, Anhui University, Hefei 230039, China)

Abstract: This article uses fuzzy set theory to study the problem of pattern recognition. Based on the determining coefficient fuzzy set, the concepts named "the distance of interval-value" and "nearly interval" are proposed, and then the article gives two models of nearly interval. At last, the solution of examples proves the possibilities and validity of this algorithm.

Key words: interval-valued Fuzzy set; pattern recognition; distance; approaching principle

责任编辑: 李翠薇

(上接第114页)

Existence of Positive Solutions of Second-order Impulsive Delay Differential Equation

WANG Hui-min, JIANG Wei

(School of Mathematical Science, Anhui University, Anhui Hefei 230039, China)

Abstract: This paper mainly studies the existence of boundary value under the influence of impulse, firstly verifies that the solution of the differential equations is equivalent to the solution of pulse integral equation and then obtains several important theorems through several lemmas. The main obtained results expand some results, which mainly result from the use of a cone fixed point theorem.

Key words: positive solution; cone; fixed point; impulse

责任编辑: 李翠薇