第 28 卷第 2 期 重庆工商大学学报(自然科学版) 2011 年 4 月
Vol. 28 NO. 2 J Chongqing Technol Business Univ. (Nat Sci Ed) Apr. 2010

文章编号:1672 - 058X(2011)02 - 0111 - 04

二阶脉冲时滞微分方程正解的存在性*

汪会民,蒋 威
(安徽大学 数学科学学院,安徽 合肥 230039)

摘 要: 主要研究边值问题在脉冲影响下正解的存在性. 首先,证明了微分方程的解等价于脉冲积分方程的解; 然后通过几个引理,得到了几个重要的定理; 主要结果拓广了已有的一些结果; 证明主要运用了锥上的不动点定理.

关键词: 正解; 锥; 不动点; 脉冲
中图分类号: O175.2 **文献标志码:** A

脉冲微分方程描述了在某一时刻突然改变其状态的过程. 这样的现象在现实中很常见,尤其在工程、物理中. 近些年,脉冲微分方程已经成为非常重要的研究领域. 其中,边值问题:

$$\begin{cases} u''(t)+\lambda g(t,u(t-\tau))=0, t\in[0,1], \tau>0 \\ u(t)=0, t\in[-\tau,0] \\ u(1)=0 \end{cases}$$

已经有许多文献研究它了. 然而,关于二阶脉冲时滞微分方程正解的存在性还没有相关的文献. 此处运用锥上的不动点定理来研究正解的存在性.

考虑下例二阶脉冲时滞微分方程边值问题正解的存在性:

$$\begin{cases} u''(t)+\lambda f(t,u(t),u'(t),u(t-\tau))=0, t\in[0,1], \tau>0, t\neq t_k \\ \Delta u|_{t=t_k}=\lambda H_k(u(t_k)), -\Delta u'|_{t=t_k}=\lambda L_k(u(t_k),u'(t_k)) \\ u(t)=0, t\in[-\tau,0], u(1)=\lambda\sum_{k=1}^{k=m}\lambda H_k(u(t_k)) \end{cases} \tag{1}$$

并且满足以下条件:

(A_1) $f\in C([0,1]\times R^+\times R^+\times R^+,R^+)$, $H_k, L_k\in C(R^+,R^+)$.

(A_2) $\Delta u|_{t=t_k}=u(t_k^+)-u(t_k^-)$, $-\Delta u'|_{t=t_k}=u'(t_k^+)-u'(t_k^-)$.

这里 t_k 是一些固定点,并且满足 $0<t_1<t_2<t_3<\cdots<t_k<\cdots<t_m<1$, $u(t_k^-)$, $u(t_k^+)$ 分别代表 $u(t)$ 在 $t=t_k$ 的左右极限. $u'(t_k^-)$, $u'(t_k^+)$ 分别代表 $u'(t)$ 在 $t=t_k$ 的左右极限.

(A_3) $\frac{3}{4}\int_0^1 f(s,u(s),u'(s),u(s-\tau))\mathrm{d}s+\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{k=m}L_k(u(t_k),u'(t_k))\leqslant\sum_{t>t_k}H_k(u(t_k))$, λ 是正实数.

1 主要引理

$J=[0,1]\setminus\{t_1,t_2,t_3,\cdots,t_m\}$,令 $E=\{u|u:[-\tau,1]\to R^+$,使得 $u(t)$ 在 $t\neq t_k$ 是连续的,在 $t=t_k$ 是左连续,且 $u(t_k^+)$ 存在 $k=1,2,\cdots,m\}$. $E'=\{u|u\in E: u'(t)$ 在 $t\neq t_k$ 存在且连续,并且 $u'(t_k^+)$, $u'(t_k^-)$ 存在 $k=1,2,\cdots,m\}$.

显然,E,E' 都是实巴拿赫空间. 定义 $\|u\|_E=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}\|u(t)\|$, $\|u\|_{E'}=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}\{\|u\|_E,\|u'\|_E\}$ 分别为它们的范数.

定义 1 如果 $u(t)\in E'[-\tau,1]\cap C^2(J)$,当 $t\in[0,1]$ 时,$u(t)>0$ 且满足式(1),则称 $u(t)$ 是边值问题

收稿日期:2010 - 08 - 26;修回日期:2010 - 09 - 10.
* 基金项目:国家自然科学基金项目(10771001);教育部博士学科专项科研基金项目(20093401110001);安徽省自然科学研究重大项目(KJ2010ZD02).
作者简介:汪会民(1986 -),男,安徽安庆人,硕士研究生,从事泛函微分方程研究.

(1)的一个解.

定理1 假设$(A_1)(A_2)$成立. $u(t)\in E'[-\tau,1]\cap C^2(J)$是问题(1)的解的充要条件是$u(t)\in E'[-\tau,1]$是脉冲积分方程:

$$u(t)=\lambda\Big[\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s),u'(s),u(s-\tau))\,ds+\sum_{k=1}^{k=m}G(t,t_k)L_k(u(t_k),u'(t_k))+\sum_{t>t_k}H_k(u(t_k))\Big]\tag{2}$$

的解. 其中$G(t,s)=\begin{cases}s(1-t),0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1\\ t(1-s),0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1\end{cases}$.

证明 必要性. 假设$u(t)\in E'[-\tau,1]\cap C^2(J)$是问题(1)解,如果$t_1<t<t_2$,从$t_1$到$t$积分方程(1):

$$u'(t)-u'(t_1^+)=-\lambda\int_{t_1}^{t}f(s,u(s),u'(s),u(s-\tau))\,ds\tag{3}$$

从0到t_1积分方程(1):

$$u'(t_1^-)-u'(0)=-\lambda\int_0^{t_1}f(s,u(s),u'(s),u(s-\tau))\,ds\tag{4}$$

根据式(3)(4)可得:

$$u'(t)=u'(0)-\lambda\int_0^t f(s,u(s),u'(s),u(s-\tau))\,ds-\lambda\sum_{t_1<t<t_2}L_1(u(t_1),u'(t_1))$$

重复以上过程可得:

$$u'(t)=u'(0)-\lambda\int_0^t f(s,u(s),u'(s),u(s-\tau))\,ds-\lambda\sum_{t>t_k}L_k(u(t_k),u'(t_k))\tag{5}$$

积分式(5)得:

$$u(t)=u'(0)t-\lambda\int_0^t(t-s)f(s,u(s),u'(s),u(s-\tau))\,ds+\lambda\sum_{t>t_k}H_k(u(t_k))-\lambda\sum_{k=1}^{k=m}L_k(u(t_k),u'(t_k))(t-t_k)\tag{6}$$

令$t=1$,有$u(1)=u'(0)-\lambda\int_0^1(1-s)f(s,u(s),u'(s),u(s-\tau))\,ds+\lambda\sum_{k=1}^{k=m}H_k(u(t_k))-\lambda\sum_{t>t_k}L_k(u(t_k),u'(t_k))(1-t_k)$.

因为$u(1)=\lambda\sum_{k=1}^{k=m}H_k(u(t_k))$,所以:

$$u'(0)=\lambda\int_0^1(1-s)f(s,u(s),u'(s),u(s-\tau))\,ds+\lambda\sum_{t>t_k}L_k(u(t_k),u'(t_k))(1-t_k)\tag{7}$$

由式(6)(7)得:

$$u(t)=\lambda\Big[\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s),u'(s),u(s-\tau))\,ds+\sum_{k=1}^{k=m}G(t,t_k)L_k(u(t_k),u'(t_k))+\sum_{t>t_k}H_k(u(t_k))\Big]$$

充分性. 如果$u(t)\in E'[-\tau,1]$是式(2)的解,则$\Delta u|_{t=t_k}=\lambda H_k(u(t_k)),k=1,2,\cdots,m$.

当$t\neq t_k$,对式(2)求导得:$u''(t)=-\lambda f(t,u(t),u'(t),u(t-\tau))$,则$u(t)\in C^2(J)$,且$-\Delta u'|_{t=t_k}=\lambda L_k(u(t_k),u'(t_k)),k=1,2,\cdots,m$. 有$u(t)=0,t\in[-\tau,0]$,$u(1)=\lambda\sum_{k=1}^{k=m}\lambda H_k(u(t_k))$,定理证毕.

推论1 对$\forall t,s\in[0,1]$,则$\min\{t,1-t\}G(s,s)\leqslant G(t,s)\leqslant G(s,s)$;且$\dfrac{G(t,s)}{G(s,s)}\geqslant\theta,t\in[\theta,1-\theta]$.

推论2 对$\forall t,s\in[0,1]$,则$G'_t(t,s)=\begin{cases}s,0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1\\ 1-s,0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1\end{cases}$,因此有$\inf|G'_t(t,s)|=\dfrac{1}{2}$,$\sup|G'_t(t,s)|=1$.

定义一个锥:

$$P\in E',P=\{u\in E:u(t)\geqslant 0,u(t)\geqslant\theta\|u(t)\|,\forall t\in J\}\tag{8}$$

定义一个算子$T:P\to P$.

$$(Tu)t=\begin{cases}0,-\tau\leqslant t\leqslant 0\\ \lambda\Big[\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s),u'(s),u(s-\tau))\,ds+\sum_{k=1}^{k=m}G(t,t_k)L_k(u(t_k),u'(t_k))+\\ \sum_{t>t_k}H_k(u(t_k))\Big],t\in J\end{cases}\tag{9}$$

引理1 假设$(A_1)-(A_3)$都成立,则$T:P\to P$是一个全连续算子.

证明 对$\forall u(t)\in P$,有$\|Tu\|\leqslant\lambda\int_0^1 G(s,s)f(s,u(s),u'(s),u(s-\tau))\,ds+\lambda\sum_{k=1}^{k=m}G(t_k,t_k)L_k(u(t_k),$

$u'(t_k)) + \lambda\sum_{t>t_k} H_k(u(t_k)) \leqslant \frac{1}{4}\lambda\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s),u'(s),u(s-\tau))\,ds + \frac{1}{4}\lambda\sum_{k=1}^{k=m} G(t,s)L_k(u(t_k),$ $u'(t_k)) + \lambda\sum_{t>t_k} H_k(u(t_k))$.

$$Tu' \leqslant \lambda\int_0^1 G'_t(t,s)f(s,u(s),u'(s),u(s-\tau))\,ds + \lambda\sum_{k=1}^{k=m} G'_t(t,t_k)L_k(u(t_k),u'(t_k)) \leqslant$$
$$\lambda\int_0^1 f(s,u(s),u'(s),u(s-\tau))\,ds + \lambda\sum_{k=1}^{k=m} L_k(u(t_k),u'(t_k))$$

由(A_3)得: $\|Tu\|_E \geqslant \|Tu'\|_E$,则 $\|Tu\|_{E'} = \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\{\|Tu\|_E, \|Tu'\|_E\} = \|Tu\|_E$.

因为 $Tu = \lambda\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s),u'(s),u(s-\tau))\,ds + \lambda\sum_{k=1}^{k=m} G(t,t_k)L_k(u(t_k),u'(t_k)) + \lambda\sum_{t>t_k} H_k(u(t_k)) \geqslant$ $\lambda\theta\int_0^1 G(s,s)f(s,u(s),u'(s),u(s-\tau))\,ds + \lambda\theta\sum_{k=1}^{k=m} G(t_k,t_k)L_k(u(t_k),u'(t_k)) + \lambda\theta\sum_{t>t_k} H_k(u(t_k)) \geqslant$ $\theta\|Tu\|$,所以 $Tu\in P$. 根据 Arzela-Ascoli 定理,$T: P\to P$ 是全连续算子.

引理 2　E 是一个 Banach 空间,$K\subset E$ 是一个锥. 假设 Ω_1,Ω_2 是 E 中的开紧集且$\overline{\Omega}_1\subset\Omega_2$,$T: K\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)\to K$ 是全连续算子,使得: (i) $\|Tu\|\leqslant\|u\|, u\in K\cap\partial\Omega_1$,且 $\|Tu\|\geqslant\|u\|, u\in K\cap\partial\Omega_2$,或(ii) $\|Tu\|\geqslant\|u\|, u\in K\cap\partial\Omega_1$,且 $\|Tu\|\leqslant\|u\|, u\in K\cap\partial\Omega_2$. 则 T 在 $K\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$ 中有一个不动点.

假定:

$$\max f_\alpha = \limsup_{u\to\alpha}\max_{t\in J}\frac{f(t,u(t),u'(t),u(t-\tau))}{u},\ \min f_\alpha = \liminf_{u\to\alpha}\min_{t\in J}\frac{f(t,u(t),u'(t),u(t-\tau))}{u}$$
$$\max H_\alpha(k) = \limsup_{u\to\alpha}\frac{H_k(u)}{u},\ \min H_\alpha(k) = \liminf_{u\to\alpha}\frac{H_k(u)}{u}$$
$$\max L_\alpha(k) = \limsup_{u\to\alpha}\frac{L_k(u,u')}{u},\ \min L_\alpha(k) = \liminf_{u\to\alpha}\frac{L_k(u,u')}{u}$$

这里 α 是 0^+ 或 $+\infty$.

2　主要结果

定理 2　假设$(A_1)-(A_3)$成立,且满足:

(H_1) $\max f_0<\infty$, $\max H_0(k)<\infty$, $\max L_0(k)<\infty$; (H_2) $\min f_\infty>0$. 则当:

$$\lambda\in\left(\frac{1}{\theta\min f_\infty\sup\int_\tau^1 G'_t(t,s)\,ds},\frac{1}{\frac{1}{4}(1-\tau)\max f_0+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{k=m}\max L_0(k)+\sum_{t>t_k}\max H_0(k)}\right)\tag{10}$$

时,边值问题(1)至少存在一个正解.

证明　T 是一个全连续算子如式(9)所定义. 根据式(10),$\exists\varepsilon>0$ 使得:

$$\frac{1}{\theta(\min f_\infty-\varepsilon)\sup\int_\tau^1 G'_t(t,s)\,ds}\leqslant\lambda\leqslant\frac{1}{\frac{1}{4}(1-\tau)(\max f_0+\varepsilon)+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{k=m}(\max L_0(k)+\varepsilon)+\sum_{t>t_k}(\max H_0(k)+\varepsilon)}\tag{11}$$

固定 ε,由(H_1)知存在 $R_1>0$ 使得当 $0\leqslant u\leqslant R_1$ 时,有 $f(t,u(t),u'(t),u(t-\tau))\leqslant(\max f_0+\varepsilon)u$, $H_k(u)\leqslant(\max H_0(k)+\varepsilon)u$, $L_k(u,u')\leqslant(\max L_0(k)+\varepsilon)u$. 令 $\Omega_1=\{u\in E': \|u\|<R_1\}$,则当 $u\in P\cap\partial\Omega_1$ 时,有:

$$\|Tu\| \leqslant\lambda\int_0^1 G(s,s)f(s,u(s),u'(s),u(s-\tau))\,ds+\lambda\sum_{k=1}^{k=m}G(t_k,t_k)L_k(u(t_k),u'(t_k))+\lambda\sum_{t>t_k}H_k(u(t_k))\leqslant$$
$$\lambda\int_0^1 G(s,s)(\max f_0+\varepsilon)u(s-\tau)\,ds+\lambda\sum_{k=1}^{k=m}G(t_k,t_k)(\max L_0(k)+\varepsilon)u+\lambda\sum_{t>t_k}(\max H_0(k)+\varepsilon)u\leqslant$$
$$\lambda(\max f_0+\varepsilon)\int_0^{1-\tau}G(s+\tau,s+\tau)u(s)\,ds+\lambda\sum_{k=1}^{k=m}G(t_k,t_k)(\max L_0(k)+\varepsilon)u+\lambda\sum_{t>t_k}(\max H_0(k)+\varepsilon)u\leqslant$$
$$\lambda\left[(\max f_0+\varepsilon)\int_0^{1-\tau}G(s+\tau,s+\tau)\,ds+\sum_{k=1}^{k=m}G(t_k,t_k)(\max L_0(k)+\varepsilon)+\sum_{t>t_k}(\max H_0(k)+\varepsilon)\right]\|u\|\leqslant$$
$$\lambda\left[\frac{1}{4}(1-\tau)(\max f_0+\varepsilon)+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{k=m}G(t_k,t_k)(\max L_0(k)+\varepsilon)+\sum_{t>t_k}(\max H_0(k)+\varepsilon)\right]\|u\|\leqslant\|u\|$$

因为 $\min f_\infty > 0$,则存在 $\bar{R}_2 > 0$,使得当 $u > \bar{R}_2$ 时,$f(t,u(t),u'(t),u(t-\tau)) \geqslant (\min f_\infty - \varepsilon)u$.

取 $R_2 = \max\{\bar{R}_2, 3R_1\}$,令 $\Omega_2 = \{u \in E': \|u\| < R_2\}$,当 $u \in P \cap \partial\Omega_2$ 时,有:

$$\begin{aligned}\|Tu'\| &= \lambda \sup_{t\in J}\int_0^1 G'_t(t,s) f(s,u(s),u'(s),u(s-\tau))\,ds + \lambda\sum_{k=1}^{k=m} G'_t(t,t_k) L_k(u(t_k),u'(t_k)) \geqslant \\ &\lambda \sup_{t\in J}\int_0^1 G'_t(t,s) f(s,u(s),u'(s),u(s-\tau))\,ds \geqslant \\ &\lambda(\min f_\infty - \varepsilon)\sup_{t\in J}\int_0^{1-\tau} G'(t,s+\tau)u(s)\,ds \geqslant \\ &\lambda\theta(\min f_\infty - \varepsilon)\sup_{t\in J}\int_0^{1-\tau} G'(t,s+\tau)\,ds\,\|u\| \geqslant \\ &\lambda(\min f_\infty - \varepsilon)\sup_{t\in J}\int_\tau^1 G'(t,s)\,ds\,\|u\| \geqslant \|u\|\end{aligned}$$

由引理(2)得,当 $u \in P \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1)$ 时,T 有一个不动点,且 $u(t)$ 是问题(1)的解,定理得证.

同理可以得到如下结论:

定理 3 假设(A_1)-(A_3)成立,且满足:

(H_1) $\max f_0 < \infty$,$\max H_0(k) < \infty$,$\max L_0(k) < \infty$;(H_2) $\min L_\infty(k) > 0$. 则当:

$$\lambda \in \left(\frac{1}{\theta \min L_\infty(k)\sup_{t\in J}\sum_{k=1}^{k=m} G'_t(t,t_k)}, \frac{1}{\frac{1}{4}(1-\tau)\max f_0 + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{k=m}\max L_0(k) + \sum_{t>t_k}\max H_0(k)}\right)$$时,边值问题(1)至少存在一个正解.

定理 4 假设(A_1)-(A_3)成立,且满足

(H_3) $\max f_\infty < \infty$,$\max H_\infty(k) < \infty$,$\max L_\infty(k) < \infty$;($H_4$) $\min f_0 > 0$. 则当:

$$\lambda \in \left(\frac{1}{\theta \min f_\infty \sup_{t\in J}\int_\tau^1 G'_t(t,s)\,ds}, \frac{1}{\frac{1}{4}(1-\tau)\max f_\infty + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{k=m}\max L_\infty(k) + \sum_{t>t_k}\max H_\infty(k)}\right)$$时,边值问题(1)至少存在一个正解.

定理 5 假设(A_1)-(A_3)成立,且满足:

(H_5) $\max f_\infty < \infty$,$\max H_\infty(k) < \infty$,$\max L_\infty(k) < \infty$;($H_6$) $\min L_0(k) > 0$,则当:

$$\lambda \in \left(\frac{1}{\theta \min L_\infty(k)\sup_{t\in J}\sum_{k=1}^{k=m} G'_t(t,t_k)}, \frac{1}{\frac{1}{4}(1-\tau)\max f_\infty + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{k=m}\max L_\infty(k) + \sum_{t>t_k}\max H_\infty(k)}\right)$$时,边值问题(1)至少存在一个正解.

定理5的证明类似于定理2的证明.

参考文献:

[1] FINK A M,GATICA J A,HERNANDEZ G E. Eigenvalue of generalized gelfand models [J]. Nonlinear Anal,1993,20(12):35-38

[2] ERBE L H,KONG Q K. Boundary value problems for singular second-order functional differential equations [J]. J Comput Appl Math,1994,53:377-388

[3] LIU Z L,LI F Y. Multiple positive solutions of nonlinear two-point boundary value problem [J]. J Math Anal Appl,1996,203:365-368

[4] HA K S,LEE Y. Existence of multiple positive solutions of singular boundary value problem [J]. Nonlinear Anal,1997,28(8):462-464

[5] GUO D V. Lakshmikantham,Nonlinear Problems in Abstract Cones [M]. Academic Press,New York,1998

[6] 吴信贤. 一类拟线性椭圆形方程 Dirichlet 问题三个解的存在性 [J]. 重庆工商大学学报:自然科学版,2003,20(4):345-347

[7] HAI D D,SHIVAJI R. An existence result on positive solutions for a class of P-laplacian systems [J]. Nonlinear Anal,2004,56:256-258

[8] FENG M Q,XIE D X. Multiple positive solutions of multi-point boundary value problem for second-order impulsive differential equations [J]. J Comput Appl Math,2009,223:438-448

[9] FENG M Q,PANG H H. A class of three-point boundary-value problems for second-order impulsive integro-differential equations in Banach spaces [J]. Nonlinear Anal,2009(70):64-82

(下转第118页)

$$q(A^*,A_4)<q(A^*,A_5)<q(A^*,A_3)\begin{matrix}<q(A^*,A_1)\\<q(A^*,A_2)\end{matrix}$$

因为 $d(q(A^*,A_1),q(A^*,A_3))<d(q(A^*,A_2),q(A^*,A_3))$,所以 A^* 与 A_2 最为贴近,所以可以把 A^* 归为模式 A_2.

参考文献:

[1] GORZALCZALCZANY M B. A method of inference in in approximate reasoning based on interval—valued fuzzy sets [J]. Fuzzy Sets and Systems,1987(21):1-17

[2] 张兴芳,齐玉霞. 区间值 Fuzzy 集的隶属原则及其应用 [J]. 聊城师院学报,1998,11:12-15

[3] 郭春香,郭耀煌. 具有区间数的多目标格序决策方法研究 [J]. 预测,2004,23:71-73

[4] 刘俊娟. 基于最大相对隶属度的区间数多指标评价在交通规划中的应用 [J]. 现代交通技术,2007(4):59-72

[5] 郭志林,陆凤玲. 课堂教学质量的区间值模糊评判 [J]. 南阳师范学院学报,2005(4):34-36

A Pattern Recognition Method of Interval-valued Fuzzy Set

XIA Hao-ran,HU Yong-pei

(School of Mathematical Sciences,Anhui University,Hefei 230039, China)

Abstract: This article uses fuzzy set theory to study the problem of pattern recognition. Based on the determining coefficient fuzzy set,the concepts named "the distance of interval-value" and "nearly interval" are proposed,and then the article gives two models of nearly interval. At last,the solution of examples proves the possibilities and validity of this algorithm.

Key words: interval-valued Fuzzy set; pattern recognition; distance; approaching principle

责任编辑: 李翠薇

(上接第 114 页)

Existence of Positive Solutions of Second-order Impulsive Delay Differential Equation

WANG Hui-min, JIANG Wei

(School of Mathematical Science, Anhui University, Anhui Hefei 230039, China)

Abstract: This paper mainly studies the existence of boundary value under the influence of impulse, firstly verifies that the solution of the differential equations is equivalent to the solution of pulse integral equation and then obtains several important theorems through several lemmas. The main obtained results expand some results, which mainly result from the use of a cone fixed point theorem.

Key words: positive solution; cone; fixed point; impulse

责任编辑: 李翠薇