文章编号:1672 - 058X(2011)01 - 0011 - 03

求解扩展一般变分不等式的预测校正算法

姚 莉
(重庆工商大学 数学与统计学院,重庆 400067)

摘　要:给出了一个求解扩展一般变分不等式的预测—校正投影迭代算法,并在更弱的条件下证明了该算法的收敛性.所得的结果可以看作是一种新的和对先前一些结论的重要推广改进.

关键词:变分不等式;强单调;松弛强制;预测 - 校正

中图分类号:O177.91　　**文献标志码**: A

最近,文献[1]介绍了一类包含 3 个不同非线性算子的扩展一般变分不等式,并利用投影技巧在 3 个算子满足强单调及 Lipschitz 连续的条件下给出了一个求解这类扩展一般变分不等式问题的投影迭代算法. 此处仍研究文献[1]所提出的扩展一般变分不等式,将预测 - 校正技巧和投影技巧结合提出了一个新的求解扩展一般变分不等式的预测—校正投影迭代算法,该算法将文献[1-3]所提出的算法作为特例;同时所提出的算法只需要 3 个算子满足松弛强制及 Lipschitz 连续即可.

设 H 是一个实 Hilbert 空间,其内积和范数分别为$(\cdot\,,\cdot)$和 $\|\cdot\|$,K 是一个 H 中的非空闭凸集. 设 T,g,h:$H\to$是单值映射. 现在考虑扩展一般变分不等式问题:求 $u\in H$,$h(u)\in K$,s. t:

$$< Tu,g(v) - h(u) > \geqslant 0, \forall v \in H:g(v) \in K \tag{1}$$

定义 1　$\forall x,y\in H$,称映射 $T:H\to$是:

(1) r - 强单调的,如果存在常数 $r>0$,使得$(Tx-Ty,x-y)\geqslant r\|x-y\|^2$.

(2) γ - 强制的,如果存在常数 $\gamma>0$,使得$(Tx-Ty,x-y)\geqslant\gamma\|Tx-Ty\|^2$.

(3) (γ,r) - 松弛强制的,如果存在常数 $\gamma>0,r>0$,使得$(Tx-Ty,x-y)\geqslant-\gamma\|Tx-Ty\|^2+r\|x-y\|^2$.

此时若 $\gamma=0$,映射 T 就是 r - 强单调的;因此(γ,r) - 松弛强制映射是比 r - 强单调映射更一般的映射,显然有 r - 强单调$\to(\gamma,r)$ - 松弛强制.

(4) μ-Lipschitzian 连续的,如果存在常数 $\mu>0$,使得 $\|Tx-Ty\|\leqslant\mu\|x-y\|$,显然这蕴涵了 $<Tx-Ty,x-y>\leqslant\mu\|x-y\|^2$.

引理 1[4]　假设$\{a'_n\}\{b'_n\}$和$\{c'_n\}$是 3 个非负实数序列,且满足下面的条件:$a'_{n+1}\leqslant(1-t'_n)a'_n+b'_n+c'_n$,$\forall n\geqslant0$(其中,$t'_n\in(0,1)$,$\sum_{n=0}^{\infty}t'_n=\infty$,$b'_n=o(t'_n)$且$\sum_{n=0}^{\infty}c'_n\leqslant\infty$),那么 $a'_n\to0(n\to\infty)$.

引理 2[1]　$u\in H:h(u)\in K$ 是扩展一般变分不等式问题(1)的解,当且仅当 $u\in H:h(u)\in K$ 满足:

$$h(u) = P_k[g(u) - \rho Tu] \tag{2}$$

其中,P_k 是投影算子,$\rho>0$ 是常数. 可以把式(2)改写成如下形式:

$$u = u - h(u) + P_k[g(u) - \rho Tu] \tag{3}$$

利用不动点公式(3)并结合预测-校正迭代技巧,可以给出如下求解问题(1)的迭代算法:

算法 1　对于任意给定的 $u_0\in H$,由以下迭代格式计算 u_n:

$$u_n = (1-b_n)u_n + b_n\{u_n - h(u_n) + P_k[g(u_n) - \rho Tu_n]\} \tag{4}$$

收稿日期:2010 - 04 - 28;**修回日期**:2010 - 05 - 10.

作者简介:姚莉(1968 -),女,重庆人,讲师,从事非线性泛函分析的研究.

$$u_{n+1} = (1-a_n)u_n + a_n\{v_n - h(v_n) + P_k[g(v_n) - \rho Tv_n]\} \tag{5}$$

其中,$a_n, b_n \in [0,1]$ $(n=0,1,2,\cdots)$.

注1 当 $b_n=0$ 时,算法1就正好是文献[1]所提出的算法3.1.

下面讨论算法1的收敛性.

定理1 假定 $u \in H$ 是问题(1)的解,u_n 是由算法1得到的近似解. 如果 $T:H \to H$ 是(γ_1, r_1)-松弛强制和 μ_1-Lipschitzian 连续映射;$g:H \to H$ 是(γ_2, r_2)-松弛强制和 μ_2-Lipschitzian 连续映射;$h:H \to H$ 是(γ_3, r_3)-松弛强制和 μ_3-Lipschitzian 连续映射;序列 $a_n, b_n \in [n=0,1,\cdots]$ 且满足条件 $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n = \infty$. 如果:

$$\left|\rho - \frac{r_1 - \gamma_1\mu_1^2}{\mu_1^2}\right| < \frac{\sqrt{(\gamma_1\mu_1^2 - r_1)^2 - k(2-k)\mu_1^2}}{\mu_1^2}, (\gamma_1\mu_1^2 - r_1) > \sqrt{k(2-k)}\mu_1, k < 1 \tag{6}$$

其中,$k = \sqrt{1+2\gamma_2\mu_2^2 - 2r_2 + \mu_2^2} + \sqrt{1+2\gamma_3\mu_3^2 - 2r_3 + \mu_3^2}$,则 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$.

证明 设 $u \in H$ 是问题(1)的解,则由式(3)有:

$$u = (1-a_n)u + a_n\{u - h(u) + P_k[g(u) - \rho Tu]\} \tag{7}$$

$$u = (1-b_n)u + b_n\{u - h(u) + P_k[g(u) - \rho Tu]\} \tag{8}$$

其中,$a_n, b_n \in [0,1]$ $(n=0,1,\cdots)$是常数.

由式(5)(7)以及投影算子 P_k 的非扩张性有:

$$\begin{aligned}
\| u_{n+1} - u \| = {} & \| (1-a_n)u_n + a_n\{v_n - h(v_n) + P_k[g(v_n) - \rho Tv_n]\} - \\
& (1-a_n)u - a_n\{u - h(u) + P_k[g(u) - \rho Tu]\} \| \leqslant \\
& (1-a_n)\| u_n - u \| + a_n \| v_n - u - (h(v_n) - h(u)) \| + a_n \| P_k[g(v_n) - \rho Tv_n] - P_k[g(u) - \rho Tu] \| \leqslant \\
& (1-a_n)\| u_n - u \| + a_n \| v_n - u - (h(v_n) - h(u)) + a_n \| g(v_n) - g(u) - \rho(Tv_n - Tu) \| \leqslant \\
& (1-a_n)\| u_n - u \| + a_n \| v_n - u - (h(v_n) - h(u)) \| + \\
& a_n \| v_n - u - (g(v_n) - g(u)) \| + a_n \| v_n - u - \rho(Tv_n - Tu) \|
\end{aligned} \tag{9}$$

因为 T 是(γ_1, r_1)-松弛强制和 μ_1-Lipschitzian 连续映射,那么由松弛强制和 Lipschitzian 连续的定义就有:

$$\begin{aligned}
\| v_n - u - \rho(Tv_n - Tu) \|^2 = {} & \| v_n - u \|^2 - 2\rho < Tv_n - Tu, v_n - u > + \rho^2 \| Tv_n - Tu \|^2 \leqslant \\
& \| v_n - u \|^2 - 2\rho[-\gamma_1 \| Tv_n - Tu \|^2 + r_1 \| v_n - u \|^2] + \rho^2 \| Tv_n - Tu \|^2 \leqslant \\
& \| v_n - u \|^2 + 2\rho\gamma_1\mu_1^2 \| v_n - u \|^2 - 2\rho r_1 \| v_n - u \|^2 + \rho^2\mu_1^2 \| v_n - u \|^2 = \\
& [1 + 2\rho\gamma_1\mu_1^2 - 2\rho r_1 + \rho^2\mu_1^2] \| v_n - u \|^2
\end{aligned} \tag{10}$$

同理,由 g 是(γ_2, r_2)-松弛强制和 μ_2-Lipschitzian 连续映射,h 是(γ_3, r_3)-松弛强制和 μ_3-Lipschitzian 连续映射,有:

$$\| v_n - u - (g(v_n) - g(u)) \|^2 \leqslant [1 + 2\gamma_2\mu_2^2 - 2r_2 + \mu_2^2] \| v_n - u \|^2 \tag{11}$$

$$\| v_n - u - (h(v_n) - h(u)) \|^2 \leqslant [1 + 2\gamma_3\mu_3^2 - 2r_3 + \mu_3^2] \| v_n - u \|^2 \tag{12}$$

由式(9)(10)(11)(12),有:

$$\begin{aligned}
& \| u_{n+1} - u \| \leqslant (1-a_n) \| u_n - u \| + a_n\{ \sqrt{1 + 2\gamma_2\mu_2^2 - 2r_2 + \mu_2^2} + \sqrt{1 + 2\gamma_3\mu_3^2 - 2r_3 + \mu_3^2} + \\
& \sqrt{1 + 2\rho\gamma_1\mu_1^2 - 2\rho r_1 + \rho^2\mu_1^2} \} \| v_n - u \| = \\
& (1-a_n) \| u_n - u \| + a_n(k + t(\rho)) \| v_n - u \| = \\
& (1-a_n) \| u_n - u \| + a_n\theta \| v_n - u \|
\end{aligned} \tag{13}$$

其中,$t(\rho) = \sqrt{1 + 2\rho\gamma_1\mu_1^2 - 2\rho r_1 + \rho^2\mu_1^2}$,$k = \sqrt{1 + 2\gamma_2\mu_2^2} + \sqrt{1 + 2\gamma_3\mu_3^2 - 2r_3 + \mu_3^2}$. 由条件(6)可知,显然:

$$\theta = k + t(\rho) < 1 \tag{14}$$

同理可证:

$$\begin{aligned}
\| v_n - u \| \leqslant {} & (1-b_n) \| u_n - u \| + b_n\theta \| u_n - u \| \leqslant \\
& [1 - b_n(1-\theta)] \| u_n - u \| \leqslant \| u_n - u \|
\end{aligned} \tag{15}$$

由式(13)(15)可得:

$$\| u_{n+1} - u \| \leqslant (1 - a_n) \| u_n - u \| + a_n\theta \| u_n - u \| = [1 - a_n(1 - \theta)] \| u_n - u \| \quad (16)$$

在式(16)中,令 $a'_n = \| u_n - u \|$,$t'_n = a_n(1-\theta)$,$b'_n = 0$,$c'_n = 0$,在定理 1 的假设条件下,它们显然满足引理的条件,因此由引理 1,就有 $\| u_n - u \| \to 0(n \to \infty)$,即 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$.

注 2　定理 1 改进了文献[1]中定理 3.1 的结论,即把文献[1]的定理 3.1 中的强单调条件减弱为松弛强制条件.

参考文献:

[1] NOOR M A. Projection iterative methods for extended general variational inequalities[J]. J Appl Math Comput,2010,32:83-95

[2] NOOR M A. Some developments in general variational inequalities[J]. Appl Math Comput,2004,152:199-277

[3] NOOR M A. Extended general variational inequalities[J]. Appl Math Lett,2009,22:182-185

[4] 万波,王文惠. 求解一类广义混合变分不等式组的迭代算法[J]. 内蒙古大学学报:自然科学版,2010,41(1):41-47

[5] 姚莉. 广义混合变分不等式解的存在性与迭代算法[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版,2009,26(4):311-315

Predictor-Corrector Algorithms for Extended General Variational Inequalities

YAO Li

(School of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

Abstract: In this paper, we suggest and analyze a predictor-corrector projection iterative method for extended general variational inequalities. We also study the convergence of the new iterative method under much weaker conditions. Our results can be viewed as a novel and important extension and improvement of the previously known results .

Key words: variational inequalities; strong monotone; relaxed coercive; prediction-correction

责任编辑:李翠薇

(上接第 10 页)

A Kind of Revised Penalty Function Self-correcting Algorithm

LIU Fang[1], SHAN Rui[2]

(1. Department of Mathematics, Xinzhou Teacher's University, Shanxi Xinzhou 034000;

2. Department of Mathematics, Yanshan University, Hebei Qinhuangdao 066004, China)

Abstract: This paper gives a new algorithm for both equality and inequality constrained optimization problems based on optimization theory. Being self-correcting of the penalty factor, the algorithm is close to the optimal entry. Then it proves the astringency of the algorithm under certain condition. At last, an example is given, based on numerical test result of MATLAB, the feasibility of this algorithm is proven.

Key words: constrained optimization; penalty function methods; convergence

责任编辑:李翠薇