文章编号: 1672 - 058X(2009)06 - 0551 - 02

关于不定方程 $x^2 + 11 = 4y^3$

王　振, 李小燕
(安徽大学 数学与科学学院, 合肥 230039)

摘　要: 对于某些 d, 若 $Q(\sqrt{d})$ 是 Euclid域, 则在对应的 Euclid整环中算术基本定理成立, 利用此来证明不定方程 $x^2 + 11 = 4y^3$ 没有整数解.

关键词: 不定方程; 整数解; Euclid整环
中图分类号: O156.1　　　　**文献标志码**: A

对于二次域 $Q(\sqrt{d})$ 来说, 在虚二次域中共有 5个 Euclid域: $d = -1, -2, -3, -7, -11$, 在实二次域中共有 16个 Euclid域: $d = 2, 3, 5, 6, 7, 11, 13, 17, 19, 21, 29, 33, 37, 41, 57, 73$. 且当 $d \equiv 2, 3 \pmod 4$ 时, $1, \sqrt{d}$ 是 $Q(\sqrt{d})$ 的一组整基, 当 $d \equiv 1 \pmod 4$ 时, $1, \frac{-1+\sqrt{d}}{2}$ 是 $Q(\sqrt{d})$ 的一组整基.

定义 1　设 M 是整环, 如果存在一个 M 的全体非零元素到自然数的集合的函数 $d(\eta)$, 使得对任意的 $\alpha, \beta \in M$, $\beta \neq 0$, 一定有 $\kappa, \gamma \in M$, 满足 $\alpha = \kappa\beta + \gamma$, 这里 $\gamma = 0$ 或 $\gamma \neq 0$ 且有 $d(\gamma) < d(\beta)$, 那么 M 就称为 Euclid整环.

定义 2　Euclid整环对应的分式域叫做 Euclid域.

引理 1　设 M 是唯一分解整环, 正整数 $k \geq 2$, 以及 $\alpha, \beta \in M$, $(\alpha, \beta) = 1$, 那么, 若 $\alpha\beta = \gamma^k$, $\gamma \in M$, 则有 $\alpha = \varepsilon_1\mu^k$; $\beta = \varepsilon_2\nu^k$; $\mu, \nu \in M$; 其中 ε_1, ε_2 是 M 中的单位元素, 并且 $\varepsilon_1\varepsilon_2 = \varepsilon^k$, ε 为单位元素.

定理 1　不定方程:

$$x^2 + 11 = 4y^3; \quad x, y \in Z \tag{1}$$

无整数解.

证明　由于二次域 $Q(\sqrt{d})$ 为 Euclid域, 且仅有单位数 ± 1, 其中 $1, \frac{-1+\sqrt{-11}}{2}$ 是一组整基, 从而 $Q(\sqrt{d})$ 中的整数形如 $\frac{\mu + \nu\sqrt{-11}}{2}$ 的形式且 $\mu \equiv \nu \pmod 2$, 其中 $\mu, \nu \in Z$.

由式 (1) 得:

$$\left(\frac{x - \sqrt{-11}}{2}\right)\left(\frac{x - \sqrt{-11}}{2}\right) = y^3; \quad x, y \in Z$$

令 $d = \left(\frac{x - \sqrt{-11}}{2}, \frac{x + \sqrt{-11}}{2}\right)$, 由 $\frac{d}{\frac{x + \sqrt{-11}}{2}} - \frac{x - \sqrt{-11}}{2} = \sqrt{-11}$, 且 $\sqrt{-11}$ 在 $Q(\sqrt{d})$ 中是素数知, $d = 1$ 或

收稿日期: 2009 - 06 - 29; **修回日期**: 2009 - 08 - 10.
作者简介: 王振 (1984 -), 男, 山东临沂人, 硕士研究生, 从事不定方程研究.

$\sqrt{-11}$,若 $d=\sqrt{-11}$,则由 $\frac{d}{\frac{x+\sqrt{-11}}{2}}+\frac{x-\sqrt{-11}}{2}=x$ 知 $\frac{\sqrt{-11}}{x}$ 从而 $\frac{N(\sqrt{-11})}{N}$ (x) 即 $\frac{11}{x^2}$,从而 $\frac{11}{x}$;并且由式(1)知 $\frac{11}{y}$,从而 $\frac{11^2}{x^2}$,$\frac{11^2}{y^3}$;由式(1)知 $\frac{11^2}{4y^3}-x^2=11$,矛盾,从而 $d=1$. 由引理 1 知 $\left(\frac{x\pm\sqrt{-11}}{2}\right)=\left(\frac{\mu\pm\nu\sqrt{-11}}{2}\right)^3$; $\mu,\nu\in Z$,上式整理得 $4(x\pm\sqrt{-11})=(\mu\pm\nu\sqrt{-11})^3$,比较等式系数可得:

$$4x=\mu(\mu^2-33\nu^2)\quad 4=\nu \tag{2}$$

$$(3\mu^2-11\nu^2) \tag{3}$$

由式(3)知 $\nu=\pm1,\pm2,\pm4$.

若 $\nu=1$,由式(2)(3)得 $5=\mu^2$,由于 $\mu\in Z$,不可能;

若 $\nu=-1$,由(2)(3)得 $7=3\mu^2$,由于 $\mu\in Z$,不可能;

若 $\nu=2$,由式(2)(3)得 $46=3\mu^2$,由于 $\mu\in Z$,不可能;

若 $\nu=-2$,由式(2)(3)得 $14=\mu^2$,由于 $\mu\in Z$,不可能;

若 $\nu=4$,由式(2)(3)得 $59=\mu^2$,由于 $\mu\in Z$,不可能;

若 $\nu=-4$,由式(2)(3)得 $175=3\mu^2$,由于 $\mu\in Z$,不可能.

综上可知,$\mu,\nu\in Z$ 不存在,从而 $x,y\in Z$ 不存在,即不定方程(1)无整数解.

参考文献:

[1] 潘承洞,潘承彪. 代数数论[M]. 山东:山东大学出版社, 2003

[2] 冯克勤. 代数数论[M]. 北京:科学出版社, 2000

[3] 廖江东,柳杨. 关于不定方程 $x^2+16=y^3$ [J]. 四川理工学院学报:自然科学版, 2007, 20(2): 4-5

[4] 赵开明. 关于不定方程 $x^2-53=4y^2$ [J]. 重庆工商大学学报:自然科学版, 2008, 25(4): 345

[5] 郑紫霞. 关于不定方程 x^2-11y^4-38 [J]. 重庆工学院学报, 2008, 22(5): 145-146

[6] 冉银霞. 不定方程组 $5x^2-4y^2=1, 5x^2-6z^2=-1$ 的公解[J]. 重庆工学院学报, 2008, 22(12): 87-89

On diophantine equation $x^2+11=4y^3$

WANG Zhen, LI Xiao-yan

(School of Mathematical Science, Anhui University, Anhui Hefei 230039, China)

Abstract: For some d, if $Q(\sqrt{d})$ is Euclid field, according to Euclidean domain $Q(\sqrt{d})$, arithmetical fundamental theorem is carried out This paper mainly uses the method to discuss the integer solution of diophantine equation $x^2+11=4y^3$, and proves that the equation has no integer solution.

Key words: diophantine equation; integer solution; Euclidean domain

责任编辑:李翠薇