文章编号: 1672 - 058X(2009) 06 - 0548 - 03

变分不等式和非扩张映射的迭代收敛性

龚 黔 芬
(重庆工商大学 计算机科学与信息工程学院, 重庆 400067)

摘 要:介绍了一类包含非扩张映射的变分不等式和 Wiener-Hopf方程,基于投影技巧推导出两者之间的等价关系,利用该等价关系提出了一个同步求解非扩张映射不动点和变分不等式的迭代算法,并在适当条件下证明了该迭代算法的强收敛性;所得结论推广了该领域内的一些最新结果.

关键词:变分不等式; Wiener-Hopf方程;非扩张映射; Lipschitzian连续;松弛强制映射
中图分类号: O177. 91 **文献标志码**: A

变分不等式在现代非线性分析中具有非常重要的作用,被广泛应用于经济决策、控制论、优化理论和算子理论等领域. 1991年, Shi [1]研究了变分不等式和不动点问题的等价性, 在此基础上文献 [2, 3]给出了求解变分不等式问题的各种投影算法; 2003年, Takahashi [4]等讨论了非扩张型映射和单调映射的弱收敛定理,使得迭代算法收敛条件大大减弱; 2007年, Noor [5]等建立了求解变分不等式和非扩张型映射的三步迭代算法,将变分不等式问题的求解推广到更一般的情形. 此处将运用 Wiener-Hopf方程技巧提出一个新的两步迭代算法,该算法具有迭代运算量更少、收敛速度更快的特点,并在适当的条件下证明了该迭代算法的强收敛性.

1 预备知识

设 H是一个实 Hilbert空间,其内积和范数分别表示为 $\langle .,. \rangle$和 $\| \cdot \|$, K为 H中的一个非空闭凸集. $S, T: H\to H$是两个不同的非线性映射,且 S为非扩张映射,以 P_K表示 H在 K上的投影.

考虑包含非扩张映射的一般变分不等式,求 $u\in H, S(u)\in K$满足:

$$\langle Tu, S(v) - S(u) \rangle \geq 0;\ \forall v \in H, S(v) \in K \tag{1}$$

如果 $S = I$,就转化为文献 [4 - 6]中所研究的变分不等式:

$$\langle Tu, v - u \rangle \geq 0,\ \forall v \in K \tag{2}$$

记 $Q_K = I - SP_K$,引入非扩张映射 S的 Wiener-Hopf方程:

$$TSP_K z + \rho^{-1} Q_K z = 0 \tag{3}$$

定义 1 称映射 $T: H\to H$为 μ-Lipschitzian连续,如果存在常数 $\mu > 0$,使得:

$$\| Tx - Ty \| \leq \mu \| x - y \|;\ \forall x, y \in K$$

定义 2 称映射 $T: H\to H$为 r-强单调:如果存在常数,使得:

$$\langle Tx - Ty, x - y \rangle \geq r \| x - y \|^2;\ \forall x, y \in K$$

收稿日期: 2009 - 09 - 06;修回日期: 2009 - 09 - 28.
作者简介:龚黔芬 (1977 -),女,四川梓潼人,讲师,从事计算机应用与算法研究.

定义 3 称映射 $T: H\rightarrow H$为 (γ, r) - 松弛强制:如果存在常数 $\gamma>0, r>0$,使得:

$$< Tx - Ty, x - y > \geq - \gamma \| Tx - Ty \|^2 + r \| x - y \|^2; \forall x, y \in K$$

注 1 r - 强单调映射一定是 (γ, r) - 松弛强制映射,但其逆命题并不成立. 因此, (γ, r) - 松弛强制映射是比 r - 强单调映射更一般的映射.

引理 1 [2] 设 $\{a_n\}\{b_b\}$为非负数序列,且满足不等式:

$$a_{n+1} \leq (1 - \lambda_n) a_n + b_n, \forall n \geq 0$$

其中, $\lambda_n \in [0, 1], \sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n = \infty, b_n = o(\lambda_n)$,则 $\lim_{n\rightarrow\infty} a_n = 0$.

2 迭代算法

引理 2 [7] 对一个给定的 $z\in H$,存在 $u\in K$,使不等式 $< u - z, v - u > \geq 0, \forall v\in K$成立,当且仅当 $u = P_K z$,且 P_K为非扩张映射.

利用引理 2,求一般变分不等式 (1)的解就等价于求 $u\in K$,使:

$$S(u) = P_K[S(u) - \rho Tu], \quad \rho > 0 \tag{4}$$

将 $Q_K = I - SP_K$代入 Wiener-Hopf方程 (3),整理得:

$$z = SP_K z - \rho TSP_K z \tag{5}$$

该不动点公式可以分解记为 $u = SP_K z, z = u - \rho Tu$.

以 $F(S)$表示 S所有的不动点元素的集合,如果一般变分不等式 (1)的解 $u^* \in F(S)$,则:

$$u^* = S(u^*) = P_K[S(u^*) - \rho Tu^*] = SP_K(u^* - \rho Tu^*) \tag{6}$$

即一般变分不等式 (1)与 Wiener-Hopf方程 (3)的解等价,故可以给出同步求解的迭代算法.

算法 1 对一个给定的 $z_0 \in H$,由下列迭代格式计算 z_{n+1}:

$$u_n = (1 - a_n) z_n + a_n SP_K z_n \tag{7}$$

$$z_{n+1} = (1 - b_n) z_n + b_n P_K(u_n - \rho Tu_n) \tag{8}$$

其中, $a_n, b_n \in [0, 1], \rho > 0, S$为非扩张映射.

如果 $S = I$,算法 1就转化为求解变分不等式 (2)的迭代算法:

算法 2 对一个给定的 $u_0 \in H$,由下列迭代格式计算 u_{n+1}:

$$z_n = (1 - a_n) u_n + a_n P_K u_n \tag{9}$$

$$u_{n+1} = (1 - b_n) u_n + b_n P_K(z_n - \rho Tz_n) \tag{10}$$

其中, $a_n, b_n \in [0, 1], \rho > 0, n = 1, 2, 3, \cdots$.

注 2 该算法改进了文献 [5]中的投影迭代算法,并且新算法的迭代运算量更小,收敛速度更快.

3 主要结果

定理 1 设 T是 (γ, r) - 松弛强制且为 μ-Lipschitzian连续映射, S为非扩张型映射, Ω_1 为 Wiener-Hopf方程的解集. 如果 $F(S) \cap \Omega_1 \neq \varnothing$,且满足下列条件:

$$0 < \rho < \frac{2(r - \gamma\mu^2)}{\mu^2}, \gamma\mu^2 < r \tag{11}$$

$$a_n, b_n \in [0, 1], \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \infty \tag{12}$$

则由算法 1得到的近似解 z_n 强收敛到 $z^* \in F(S) \cap \Omega_1$,即 $\lim_{n\rightarrow\infty} z_n = z^*$.

证明 设 $z^* \in F(S) \cap \Omega_1$,由式(6)得:

$$u^* = (1 - a_n) z^* + a_n S P_K z^* \tag{13}$$

$$z^* = (1 - b_n) z^* + b_n P_K (u^* - \rho T u^*) \tag{14}$$

由式(8)(14)及 P_K 的非扩张性,得:

$$\begin{aligned} \| z_{n+1} - z^* \| &= \| (1 - b_n) z_n + b_n P_K (u_n - \rho T u_n) - (1 - b_n) z^* + b_n P_K (u^* - \rho T u^*) \| \le \\ &(1 - b_n) \| z_n - z^* \| + b_n \| P_K (u_n - \rho T u_n) - P_K (u^* - \rho T u^*) \| \le \\ &(1 - b_n) \| z_n - z^* \| + b_n \| (u_n - u^*) - \rho (T u_n - T u^*) \| \end{aligned} \tag{15}$$

又因为 T 是 (γ, r)-松弛强制和为 μ-Lipschitzian 连续映射,有:

$$\begin{aligned} \| (u_n - u^*) - \rho (T u_n - T u^*) \|^2 &= \| u_n - u^* \|^2 - 2\rho < T u_n - T u^*, u_n - u^* > + \rho^2 \| T u_n - T u^* \|^2 \le \\ &\| u_n - u^* \|^2 - 2\rho (-\gamma \| T u_n - T u^* \|^2 + r \| u_n - u^* \|^2) + \rho^2 \| T u_n - T u^* \|^2 \le \\ &\| u_n - u^* \|^2 + 2\rho\gamma\mu^2 \| u_n - u^* \|^2 - 2\rho r \| u_n - u^* \|^2 + \rho^2 \mu^2 \| u_n - u^* \|^2 = \\ &(1 + 2\rho\gamma\mu^2 - 2\rho r + \rho^2 \mu^2) \| u_n - u^* \|^2 = \theta^2 \| u_n - u^* \|^2 \end{aligned} \tag{16}$$

其中,$\theta = \sqrt{1 + 2\rho\gamma\mu^2 - 2\rho r + \rho^2 \mu^2}$,由式(11)可知 $\theta < 1$.

由式(7)和式(13),得:

$$\begin{aligned} \| u_n - u^* \| &\le (1 - a_n) \| z_n - z^* \| + a_n \| S P_K z_n - S P_K z^* \| \le \\ &(1 - a_n) \| z_n - z^* \| + a_n \| z_n - z^* \| \le \| z_n - z^* \| \end{aligned} \tag{17}$$

整理式(15)(16)和式(17),得:

$$\begin{aligned} \| z_{n+1} - z^* \| &\le (1 - b_n) \| z_n - z^* \| + b_n \theta \| u_n - u^* \| \le \\ &(1 - b_n) \| z_n - z^* \| + b_n \theta \| z_n - z^* \| = [1 - b_n (1 - \theta)] \| z_n - z^* \| \end{aligned} \tag{18}$$

由引理 1得 $\lim\limits_{n \to \infty} \| z_n - z^* \| = 0$,即 $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z^*$.

定理 2 设 T 是 (γ, r)-松弛强制且为 μ-Lipschitzian 连续映射,Ω_2 为变分不等式(2)的解集. 如果 $\Omega_2 \neq \varnothing$,且满足下列条件:

i) $0 < \rho < \dfrac{2(r - \gamma\mu^2)}{\mu^2}$, $\gamma\mu^2 < r$; ii) $a_n, b_n \in [0, 1]$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = \infty$.

则由算法 2得到近似解 u_n 强收敛到 $u^* \in \Omega_2$,即 $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = u^*$.

证明 在定理 1的证明中令 $S = I$,同理可证.

参考文献:

[1] SHI P. Equivalence of variational inequalities with Wiener-Hopf equations[J]. Proc Amer Math Soc, 1991, 111: 339-346

[2] WENG X L. Fixed Point iteration for local strictly pseudocontractive mappings[J]. Proc Amer Math Soc, 1991, 113: 727-731

[3] NOOR M A, WANG Y J, XIU N. Some new projection methods for variational inequalities[J]. Appl Math Comput, 2003, 137: 423-435

[4] TAKAHASHI G, TOYODA M. Weak convergence theorems for nonexpansive mapping and monotone mappings[J]. Optim. Theory Appl, 2003, 118(2): 417-428

[5] NOOR M A, YAO Y H. Three-step for variational inequalities and nonexpansive mappings[J]. Appl Math Comput, 2007(2): 13

[6] NOOR M A, HUANG Z Y. Wiener-Hopf equation technique for variational inequalities and nonexpansive mappings[J]. Appl Math Comput, 2007(2): 117

[7] NOOR M A, RASSIAS T M. A class of projection methods for general variational inequalities[J]. Mathematical Analysis and Applications, 2002, 268: 334-343

[8] 许维珍. 微积分在解方程和不等式中的应用[J]. 重庆工学院学报, 2008, 22(3): 153-155

(下转第 606页)

利润 640万元;预计在产品生命周期内,即在 2007～2009年期间每年可实现产销 10 000余辆,出口创汇 1 500万美元左右 (平均单价: 0. 15万美元/辆),实现销售收入约 1亿 5千万元,实现利润约 2 400万元。

参考文献:

[1] 甘华鸣. 新产品开发 [M]. 北京:中国国际广播出版社, 2002
[2] (美)麦克格拉斯. 下一代产品开发:如何提高研发生产率,降低成本和缩短开发周期 [M]. 朱战备,马建平,译. 北京:清华大学出版社, 2005
[3] 郑斌. 一种基于关键链的项目进度计划方法 [J]. 华中科技大学学报, 2008, 25 (4): 264-269
[4] 刘希宋,张长涛,战歌. 企业产品开发团队学习模型研究 [J]. 科学与科学技术管理, 2002, 23 (1): 51-61
[5] 杨德林,史海锋. R&D项目组知识知识创造影响因素的实证研究 [J]. 科学与科学技术管理, 2005, 26 (7): 92-96
[6] 高敏. 汽车新产品开发的工业设计策略 [J]. 重庆工学院学报, 2005, 19 (8): 6-9
[7] 刘卫宁. 摩托车整车装配企业的配套作业建模与优化 [J]. 重庆工学院学报, 2008, 22 (6): 1-5

Research on new product development process of motorcycle

YU Jiang[1] WANG Xu[2] XU Feng-chu[1]

(1. Chongqing Jianshe Motor Co., LTD, Chongqing 400052; 2. Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract: The industry of motorcycle has been developed as one of the fastest growing industry among the mechanical products in China, how to research and develop new products quickly and successfully will be the core force for companies in the competition with the international well-known enterprises. In order to bring new products to market and obtain the benefits brought by grabbing market share as soon as possible, enterprises must possess a complete and effective management program for product development process to guide the development of new products. Based on the investigation of the status of new product development and requirement analyse in J Inc, the new product development process system for J Inc has been designed.

Key words: motorcycles; new product development; process; project management

责任编辑:李翠薇

(上接第 550页)

Iterative convergence of variational inequalities and non-expansive mappings

GONG Qian-fen

(School of Computer Science and Information Engineering, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

Abstract: A class of variational inequalities including non-expansive mappings and Wiener-Hopf equation are introduced, based on projection technique, the equivalence relation between the two is deduced. On the basis of this equivalence relation, an iterative algorithm for synchronously solving non-expansive mappings' fixed points and variational inequalities is proposed. Under the proper condition, the strong convergence of this iterative algorithm is proven, and the corresponding conclusions generalize some new results in this field.

Key words: variational inequalities; Wiener-Hopf equation; non-expansive mapping; Lipschitzian continuity; relaxed coercive mapping

责任编辑:李翠薇