文章编号: 1672 - 058X(2009) 06 - 0540 - 03

利用凸函数证明 Hölder不等式

魏佳丽, 郭 辉*
(重庆师范大学 数学与计算机科学学院, 重庆 401331)

摘 要: 给出了利用构造凸函数及其性质证明 Hölder不等式的方法, 说明了 Hölder不等式不仅可以用代数法、积分法和微分法证明, 还可以用构造凸函数的方法证明.

关键词: Hölder不等式; 凸函数; 构造函数
中图分类号: O174. 1 文献标志码: A

著名的 Hölder不等式在数学领域中起着举足轻重的作用, 早在 1889年就得以提出. 最初, Hölder不等式是以数列形式给出的, 随着数学科学的不断进步, 后来由 Riesz F. 将其推广为积分形式, 并且和 Minkowski不等式成为建立 L^p 空间的基本工具. 此处先采用代数法证明 Hölder不等式, 而后给出构造两种不同的凸函数的方法证明 Hölder不等式.

凸函数有几种不同的定义, 此处只给出现代数学多数采用的一种定义, 其他定义可查找数学分析相关参考书即可.

定义 1[1] 设 $f(x)$在区间 I上有定义, $f(x)$在 I上称为凸函数, 当且仅当对 $\forall x_1, x_2 \in I$, $\forall \lambda \in (0, 1)$, 有:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \le \lambda f(x_1) + (1 - \lambda) f(x_2) \tag{1}$$

若式 (1)中, "$\le$"改成"$<$", 则是严格凸函数的定义. 若"$\le$"改成"$\ge$"或"$>$", 则分别是凹函数与严格凹函数的定义. 下面再给出一个运用函数的二阶导数判断函数凹凸性的定理.

定理 1[2] 设 $f(x)$在区间 I上存在二阶导数 $f''(x)$, 那么:

1)若在区间 I上 $f''(x) > 0$, 则 $f(x)$在区间 I上为凸函数;

2)若在区间 I上 $f''(x) < 0$, 则 $f(x)$在区间 I上为凹函数.

定理 2 (Hölder不等式)

(ⅰ)级数形式: 设 $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 对任意数列 $\{\xi_k\}\{\eta_k\} \subset K$, ($K$ 为数域, 其可为实数域 R, 也可为复数域 C), 均有 $\sum\limits_k |\xi_k \cdot \eta_k| \le (\sum\limits_k |\xi_k|^p)^{\frac{1}{p}} (\sum\limits_k |\eta_k|^q)^{\frac{1}{q}}$;

(ⅱ) 积分形式: 设 $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 若函数 $f(t) \in L^p[a, b]$, $g(t) \in L^p[a, b]$, 令 $\|f\|_p = (\int_a^b |f(t)|^p \mathrm{d}t)^{\frac{1}{p}}$, $\|g\|_q = (\int_a^b |g(t)|^q \mathrm{d}t)^{\frac{1}{q}}$, 那么 $f(t)g(t)$在 $[a, b]$上 L可积, 且成立:

$$\int_a^b |f(t)g(t)| \mathrm{d}t \le \|f\|_p \|g\|_q \tag{2}$$

收稿日期: 2009 - 09 - 07; 修回日期: 2009 - 09 - 30.
作者简介: 魏佳丽 (1986 -), 女, 四川省内江人, 从事数学与应用数学研究.
*通讯作者: 郭辉, E - mail: guoguofly@cqnu. edu. cn.

注:在上面两种形式中,当 $p=q=2$时,数列形式便是熟知的 Cauchy不等式,而积分形式便是熟知的 Schwarz不等式.此处只对第二种积分形式用构造凸函数方法加以证明.

证法 1　(用代数法证明)

首先证明当 $p>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$时,对任何正数 A与 B,有:

$$A^{\frac{1}{p}}B^{\frac{1}{q}}\le\frac{A}{p}+\frac{B}{q}\tag{3}$$

事实上,作辅助函数 $\varphi(t)=t^{\alpha}-\alpha t(0<t<+\infty)$, $0<\alpha<1$,则 $\varphi'(t)=\alpha[t^{\alpha-1}-1]$,所以在 $(0,1)$上, $\varphi'(t)>0$,在 $(1,+\infty)$上 $\varphi'(t)<0$,因而 $\varphi(1)$是函数 $\varphi(t)$在 $(0,+\infty)$上的最大值,即 $\varphi(t)\le\varphi(1)=1-\alpha$, $t\in(0,+\infty)$.由此可得 $t^{\alpha}\le\alpha t+(1-\alpha)$, $t\in(0,+\infty)$.

令 $t=\frac{A}{B}$,代入上面不等式,那么:

$$\frac{A^{\alpha}}{B^{\alpha}}\le\alpha\frac{A}{B}+(1-\alpha)\tag{4}$$

式 (4)两边同时乘以 $B>0$,得到:

$$\frac{A^{\alpha}}{B^{\alpha-1}}\le\alpha A+(1-\alpha)B\tag{5}$$

令 $\alpha=\frac{1}{p}$,则 $1-\alpha=\frac{1}{q}$,于是式 (5)成为:

$$A^{\frac{1}{p}}B^{\frac{1}{q}}\le\frac{A}{p}+\frac{B}{q}\tag{6}$$

如果 $\|f\|_p=0$(或 $\|g\|_q=0$),则 $f(t)=0$ a. e.于 $[a,b]$(或 $g(t)=0$ a. e.于 $[a,b]$),这时,不等式 (1)自然成立,所以不妨设 $\|f\|_p>0$, $\|g\|_q>0$.作函数 $\varphi(t)=\frac{|f(t)|}{\|f\|_p}$, $\psi(t)=\frac{|g(t)|}{\|g\|_q}$,令 $A=|\varphi(t)|^p$, $B=|\psi(t)|^q$,代入不等式,得到:

$$|\varphi(t)\psi(t)|\le\frac{|\varphi(t)|^p}{p}+\frac{|\psi(t)|^q}{q}\tag{7}$$

由式 (4) 立即可知 $\varphi(t)\psi(t)$在 $[a,b]$上 L可积,由此可知 $f(t)g(t)$也 L可积,对式 (7) 两边积分,可得 $\int_a^b|\varphi(t)\psi(t)|\,dt\le\int_a^b\frac{|\varphi(t)|^p}{p}dt+\int_a^b\frac{|\psi(t)|^q}{q}dt=1$,因此 $\int_a^b|f(t)g(t)|\,dt\le\|f\|_p\|g\|_q$. 证毕.

证法 2　首先证明当 $p>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$时,对任何正数 A与 B,有式 (3)成立.

设 $f(x)=\ln x$,则 $f'(x)=\frac{1}{x}$, $f''(x)=-\frac{1}{x^2}$,故 $f''(x)<0$.所以 $f(x)$为凹函数,由凹函数的定义,有式 (1)成立,取 $\lambda=\frac{1}{p}$,得 $f\left(\frac{1}{p}x_1+\left(1-\frac{1}{p}\right)x_2\right)\ge\frac{1}{p}f(x_1)+\left(1-\frac{1}{p}\right)f(x_2)$.

由于 $A,B>0$,则取 $x_1=A$, $x_2=B$,得 $f\left(\frac{1}{p}A+\left(1-\frac{1}{p}\right)B\right)\ge\frac{1}{p}f(A)+\left(1-\frac{1}{p}\right)f(B)$.即 $\ln\left(\frac{1}{p}A+\frac{1}{q}B\right)\ge\frac{1}{p}\ln A+\frac{1}{q}\ln B=\ln A^{\frac{1}{p}}+\ln B^{\frac{1}{q}}=\ln A^{\frac{1}{p}}B^{\frac{1}{q}}$.

又因为 $f(x)=\ln x$为定义域上的增函数,则式 (3)成立,后如证法 1.

证法 3　首先证明当 $p>1,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$时,对任何正数 A与 B,有式 (3)成立.

取 $A=kx^p$, $B=k$,其中 $k\in R^+$,则要证 $(kx^p)^{\frac{1}{p}}k^{\frac{1}{q}}\le\frac{kx^p}{p}+\frac{k}{q}$,即 $k^{\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)}x\le\frac{kx^p}{p}+\frac{k}{q}$,又因为 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$,所以

即证 $kx \leq \frac{kx^p}{p} + \frac{k}{q}$,且 $k \in R^+$,即要证 $x \leq \frac{x^p}{p} + \frac{1}{q}$.

设 $f(x) = kx^p, 0 < x < +\infty$,则 $f'(x) = kpx^{p-1}, f''(x) = kp(p-1)x^{p-2}$,因为 $k \in R^+, p > 1, x > 0$,所以 $f''(x) > 0$,故 $f(x)$为凸函数,由凸函数的定义,有 $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$.

取 $\lambda = \frac{1}{p}$,得 $f(\frac{1}{p}x_1 + (1-\frac{1}{p})x_2) \leq \frac{1}{p}f(x_1) + (1-\frac{1}{p})f(x_2)$;取 $x_1 = x, x_2 = 1$,得 $f\left(\frac{x^p}{p} + \left(1-\frac{1}{p}\right)\right) \leq \frac{1}{p}f(x^p) + \left(1-\frac{1}{p}\right)$.

即 $\frac{k}{p}x^p + \frac{k}{q} \geq k(\frac{x}{p} + \frac{1}{q})^p$;$\frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q} \geq \left(\frac{x}{p} + \frac{1}{q}\right)^p = \left(\frac{x}{p} + 1 - \frac{1}{p}\right)^p = \left(\frac{x-1}{p} + 1\right)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k \left(\frac{x-1}{p}\right)^k \geq 1 + (x-1) = x$.

故证得 $A^{\frac{1}{p}} B^{\frac{1}{q}} \leq \frac{A}{p} + \frac{B}{q}$,后如证法 1.

参考文献:

[1] 李国祯. 实分析与泛函分析引论 [M]. 北京:科学出版社, 2004

[2] 陈传璋. 数学分析 (2版)上册 [M]. 北京:高等教育出版社, 1983

[3] 定光桂. 泛函分析新讲 [M]. 北京:科学出版社, 2007

[4] 门少平,封建湖. 应用泛函分析 [M]. 北京:科学出版社, 2005

[5] 匡继昌. 常用不等式 (3版) [M]. 济南:山东科学技术出版社, 2004

[6] 裴礼文. 数学分析中的典型问题与方法 (2版) [M]. 北京:高等教育出版社, 2006

[7] 程其襄. 实变函数与泛函分析基础 (2版) [M]. 北京:高等教育出版社, 2003

[8] 张恭庆,郭懋正. 泛函分析讲义 [M]. 北京:北京大学出版社, 1990

[9] 王声望,郑维行. 实变函数与泛函分析概要 (3版) [M]. 北京:高等教育出版社, 2005

[10] 罗原. 含反常积分的非线性不等式的推广 [J]. 重庆工学院学报, 2008, 22(7): 66 - 70

Using convex function to prove the Hölder Inequation

WEI Jia-li, GUO Hui

(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

Abstract: This paper proves the Holder Inequation by constructing the convex functions and its properties It shows that the Holder theory can be proved not only through algebraic approach, integration method and differential method but also through constructing convex functions

Key words: Hölder Inequation; convex function; constructing a function

责任编辑:李翠薇