第 26卷第 6期 重庆工商大学学报 (自然科学版) 2009年 12月
Vol. 26 NO. 6 J Chongqing Technol Business Univ. (Nat Sci Ed) Dec. 2009

文章编号: 1672 - 058X(2009) 06 - 0538 - 02

关于强边着色猜想的最优图问题

张卫标,杨清军

(重庆大学 数理学院,重庆 400030)

摘 要:著名图论专家 Erdös和Nešetřil对图的强边着色数上界提出了一个猜想:当 Δ为偶数时,$\chi'_s(G) \le \frac{5}{4}\Delta^2$;当 Δ为奇数时,$\chi'_s(G) \le \frac{1}{4}(5\Delta^2 - 2\Delta + 1)$,他们给出了当 $\Delta = 4$的时的最优图. 此处构造了一族图,并以此证明了当 Δ为偶数时,如果 Erdös和Nešetřil提出的强边着色猜想成立,则猜想中的上界是最优的.

关键词:边着色;强边着色;最优图

中图分类号:O157. 5 **文献标志码**: A

此处所涉及的图均为无向有限图,未介绍的术语和记号请参见参考文献[1, 2]. 对于图 G的一个正常的边着色是指在图中任意相邻的两条边必须着不同的颜色. 强边着色是指一个正常的边着色,并且满足对任意长为 3的路上的边不能有相同的颜色. 一个图 G的强边色数是指 G中所有强边着色中所用色数的最小者,记为$\chi'_s(G)$. 著名图论专家 Erdös和Nešetřil[3]提出了强边着色猜想:对于图 G,如果 Δ为偶数,则 $\chi'_s(G) \le \frac{5}{4}\Delta^2$;如果 Δ为奇数,则 $\chi'_s(G) \le \frac{1}{4}(5\Delta^2 - 2\Delta + 1)$. Andersen[3]和 Cranston[4]等对此做了相关研究. 强边着色猜想中使得等式成立的图叫做最优图.

Erdös和Nešetřil给出了当 $\Delta = 4$时的最优图 (图 1),从图 1中可以看出,图 G_1 的边数 $|E(G_1)| = 20$,且 G_1 中任意两边都在长为 3的路上,所以,$\chi'_s(G_1) = 20 = \frac{5}{4}\Delta^2$, G_1 即为 $\Delta = 4$时的最优图.

引理 1 对于 $\Delta = 6$,存在最大度为 Δ的最优图.

证明 构造了一个图 G_2,如图 2所示,它是在图 G_1 的基础上增加了 5个顶点和一些边. 仿照图 1的方式

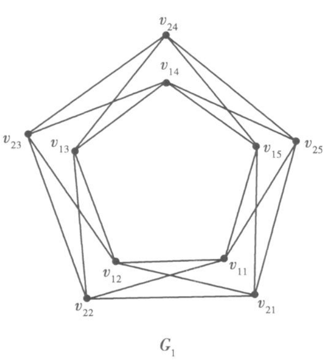

图 1

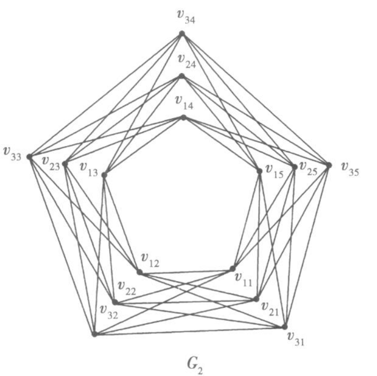

图 2

对图 G_2 上的顶点进行标号,最内层 5圈的各个顶点按顺时针方向记为 $v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}$;相应地第二层 5圈

收稿日期: 2009 - 09 - 29;**修回日期**: 2009 - 10 - 20.
作者简介:张卫标 (1980 -),男,河南虞城人,硕士研究生,从事图论及其应用研究.

的对应顶点记为 $v_{21}, v_{22}, v_{23}, v_{24}, v_{25}$;新增加的顶点分别记为 $v_{31}, v_{32}, v_{33}, v_{34}, v_{35}$;这些顶点也在一个 5圈 $v_{31}v_{32}v_{33}v_{34}v_{35}v_{31}$上. 在图 G_1 的基础上新增加的边有 $v_{31}v_{32}, v_{31}v_{35}, v_{31}v_{22}, v_{31}v_{25}, v_{31}v_{12}, v_{31}v_{15}; \cdots; v_{35}v_{34}, v_{35}v_{24}, v_{35}v_{21}, v_{35}v_{14}, v_{35}v_{11}$. 有 $|E(G_2)| = \frac{5}{4}\Delta^2 = 45$. 从图 2可以看出, G_2 中任意两边都在长为 3的路上,故 $\chi'_s(G_2) = 45$,即构造的图 G_2 为 $\Delta = 6$的最优图.

定理 1　对于 $\Delta = 2k; k = 1, 2, \cdots, n$,存在最大度为 Δ的最优图.

证明　首先构造 k个互不关联的 5圈. 仿照图 1的方式对这 k层 5圈上的顶点进行标号,令第 i层 5圈上的 5个顶点分别按顺时针方向记为 $v_{i1}, v_{i2}, v_{i3}, v_{i4}, v_{i5}$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$. 接下来用边来连接各层 5圈的顶点:将第 i层 5圈上的顶点 v_{i1} $(i = 1, 2, \cdots, k)$与顶点 $v_{12}, v_{22}, \cdots, v_{i-1,2}, v_{i+1,2}, \cdots v_{k2}; v_{15}, v_{25}, \cdots, v_{i-1,5}, v_{i+1,5}, \cdots, v_{k5}$ 分别用一条边相连,同样将 v_{i2} $(i = 1, 2, \cdots, k)$与顶点 $v_{11}, v_{21}, \cdots, v_{i-1,1}, v_{i+1,1}, \cdots, v_{k1}; v_{13}, v_{23}, \cdots, v_{i-1,3}, v_{i+1,3}, \cdots, v_{k3}$分别用一条边相连;将 v_{i3} $(i = 1, 2, \cdots, k)$与顶点 $v_{12}, v_{22}, \cdots, v_{i-1,2}, v_{i+1,2}, \cdots, v_{k2}; v_{14}, v_{24}, \cdots, v_{i-1,4}, v_{i+1,4}, \cdots, v_{k4}$分别用一条边相连;将 v_{i4} $(i = 1, 2, \cdots, k)$与顶点 $v_{13}, v_{23}, \cdots, v_{i-1,3}, v_{i+1,3}, \cdots, v_{k3}; v_{15}, v_{25}, \cdots, v_{i-1,5}, v_{i+1,5}, \cdots, v_{k5}$分别用一条边相连;将 v_{i5} $(i = 1, 2, \cdots, k)$与顶点 $v_{14}, v_{24}, \cdots, v_{i-1,4}, v_{i+1,4}, \cdots, v_{k4}; v_{11}, v_{21}, \cdots, v_{i-1,1}, v_{i+1,1}, \cdots, v_{k1}$分别用一条边相连,这样就得到图 G^*,由图 G^* 的构造过程知道,对任意 $v \in V(G^*)$,有 $d(v) = 2k$ 故 $|E(G^*)| = \frac{1}{2}\sum d(v) = 5k^2 = \frac{5}{4}\Delta^2$. 这样就得到了一个边数恰好等于强着色猜想上界的图,下证证明 G^* 为最优图.

要证明图 G^*为最优图,只需要证明 G^*中任意两条边都在长为 3的路上. 设 e_1 和 e_2 为 G^*中的任意两条边,显然 e_1 和 e_2 在同一 5圈 $v_{i1}v_{i2}v_{i3}v_{i4}v_{i5}v_{i1}$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$上时,结论成立. 以下讨论 e_1 和 e_2 不在同一 5圈 $v_{i1}v_{i2}v_{i3}v_{i4}v_{i5}v_{i1}$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$上的情况.

情况 1　若 e_1 在圈 $v_{i1}v_{i2}v_{i3}v_{i4}v_{i5}v_{i1}$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$上, e_2 在圈 $v_{j1}v_{j2}v_{j3}, v_{j4}v_{j5}v_{j1}$ $(j = 1, 2, \cdots, k)$ $(j \neq i)$上,若 $e_1 = v_{i1}v_{i2}$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$:

情况 1(a)　当 $e_2 = v_{j1}v_{j2}$ $(j = 1, 2, \cdots, k)$时, e_1 和 e_2 在长为 3的路 $v_{i1}v_{i2}v_{j1}v_{j2}$上.

情况 1(b)　当 $e_2 = v_{j2}v_{j3}$ $(j = 1, 2, \cdots, k)$时, e_1 和 e_2 在长为 3的路 $v_{i1}v_{i2}v_{j3}v_{j2}$上.

情况 1(c)　当 $e_2 = v_{j3}v_{j4}$ $(j = 1, 2, \cdots, k)$时, e_1 和 e_2 在长为 3的路 $v_{i1}v_{i2}v_{j3}v_{j4}$上.

情况 1(d)　当 $e_2 = v_{j4}v_{j5}$ $(j = 1, 2, \cdots, k)$时, e_1 和 e_2 在长为 3的路 $v_{i2}v_{i1}v_{j5}v_{j4}$上.

情况 1(e)　当 $e_2 = v_{j5}v_{j1}$ $(j = 1, 2, \cdots, k)$时, e_1 和 e_2 在长为 3的路 $v_{i1}v_{i2}v_{j1}v_{j5}$上.

e_1 为 5圈 $v_{i1}v_{i2}v_{i3}v_{i4}v_{i5}v_{i1}$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$上的其他边时,由 G^* 的对称性,类似可证 e_1 和 e_2 在长为 3的路上.

情况 2　若 e_1 在某个圈 $v_{i1}v_{i2}v_{i3}v_{i4}v_{i5}v_{i1}$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$上,但 e_2 不在某个 5圈 $v_{j1}v_{j2}v_{j3}, v_{j4}v_{j5}v_{j1}$ $(j = 1, 2, \cdots, k)$ $(j \neq i)$上,由 G^* 的对称性,可设 $e_1 = v_{i1}v_{i2}$ $(j = 1, 2, \cdots, k)$:

情况 2(a)　若 e_2 与 5圈 $v_{i1}v_{i2}v_{i3}v_{i4}v_{i5}v_{i1}$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$的某一个顶点相关联:

1)若 e_2 与 $v_{i1}, v_{i2}, v_{i3}, v_{i5}$中的某个相关联时,则结论显然成立;

2)若 e_2 与 v_{i4}相关联时,此时 $e_2 = v_{i4}v_{j3}$或 $e_2 = v_{i4}v_{j5}$ $(i \neq j)$,则 e_1 和 e_2 在长为 3的路 $v_{i1}v_{i2}v_{j3}v_{i4}$或 $v_{i2}v_{i1}v_{j5}v_{i4}$上.

情况 2(b)　若 e_2 与 5圈 $v_{i1}v_{i2}v_{i3}v_{i4}v_{i5}v_{i1}$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$上的顶点不相关联:

设 $e_2 = v_{ml}v_{nk}$,其中 $m \neq n; l, k = 1, 2, \cdots, 5$. 由 G^* 的构造,必有 l, k之一不等于 4. 不妨设 $l \neq 4$,由 G^* 的构造, v_{ml}必与 v_{i1}或 v_{i2}之一相邻,即 e_1 和 e_2 在长为 3的路上.

情况 3　若 e_1 和 e_2 都不在某一个 5圈 $v_{i1}v_{i2}v_{i3}v_{i4}v_{i5}v_{i1}$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$上,设 $e_1 = v_{il}v_{jk}$, $e_2 = v_{mp}v_{nq}$ $(i \neq j, m \neq n; l, k, p, q \in \{1, 2, \cdots, 5\})$,由 G^* 的构造知, $l \neq k, p \neq q$

情况 3(a)　若 $l = p$或 $l = q$,不妨设 $l = p$,由 G^* 的构造,有 $k = p - 1$或 $k = p + 1$(若 $p = 5$, $k = 1$),则 e_1 和 e_2 在长为 3的路 $v_{il}v_{jk}v_{mp}v_{nq}$上.

情况 3(b)　若 $l \neq p, q$,但 $k = p$或 q,类似地,结论成立.

情况 3(c)　若 $l \neq p, q$,且 $k \neq p, q$,因 $l, k, p, q \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 并且 l与 k相差 1,或者其中之一为 5, 另一个为 1; p与 q相差 1,或者其中之一为 5, 另一个为 1,因此必存在 l, k之一和 p, q之一. 不妨设为 l, p,使得 l与 p相差 1,或者其中之一为 5, 另一个为 1,由 G^* 的构造, e_1 和 e_2 在长为 3的路 $v_{jk}v_{il}v_{mp}v_{nq}$上.

综上, G^* 的任意的两条边均在长为 3的路上,故定理 1成立.

(下转第 547页)

Research on probability model of vehicle quality based on the broken-down number per thousand cars

SONG Li-hong[1], YAO Xiao-xia[2]

(1. Economics and Management Center, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China; 2. Department of Mathematics, Chuxiong Normal University, Yunnan Chuxiong 675000, China)

Abstract: This paper uses broken-down number per thousand cars of vehicle post-salecar to analyse the reliability of vehicle parts and carload, sets up the reliability theory model from the standpoint of statistical learning theory, overcomes the deficiency of empirical analysis on traditional method, explores the strategy of production organization and transport of products parts, and offers support means for decision-making of vehicle post-sale management

Key words: post-sale management; the broken-down number per thousand cars; decision-making research

责任编辑:罗泽举

(上接第 539页)

参考文献:

[1] BONDY J A, MURTY U S R. Graph Theory with Applications [M]. New York: The Macmillan Press Ltd, 1976

[2] WEST D B. Introduction to Grapy Theory (2nd ed) [M]. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 2001

[3] ANDERSEN L D. The strong chromatic index of a cubic graph is at most 10, Topological, algebraical and combinatorial structures Frolík's emporia volume[J]. Discrete Math, 1992, 108 (1-3): 231-252

[4] CRANSTON D W. Strong edge-coloring of graphs with maximum degree 4[J]. Discrete Math, 2006, 306: 2772-2778

[5] 龙昌满. 图的边割的矩阵判别法[J]. 重庆工学院学报, 2008, 22(7): 113-137

On the optimum graph of strong edge coloring conjecture

ZHANG Wei-biao, YANG Qing-jun

(College of Mathematics and Physics, Chongqing University, Chongqing 400030, China)

Abstract: In 1985, the famous graph theory expert Erdös and Nešetřil conjectured that strong edge-coloring number of a graph is bounded above by $\frac{5}{4}\Delta^2$ when Δ is even and $\frac{1}{4}(5\Delta^2 - 2\Delta + 1)$ when Δ is odd. They gave a graph of $\Delta = 4$. In this paper, we construct a series of such graphs and prove that if the Strong Edge Coloring Conjecture is correct, the boundary number is optimum.

Key words: edge coloring; strong edge-coloring; optimum graph

责任编辑:李翠薇