文章编号: 1672 - 058X(2009) 05 - 0424 - 05

求解初始可行基的算法实现

申 红 莲
(衡水学院 数计学院 ,河北 衡水 053000)

摘 要:对于规模较大的线性规划问题,基于矩阵初等变换求初始可行基,判断的过程会比较复杂;由此提出利用 Matlab软件对系数矩阵进行初等行变换,通过判断和换基迭代求得初始可行基,简化了求解过程.

关键词:线性规划;单纯形;初始可行基;Matlab
中图分类号: O221. 1 文献标志码: A

求解 LP模型时,常用基本单纯形方法、大 M法、两阶段法等[1],根据对模型中是否存在单位基矩阵、存在怎么样的基矩阵等特征的判断来选择方法或判断解的存在与否. 初始基 (矩阵)的确定是一个关键问题,通常使用大 M法和两阶段法,在手工计算的情况下,大大的增加了计算量,在理解和教学中常常带来不便. 线性规划问题的标准形式为:

$$\min s = cx \quad \text{s t}\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (b_i \geq 0, 1 \leq i \leq m) \tag{1}$$

基于矩阵初等变换求初始可行基是 2007年申卯兴提出的一种新方法[2-5],其基本思想是依据矩阵的初等变换不会改变矩阵的秩. 对线性规划模型的系数增广矩阵 $B = [Ab]_{m \times (n+1)}$进行初等行变换, 在始终保持约束条件右端项 b非负的前提下将增广矩阵化简为行简化梯矩阵, 行简化梯矩阵中的列单位向量所对应的向量即是 $r \times r$阶的初始可行基, $r \leq m$, 并且 r表示模型 (1)中独立约束的个数,非零行所对应的即为独立约束条件.

线性规划问题基本求解思想是从约束方程组的所有解中找到一个非负的解并且使得目标函数值最小,而且经过初等行变换之后行简化梯矩阵所对应的线性方程组跟原来方程组是同解的,由此可考虑用行简化梯矩阵来替换原来的系数矩阵. Matlab软件具有很强的数值计算功能,能较快地实现初等行变换的过程,由此可考虑利用计算机程序结合初等行变换来实现初等可行基的选取.

1 求解初始可行基步骤描述和算法实现

$$\min s = cx \quad \text{s t}\begin{cases} o\_Ax = o\_b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (1 \leq i \leq o\_m) \tag{2}$$

式 (2)不要求 b非负. 首先利用 Matlab对式 (2)中系数增广矩阵 $B = [o_Ao_b]_{o_m \times (n+1)}$进行初等行变换,使其化简成行简化梯矩阵 *jian_old*, 当 *jian_old*下方出现 0行时,说明方程中存在多余的方程,可以去掉,形成的新矩阵记为 $jian\_new = [Ab]_{m \times (n+1)}$, m表示系数矩阵的秩并且 $m \leq o\_m$:当 b满足非负要求时,行简化梯

收稿日期: 2009 - 07 - 01;修回日期: 2009 - 08 - 02
作者简介:申红莲 (1982 -),女,河北定州人,助教,硕士研究生,从事优化理论及其应用研究.

矩阵 *jian_new* 中的列单位向量所对应的向量即是 $m \times m$ 阶的初始可行基,由此可作出单纯形表,利用单纯形法最终求得最优解;当 b 不满足非负要求时,利用对偶单纯形法的理论进行判别:若 b 中负分量所对应的行中只有非负数,则可知原线性规划问题没有可行解;若 b 中所有负分量所对应的行中都有非负数,则需要进行换基迭代.

步骤如下:

1)输入线性规划问题的参数 c, $o\_A_{(o\_m \times n)}$, o_b,令 $B = [o\_A\, o\_b]$,利用函数 $jian\_old = \mathrm{rref}(B)$ 使其化成行简化梯矩阵,利用循环语句使其下边的零行消掉,成为新矩阵 $jian\_new = [A\, b]_{m \times (n+1)}$.

2)判别若 $b \geq 0$,以 *jian_new* 中的单位矩阵的列所相应的变量为基变量,以 *jian_new* 作为新的系数增广矩阵进行计算而得到初始单纯形表,利用单纯形法求得最优解;

3)若 b 中有负分量,且 b 中负分量所对应的行中只有非负数,则可知原线性规划问题没有可行解;若都有非负数,可从第一个负分量所对应的行中选取最左边的负数作为轴心项进行换基迭代成为 $jian\_h = [A1\, b1]$,对 $b1$ 进行判别:若非负,返回 2);不满足继续进行 3). 经过若干次之后,一定能求得可行解或判定问题无可行解.

2　实例应用

例 1　$\min s = -3x_1 + x_2 + x_3$　　$s.t.\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 3 \\ -2x_1 + x_3 = 1 \\ x_i \geq 0\ (i = 1, 2, \cdots, 5) \end{cases}$

解　在题中, $c = [-3\ 1\ 1\ 0\ 0]$; $o\_A = [1\ -2\ 1\ 1\ 0;\ -4\ 1\ 2\ 0\ -1;\ -2\ 0\ 1\ 0\ 0]$; $o\_B = [11\ 3\ 1]'$;

利用 Matlab结果进行初等行变化结果显示如下图 1:

jian_new=

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/3 & -2/3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & -4/3 & 9 \end{bmatrix}$$

jian_new=

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/3 & -2/3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & -4/3 & 9 \end{bmatrix}$$

图 1　行简化梯矩阵

从图 1中可以看到,对 $B = [o\_A\, o\_b]_{3\times5}$ 进行行简化之后的梯矩阵 *jian_new* 最后一列只有非负数,所以可作为新的增广矩阵,确定出基变量和单纯形表见图 2:

jixuhao=

[1　2　3]

TB=

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & -1/3 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 9 & 0 & 0 & 1 & 2/3 & -4/3 \end{bmatrix}$$

图 2　基变量下标和可行基对应的初始单纯形表

其中 *jixuhao* 为基变量的下标,可以看出可行基为单位矩阵 E. *TB* 为利用 *jian_new* 作为新的系数矩阵得

到的初始可行基所对应的单纯形表,表达式为 $TB = [cb*E*b\ cb*E*A - c; E*b\ E*A]$,其中 cb为基变量对应的系数向量.由检验数非正可知,$B = (P_1, P_2, P_3)$即为最优基,最优解为 $x_1 = 4, x_2 = 1, x_3 = 9$;最优目标函数值为 $s_{min} = 2$.

例 2 $\min s = 4x_1 + 3x_3$ s.t. $\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{2}{3}x_4 = 2 \\ 3x_1 + \frac{3}{4}x_3 = 3 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \cdots, 4) \end{cases}$

解 在题中,$c = [4\ 3\ 0\ 0]$; $o\_A = [1/2\ 1\ 1/2\ -2/3; 3/2\ 0\ 3/4\ 0; 3\ -6\ 0\ 4;]$; $o\_B = [2\ 3\ 0]'$;

利用 Matlab进行初等行变化结果显示如下图 3:

jian_old=

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1/4 & -2/3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

jian_new=

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1/4 & -2/3 & 1 \end{bmatrix}$$

图 3 行简化梯矩阵

从图 3中可以看到,*jian_old*中含有零行,说明原方程组中含有多余方程组,去掉零行之后得到的 *jian_new*所对应的方程组和原来是同解的,因此可用 *jian_new*作为新的约束系数矩阵,最后一列都是非负数,求基和做单纯形表如下图 4:

jixuhao=

[1 2]

TB=

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1/4 & -2/3 \end{bmatrix}$$

图 4 基变量下标和可行基对应的初始单纯形表

由图 4的单纯形表可以看出,$B = (P_1, P_2)$已经是最优基,最优解为 $x_1 = 2, x_2 = 1$;最优目标函数值为 $s_{min} = 8$

例 3 $\min s = 2x_1 + 2x_2$ s.t. $\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 = -2 \\ x_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \cdots, 4) \end{cases}$

解:在题中,$c = [2\ 2\ 0\ 0]$; $o\_A = [-1\ 1\ -1\ 0; 1\ 1\ 0\ 1]$; $o\_B = [1\ -2]'$;

利用 Matlab进行初等行变化结果显示如图 5:

从图 5的行简化梯矩阵中可以看到,b中有负分量,而且第一个负分量 $-\frac{3}{2}$所对应的行中只有非负数,则可知原线性规划问题没有可行解.由此可以看出,对于某些问题,只要把行简化梯矩阵计算出来,很容易的就能判断线性规划问题没有可行解.

jian_old=

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

jian_new=

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

图 5　行简化梯矩阵

例 4　$\min s = -8x_1 - 20x_2 - 10x_3 - 20x_4 - 21x_5 \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 + x_6 = 10 \\ x_1 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 + x_7 = 24 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 + x_8 = 21 \\ x_i \geq 0\ (i = 1, 2, \cdots, 8) \end{cases}$

解:在题中, *c* = [- 8 - 20 - 10 - 20 - 21 0 0 0]; *o_A* = [1 2 1 0 1 1 0 0; 1 0 1 3 2 0 1 0; 1 2 2 2 2 0 0 1]; *o_B* = [10 24 21].

利用 Matlab**进行初等行变化结果显示如下图** 6:

jian_old=

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 11 \end{bmatrix}$$

jian_new=

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & -3/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 11 \end{bmatrix}$$

图 6　行简化梯矩阵

从图 6**中可知** *b***有负分量,而且所在行有负数,所以选择最左端的** $-\frac{3}{2}$**进行换基迭代,得新的等价的同解的线性方程组的系数矩阵** *jian_h* = [*A*1*b*1]**如下图** 7:

jian_h=

$$\begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 0 & 0 & 2/3 & 4/3 & 2/3 & -1 & 25/3 \\ 0 & -2/3 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 1/3 & 0 & 14/3 \\ 0 & 4/3 & 1 & 0 & 1/3 & -1/3 & -2/3 & 1 & 5/3 \end{bmatrix}$$

图 7　换基迭代后的矩阵

从图 7**看到,换基之后** *b*1**已经非负,故以** *jian_h***作为新的约束系数矩阵,选择** x_1, x_4, x_3 **为基变量,作出单纯形表如图** 8:

jixuhao=

[1　4　3]

TB=

$$\begin{bmatrix} -530/3 & 0 & 44/3 & 0 & 0 & 17/3 & -2/3 & -16/3 & -2 \\ 25/3 & 1 & 2/3 & 0 & 0 & 2/3 & 4/3 & 2/3 & -2 \\ 14/3 & 0 & -2/3 & 0 & 1 & 2/3 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ 5/3 & 0 & 4/3 & 1 & 0 & 2/3 & -1/3 & -2/3 & 1 \end{bmatrix}$$

图 8　换基迭代后的矩阵

从上述初始单纯形表利用单纯形法进行换基迭代,可得最优单纯形表如下表 1:

表 1 例 4最优基对应的单纯形表

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
s'	-220	-3	-2	-11	0	0	-1	0	-10
x_5	10	1	2	1	0	1	1	0	0
x_7	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	-1	0	0	1	1	$-\frac{3}{2}$
x_4	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	0	1	0	-1	0	$\frac{1}{2}$

3 总 结

主要利用 Matlab函数实现初等行变换,通过判断和换基迭代得到可行基,转化约束条件系数矩阵得到初始可行基所对应的单纯形表,由此可以顺利地求解任何线性规划模型.通过实例表明,算法是有效可行和快捷的.

参考文献:

[1] 胡富昌. 线性规划 [M]. 北京:中国人民大学出版社, 1990

[2] 姚孟臣. 线性代数、概率统计 [M]. 北京:高等教育出版社, 2004

[3] 申卯兴,许进. 求解线性规划的单纯形法的直接方法 [J]. 计算机工程与应用. 2007, 43 (30): 94-96

[4] 范国兵. 一种求线性规划问题初始基可行解的方法 [J]. 重庆工商大学学报:自然科学版, 2007, 24 (3): 234-236

[5] 范国兵. 一种求线性规划问题初始基可行解的方法 [J]. 华北科技学院学报, 2007 (4): 95-96

[6] 王沫然. MATLAB与科学计算 (2版) [M]. 北京:电子工业出版社, 2004

Algorithm realization of solving initial feasible basis

SHEN Hong-lian

(College of Mathematics and Computer, College of Hengshui, Hebei Hengshui 053000, China)

Abstract: Regarding the large - scale linear programming issue, the judgment process is quite possibly complex. We carry on the primary line of transformation using the MATLAB software to the coefficient matrix to obtain the initial feasible basis through judgment and basis iteration, the solution process is more quickly convenient. The example indicated that this algorithm is effective.

Key words: linear programming; simple method; initial feasible basis; Matlab

责任编辑:李翠薇