文章编号: 1672 - 058X(2009)05 - 0415 - 05

正算子方块积的代数性质

汪威威[1],毕红梅[2]
(1. 西安工业大学 数理系,西安 710032; 2. 空军工程大学 理学院,西安 710038)

摘 要:通过量子计算和量子信息理论中两个物理量 concurrence和 fidelity引入正算子方块积的概念,类比序列积代数性质的相关结果,给出了方块积的一些代数性质和反例,并对不同 Hilbert空间之间保持 concurrence或 fidelity的变换进行了刻画.

关键词:序列积;方块积;密度矩阵;保持

中图分类号: O177. 1 **文献标志码**: A

1994年,美国数学家 Foulis和 Bennett引进了抽象效应代数的概念来作为量子计算、量子测量的数学模型[1]. 其中量子测量是量子力学的主要内容之一. 为了在实际中刻画效应的序列测量, S. Gudder在文献[2, 3]中引入了效应代数的序列积,并且研究了序列积的一些代数性质. S. Hill和 W. Wootter在文献[4]中引入了"concurrence"的概念,用来得到一个关于量子纠缠信息的明显公式. "fidelity"是由 Richard Jozsa为研究转移概率(transition probability)而引入的一个概念[5]. 如今这两个物理量在量子计算和量子信息理论中占有越来越重要的地位[6 - 8].

先引进一些必要的记号和定义. 记 H, K为复 Hilbert空间, $B(H)$为 H上全体线性有界算子组成的 C^*-代数, $C_1(H)$为 H上全体迹类算子的理想. $B(H)$上的全体正算子记为 $B^+(H)$且 $C_1^+(H) = C_1(H) \cap B^+(H)$. $C_1^+(H)$中迹为 1的元称为 H上的密度算子, H上的全体密度算子的集合记为 $D(H)$. 记 $P_1(H)$为 H上的全体一秩投影算子的集合,它实际上是凸集 $D(H)$的极点. $P_1(H)$中的元又称为纯态. H上的满足 $0 \leq A \leq I$的全体算子 A的集合记为 $\varepsilon(H)$.

对 $A, B \in C_1^+(H)$,设 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots$为正的迹类算子 $\sqrt{\sqrt{A}B\sqrt{A}}$的特征值(按重数计算). A和 B的 Concurrence $C(A, B)$定义如下:

$$C(A, B) = \max\{0, \lambda_1 - \sum_{j>1}\lambda_j\}$$

Hilbert空间上正算子 A和 B的 fidelity $F(A, B)$定义为:

$$F(A, B) = \operatorname{tr}\sqrt{\sqrt{A}B\sqrt{A}}$$

从上面的讨论可以看出,运算 $(A, B) \rightarrow \sqrt{\sqrt{A}B\sqrt{A}}$出现在上面考虑的两个概念的定义中. 因此,自然而然地引入下面的记号[9],对任意正算子 A, B,按如下公式给出它们的方块积:

$$A \Diamond B = \sqrt{\sqrt{A}B\sqrt{A}}$$

收稿日期: 2009 - 06 - 02; **修回日期**: 2009 - 07 - 10.
作者简介:汪威威(1981 -),男,湖北天门人,讲师,从事算子理论与量子计算研究.

1 方块积的运算

很明显,方块积满足下面的运算性质:

$$0\Diamond A=0,\ I\Diamond A=A\Diamond I=A^{\frac{1}{2}},\ (\lambda A)\Diamond B=A\Diamond(\lambda B)=\lambda^{\frac{1}{2}}(A\Diamond B),\ \forall\lambda\geq 0$$

在文献[2]中引入了序列积的概念,序列积在量子测量理论中占有重要的地位.很容易看到序列积和方块积它们两者之间的联系 $A\Diamond B=\sqrt{A\bigcirc B}$.

对于序列积,在文献[3]中证明了若 $A,B\in\varepsilon(H)$,则 $A\bigcirc B=B\bigcirc A\Leftrightarrow AB=BA$.对于方块积,有相同的结论:

定理1 若 $A,B\in B^{+}(H)$,则 $A\Diamond B=B\Diamond A\Leftrightarrow AB=BA$.

证明 对于 $A=0$ 或者 $B=0$ 或者 $A=B=0$ 的情况,证明是容易的.不妨设 $A,B\neq 0$,令 $A_1=\frac{A}{\|A\|}$,$B_1=\frac{B}{\|B\|}$,则 $A_1,B_1\in\varepsilon(H)$,$A=\|A\|A_1$,$B=\|B\|B_1$,且 $A_1\Diamond B_1=\frac{1}{\sqrt{\|A\|\|B\|}}A\Diamond B$,$B_1\Diamond A_1=\frac{1}{\sqrt{\|A\|\|B\|}}B\Diamond A$.故:

$$A\Diamond B=B\Diamond A\Leftrightarrow A_1\Diamond B_1=B_1\Diamond A_1\Leftrightarrow A_1\bigcirc B_1=B_1\bigcirc A_1\Leftrightarrow A_1B_1=B_1A_1\Leftrightarrow AB=BA$$

对于结合律,在文献[2]中证明了若 $A,B\in\varepsilon(H)$,则:

$$A\bigcirc(B\bigcirc C)=(A\bigcirc B)\bigcirc C(\forall C\in\varepsilon(H))\Leftrightarrow AB=BA$$

一个自然的想法就是对于方块积是否有同样的结论呢?也就是说若 $A,B\in B^{+}(H)$,是否有:

$$A\Diamond(B\Diamond C)=(A\Diamond B)\Diamond C(\forall C\in B^{+}(H))\Leftrightarrow AB=BA \tag{1}$$

很遗憾,下面的例子说明式(1)不成立.

例1 取 $A=\frac{1}{2}I$,$B=C=I$,虽然 $AB=BA$,但:

$$A\Diamond(B\Diamond C)=A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{4}}C^{\frac{1}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}I,\ (A\Diamond B)\Diamond C=A^{\frac{1}{4}}B^{\frac{1}{4}}C^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}I$$

从而得到 $A\Diamond(B\Diamond C)\neq(A\Diamond B)\Diamond C$.从这个例子可以看出式(1)是错误的,但是有下面的结论.

定理2 设 $A,B\in B^{+}(H)$ 且 $AB=BA$,则:

$$A\Diamond(B\Diamond C)^2=(A\Diamond B)^2\Diamond C,\ \forall C\in B^{+}(H)$$

即 $A\Diamond(B\bigcirc C)=(A\bigcirc B)\Diamond C$.

证明 通过计算易得:

$$(A\Diamond B)^2\Diamond C=((A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}C(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}=(A^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}CB^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}=A\Diamond(B\Diamond C)^2$$

对于分配律,在文献[2]中证明若 $A,B\in\varepsilon(H)$,则:

$$B=(A\bigcirc B)+(I-A)\bigcirc B\Leftrightarrow AB=BA$$

对于方块积是否也有同样的结论呢?也就是说若 $A,B\in B^{+}(H)$ 且 $A\leq I$,是否有:

$$B=A\Diamond B+(I-A)\Diamond B\Leftrightarrow AB=BA \tag{2}$$

很遗憾,下面的例子说明(2)不成立.

例2 取 $A=\frac{1}{2}I$,$B=I$,虽然 $AB=BA$,但 $A\Diamond B+(I-A)\Diamond B=\sqrt{2}I\neq I=B$.但是有下面的结论.

定理3 设 $A,B\in B^{+}(H)$ 且 $A\leq I$,若 $AB=BA$,则:

$$B=A^2\Diamond B^2+(I-A)^2\Diamond B^2$$

证明　若 $AB=BA$,则:

$$A^2\diamond B^2+(I-A)^2\diamond B^2=(AB^2A)^{\frac{1}{2}}+((I-A)B^2(I-A))^{\frac{1}{2}}=AB+(I-A)B=B$$

一般地,等式

$$C\diamond(A+B)=C\diamond A+C\diamond B \tag{3}$$

不成立.

例 3　取 $A=\lambda P, B=\mu P, C=C, \lambda,\mu\geq 0$,且 $P,C\in B^+(H)$,则:

$$C\diamond(A+B)=C\diamond((\lambda+\mu)P)=(\lambda+\mu)^{\frac{1}{2}}(C^{\frac{1}{2}}PC^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}},$$

$$C\diamond A+C\diamond B=\lambda^{\frac{1}{2}}(C^{\frac{1}{2}}PC^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}+\mu^{\frac{1}{2}}(C^{\frac{1}{2}}PC^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}=(\lambda^{\frac{1}{2}}+\mu^{\frac{1}{2}})(C^{\frac{1}{2}}PC^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\geq(\lambda+\mu)^{\frac{1}{2}}(C^{\frac{1}{2}}PC^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$$

若 $C=P\neq 0$且 $\lambda,\mu\neq 0$,则:

$$C\diamond(A+B)=(\lambda+\mu)^{\frac{1}{2}}P\neq(\lambda^{\frac{1}{2}}+\mu^{\frac{1}{2}})P=C\diamond A+C\diamond B$$

所以,在这种条件下,

$$C\diamond(A+B)\neq C\diamond A+C\diamond B$$

但是有 $C\diamond(A+B)=((C\diamond A)^2+(C\diamond B)^2)^{\frac{1}{2}}$,并且能证明若 A, B, C两两可交换,则:

$$C\diamond(A+B)\leq C\diamond A+C\diamond B$$

首先来看一个引理.

引理 1　若 $A, B\in B^+(H)$且 $AB=BA$,则 $A^{\frac{1}{2}}+B^{\frac{1}{2}}\geq(A+B)^{\frac{1}{2}}$.

证明　由 $A,B\in B^+(H)$,则 $A^{\frac{1}{2}},B^{\frac{1}{2}}\in B^+(H)$,且 $(A^{\frac{1}{2}}+B^{\frac{1}{2}})^2\geq(A+B)$,开平方得到 $A^{\frac{1}{2}}+B^{\frac{1}{2}}\geq(A+B)^{\frac{1}{2}}$.

定理 4　设 $A, B, C\in B^+(H)$,则:

(a) $C\diamond(A+B)=((C\diamond A)^2+(C\diamond B)^2)^{\frac{1}{2}}$;

(b)若 A,B,C两两可交换,则:

$$C\diamond(A+B)\leq C\diamond A+C\diamond B$$

证明　(a)通过计算可得:

$$((C\diamond A)^2+(C\diamond B)^2)^{\frac{1}{2}}=(C^{\frac{1}{2}}AC^{\frac{1}{2}}+C^{\frac{1}{2}}BC^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}=(C^{\frac{1}{2}}(A+B)C^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}=C\diamond(A+B)$$

(b)由引理 1,通过计算得到:

$$C\diamond A+C\diamond B=(C^{\frac{1}{2}}AC^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}+(C^{\frac{1}{2}}BC^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\geq(C^{\frac{1}{2}}AC^{\frac{1}{2}}+C^{\frac{1}{2}}BC^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}=C\diamond(A+B)$$

2　保持 concurrence或 fidelity的变换

在这一节中,推广文献[9]中的定理 1和文献[10]中的定理 1.

Wigner定理[11]　设 H, K为可分复 Hilbert空间,$\Phi: P_1(H)\rightarrow P_1(K)$为满射且满足:

$$tr(\Phi(P)\Phi(Q))=tr(PQ)\ (\forall P,Q\in P_1(H))$$

则存在一个酉或反酉算子 $U: H\rightarrow K$使得 Φ可表示为 $\Phi(P)=UPU^*\ (\forall P\in P_1(H))$.

引理 2　设 $A\in D(H)$,则下列结论是等价的:

(a) $C(A,A)=1$;

(b) $F(A,A)=1$;

(c) A为一秩算子.

证明　参见文献[9, 10].

引理 3 若 $P, Q \in P_1(H)$,则:

(a) $\sqrt{\sqrt{P}Q\sqrt{P}} = \sqrt{PQP} = \sqrt{tr(PQ)}P$;

(b) $C(P,Q) = F(P,Q) = \sqrt{tr(PQ)}$.

证明 显然.

$tr(PQ)$一般称为纯态 P和 Q之间的转移概率(transition probability).

引理 4 设 $A, B \in P_1(H)$,则当且仅当 $A = B$时 $C(A,B) = 1$.

证明 假设 $A = B \in P_1(H)$,则由引理 2有 $C(A,B) = 1$. 反之,设 $C(A,B) = 1$,则存在单位向量 $x, y \in H$使得 $A = x\otimes x$, $B = y\otimes y$,由引理 3可得:

$$1 = C(A,B) = \sqrt{tr(AB)} = \sqrt{|\langle x, y\rangle|^2} = |\langle x, y\rangle|$$

再根据 Cauchy-Schwarz不等式有 $1 = |\langle x, y\rangle| \le \|x\| \|y\| = 1$,故 $y = \alpha x$,其中 $\alpha \in C$且 $|\alpha| = 1$,从而 $\forall z \in H$:

$$Bz = (y\otimes y)z = (\alpha x\otimes\alpha x)z = \langle z, \alpha x\rangle\alpha x = \bar{\alpha}\alpha\langle z, x\rangle x = (x\otimes x)z = Az$$

因此 $A = B$. 证毕.

下面的结论给出了不同 Hilbert空间之间保持 concurrence或 fidelity变换的一般形式.

定理 5 设 H, K为可分复 Hilbert空间,$\Phi: D(H) \to D(K)$为满射,则:

$$C(A,B) = C(\Phi(A),\Phi(B))\ (\forall A,B \in D(H))$$

当且仅当存在一个酉或反酉算子 $U: H\to K$使得 Φ可以表示为 $\Phi(A) = UAU^*$ $(\forall A \in D(H))$.

证明 必要性:首先,由引理 2可以看到 Φ把一秩算子映射为一秩算子,从而得到映射 $\Phi: P_1(H) \to P_1(K)$. 因为 $\Phi: D(H) \to D(K)$是满射,故 $\forall V \in P_1(K)$,存在 $W \in D(H)$使得 $\Phi(W) = V$. 注意到 $C(W,W) = C(\Phi(W),\Phi(W)) = C(V,V) = 1$. 再由引理 2有 $W \in P_1(H)$. 这就证明了 $\Phi: P_1(H) \to P_1(K)$为满射. 由引理 3和 Wigner定理,存在一个酉或反酉算子 $U: H\to K$使得:

$$\Phi(P) = UPU^*\ (\forall P \in P_1(H))$$

下面证这个等式在 $D(H)$上仍然成立. 设 $A \in D(H)$. 任取一单位向量 $x \in H$且令 $P = x\otimes x \in P_1(H)$. 易得:

$$\sqrt{\sqrt{P}A\sqrt{P}} = \sqrt{\langle Ax, x\rangle}P$$

由 $UPU^* = Ux\otimes Ux$,计算:

$$\begin{aligned}\sqrt{\langle Ax, x\rangle} &= C(P,A) = C(\Phi(P),\Phi(A)) = C(UPU^*,\Phi(A))\\ &= C(Ux\otimes Ux,\Phi(A)) = \sqrt{\langle U^*\Phi(A)Ux, x\rangle}\end{aligned}$$

由 x的任意性可得 $A = U^*\Phi(A)U$. 因此 $\forall A\in D(H)$,$\Phi(A) = UAU^*$.

充分性:设 $\Phi(A) = UAU^*$ $(\forall A\in D(H))$,则:

$$\sigma(\Phi(A)\Diamond\Phi(B))\backslash\{0\} = \sigma\left(\sqrt{\sqrt{\Phi(A)}\Phi(B)\sqrt{\Phi(A)}}\right)\backslash\{0\} =$$

$$\sigma(((UAU^*)^{\frac{1}{2}}(UBU^*)(UAU^*)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\backslash\{0\} = (\sigma((UAU^*)^{\frac{1}{2}}(UBU^*)(UAU^*)^{\frac{1}{2}}))^{\frac{1}{2}}\backslash\{0\} =$$

$$\sigma(UBU^*UAU^*))^{\frac{1}{2}}\backslash\{0\} = (\sigma(AB))^{\frac{1}{2}}\backslash\{0\}$$

$$\sigma(A\Diamond B)\backslash\{0\} = \sigma((A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}))^{\frac{1}{2}}\backslash\{0\}(\sigma(A^{\frac{1}{2}}BA^{\frac{1}{2}}))^{\frac{1}{2}}\backslash\{0\} = (\sigma(AB))^{\frac{1}{2}}\backslash\{0\}$$

$$\sigma(\Phi(A)\Diamond\Phi(B))\backslash\{0\} = \sigma(A\Diamond B)\backslash\{0\}\ (\forall A,B\in D(H))$$

$$\sigma(\Phi(A)\Diamond\Phi(B)) = \sigma(A\Diamond B)$$

$$C(\Phi(A),\Phi(B)) = C(A,B)$$

证毕.

注 1 在定理 5中,如果 $K = H$,则可得文献[9]中的定理 1,在这里没有假定变换 Φ 是单射. 事实上,由定理 5的证明及引理 4,很明显若 $\Phi: D(H) \to D(K)$为满射且使得:

$$C(A, B) = C(\Phi(A), \Phi(B)) \ (\forall A, B \in D(H))$$

则 $\Phi: P_1(H) \to P_1(K)$是双射.

类似地可以证明下面的定理,它是文献[10]中定理 1的推广,在文献[10]中假定的是 $K = H$.

定理 6 设 H, K为可分复 Hilbert空间,$\Phi: D(H) \to D(K)$为一满射变换,则 $F(A, B) = F(\Phi(A), \Phi(B))$ $(\forall A, B \in C_1^+(H))$,当且仅当存在一个酉或反酉算子 $U: H \to K$使得 Φ 可以表示为如下形式 $\Phi(A) = UAU^*$ $(\forall A \in C_1^+(H))$.

参考文献:

[1] FOULIS D J, BENNETT M K. Effect Algebras and Unsharp Quantum Logics [J]. Found Phys, 1994, 24: 1331-1352

[2] GUDDER S, NAGY G. Sequential quantum measurements [J]. J. Math. Phys, 2001, 42: 5212-5222

[3] GUDDER S, NAGY G. Sequentially independent effects[J], Proc. Amer. Math. Soc., 2002, 130: 1125-1130

[4] HILL S, WOOTTERS W. Entanglement of a pair of quantum bits [J]. Phys. Rev. Lett, 1997, 78: 5022-5025

[5] UHLMANN A. On "partial" fidelities [J]. Rep. Math. Phys, 2000, 45: 407-418

[6] 胡冬梅,冉扬强,黄小春. 原子与双光场耦合系统量子信息保真度研究[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版, 2007, 24(2): 144-145

[7] BELAVKIN V P. Operational distance and fidelity for quantum channels [J]. J. Math. Phys, 2005, 46: 062106

[8] HELLMUND M, UHLMANN A. Concurrence and Entanglement Entropy of Stochastic 1-Qubit Maps [J]. Phys. Rev. A, 2009, 79: 052319

[9] MOLNÁR L, TIMMERMANN W. Transformations on the sets of states and density operators [J]. Linear Algebra and its Applications, 2006, 418: 75-84

[10] MOLNÁR L. Fidelity preserving maps on density operators [J]. Rep. Math. Phys, 2001, 48: 299-303

[11] BARGMANN V. Note on Wigner's theorem on symmetry operations [J]. J. Math. Phys, 1964, 5: 862-868

Some algebraic properties of the ◇-products of positive operators

WANG Wei-wei[1], BI Hong-mei[2]

(1. Department of Mathematics and Physics, Xian Technological University, Xian 710032, China; 2. School of Science, Airforce Engineering University, Xian 710038, China)

Abstract: We introduce the ◇-products by considering two physical quantities (namely, the concurrence and fidelity), which play an important role in quantum computation and quantum information. Then by comparing ◇-product with the sequential product, we give some algebraic properties of ◇-products and some counter examples. Finally, we obtain a characterization of trans-formations that preserve concurrence or fidelity between different Hilbert spaces.

Key words: sequential product; ◇-product; density matrix; preservers

责任编辑:罗泽举