第 26卷第 4期 重庆工商大学学报 (自然科学版) 2009年 8月
Vol. 26 NO. 4 J Chongqing Technol Business Univ. (Nat Sci Ed) Aug. 2009

文章编号: 1672 - 058X(2009) 04 - 0334 - 03

# 关于二元二次函数极值的一点思考

乐 春 红
(重庆师范大学 数学与计算机科学学院,重庆 401331)

摘 要:对二元二次函数极值的充分条件作了进一步的完善,给出了二元二次函数在 $H=AC-B^2=0$的情况下取极值的充分条件,从而对二元二次函数在此情况下能否取到极值作出了正确的判断.

关键词:二元函数;二次函数;极大值;极小值;充分条件
中图分类号: O17 文献标志码: A

二元二次函数是一类重要的函数,在线性规划、最优化理论等诸多领域有着广泛的应用,因此对二元二次函数的极值的研究是非常必要的. 在现行教材中几乎都给出了二元函数的无条件极值的判定定理,然而对 $AC-B^2=0$时函数是否取到极值都未讨论[1-3]. 此处在教材和已有文献的基础上,得出了二元二次函数的一般判别法,解决了一些二元二次函数的极值的判断问题.

## 1 预备知识

对二元函数极值的判断有如下的定理:

定理 1 设 $p_0(x_0, y_0)$为驻点,在 $p_0(x_0, y_0)$的某个邻域内 $z=f(x, y)$有二阶连续偏导数,令 $A=f_{x^2}(x_0, y_0)$, $B=f_{xy}(x_0, y_0)$, $C=f_{y^2}(x_0, y_0)$, $H=AC-B^2$,则:

(1) 当 $H>0$且 $A<0$时, $f(x, y)$在 $p_0(x_0, y_0)$取得极大值;

(2) 当 $H>0$且 $A>0$时, $f(x, y)$在 $p_0(x_0, y_0)$取得极小值;

(3) 当 $H<0$时, $f(x, y)$在 $p_0(x_0, y_0)$无极值;

(4) 当 $H=0$时,需进一步判断.

针对 $H=0$的情况,只在二元二次函数中讨论极值.

在教材中是通过判断 $\Delta f=f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)$的符号来判 $p_0(x_0, y_0)$是否为极值点. 此处也是采取这种方法对 $AC-B^2=0$的情况进行进一步地判定. 为书写方便,引入如下的记号: $A=f_{x^2}(x_0, y_0)$, $B=f_{xy}(x_0, y_0)$, $C=f_{y^2}(x_0, y_0)$, $K=A\Delta x^2+2B\Delta x\Delta y+C\Delta y^2$.

定理 2[4] 设 $p_0(x_0, y_0)$为驻点,在 $p_0(x_0, y_0)$的某个邻域内二元二次函数 $z=f(x, y)$有二阶连续偏导数,当 $H=AC-B^2=0$时:

(1) 当 $B\neq 0$,即 $A, C$同号时,

(i) 当 $A>0$时, $f(x, y)$在 $p_0(x_0, y_0)$取得极小值; (ii) 当 $A<0$时, $f(x, y)$在 $p_0(x_0, y_0)$取得极大值.

(2) 当 $B=0$时,则 $A, C$中至少有一个为零,不妨设 $C=0$,则 $K=A\Delta x^2$.

---

收稿日期: 2009 - 04 - 07;修回日期: 2009 - 05 - 10.
作者简介:乐春红 (1985 - ),女,重庆忠县人,在读本科生,从事函数研究.

(ⅰ) 当 $A>0$时, $f(x,y)$在 $p_0(x_0,y_0)$取得极小值;(ⅱ) 当 $A<0$时, $f(x,y)$在 $p_0(x_0,y_0)$取得极大值;(ⅲ) 当 $A=0$时, $K=0$,此时 $\Delta f$的符号取决于 $\alpha\Delta x^2+2\beta\Delta x\Delta y+\eta\Delta y^2$的符号.

## 2　结论证明及其例题分析

证法 1　由于 $f(x_1 y)$的二阶偏导数连续,所以 $f_{x^2}(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)=A+\alpha$, $f_{xy}(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)=B+\beta$, $f_{y^2}(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)=C+\eta$.

其中, $\lim\limits_{\Delta x\to0,\Delta y\to0,}\alpha=\lim\limits_{\Delta x\to0,\Delta y\to0,}\beta=\lim\limits_{\Delta x\to0,\Delta y\to0,}\eta=0$.

而由泰勒公式有:

$$\Delta f=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=\frac{1}{2}[f_{x^2}(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta x^2+2f_{xy}(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta x\Delta y+f_{y^2}(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta y^2]=\frac{1}{2}(A\Delta x^2+2B\Delta x\Delta y+C\Delta y^2)+\frac{1}{2}(\alpha\Delta x^2+2\beta\Delta x\Delta y+\eta\Delta y)$$

记 $K=A\Delta x^2+2B\Delta x\Delta y+C\Delta y^2$.

当 $K\neq0$时, $\Delta f$的符号取决于 $K$的符号;当 $K=0$时, $\Delta f$的符号取决于 $\alpha\Delta x^2+2\beta\Delta x\Delta y+\eta\Delta y^2$.

因为 $K=A\Delta x^2+2B\Delta x\Delta y+C\Delta y^2$,它是一个关于 $\Delta x,\Delta y$的二元函数,当把 $\Delta x$(或 $\Delta y$)视为常量时, $K=A\Delta x^2+2B\Delta x\Delta y+C\Delta y^2$是一个关于 $\Delta y$(或 $\Delta x$)的一元二次方程.由一元二次方程的韦达定理及其相关结论,有: $\Delta=(2B\Delta y)^2-4AC\Delta y^2=4(B^2-AC)\Delta y^2$.而 $H=AC-B^2=0$所以 $\Delta=0$,即 $K=A\Delta x^2+2B\Delta x\Delta y+C\Delta y^2$是一个关于 $\Delta x$的完全平方式,即 $K=A\left(\Delta x+\frac{B}{A}\Delta y\right)^2$.

所以, (1) 当 $B\neq0$,即 $A,C$同号时.

(ⅰ) 当 $A>0$时, $K>0$,即 $\Delta f>0$恒成立,此时 $p_0(x_0,y_0)$取得极小值点;(ⅱ) 当 $A<0$时, $K<0$,即 $\Delta f<0$恒成立,此时 $p_0(x_0,y_0)$取得极大值点;

(2) 当 $B=0$时,则 $A,C$中至少有一个为零,不妨设 $C=0$,则 $K=A\Delta x^2$.

(ⅰ) 当 $A>0$时, $K>0$,即 $\Delta f>0$恒成立,此时 $p_0(x_0,y_0)$取得极小值点;(ⅱ) 当 $A<0$时, $K<0$,即 $\Delta f<0$恒成立,此时 $p_0(x_0,y_0)$取得极大值点;(ⅲ) 当 $A=0$时, $K=0$.此时 $\Delta f$的符号取决于 $\alpha\Delta x^2+2\beta\Delta x\Delta y+\eta\Delta y^2$的符号.

综上所述结论得证.

证法 2　$K=A\Delta x^2+2B\Delta x\Delta y+C\Delta y^2$它仍是一个关于 $\Delta x$, $\Delta y$的二元函数,当把 $\Delta y$视为常量时, $K$是一个关于 $\Delta x$的一元函数,根据一元函数的极值问题,有: $K_{\Delta x}=2A\Delta x+2B\Delta y$, $K_{\Delta x^2}=2A$.

(1) 当 $B\neq0$时,即 $A,C$同号时.

(ⅰ) 若 $A>0$, $K$有极小值且趋于零,即 $\Delta f>0$恒成立,此时 $p_0(x_0,y_0)$取得极小值点;(ⅱ) 若 $A<0$, $K$有极大值且趋于零,即 $\Delta f<0$恒成立,此时 $p_0(x_0,y_0)$取得极大值点.

(2) 当 $B=0$时,则 $A,C$中至少有一个为零,不妨设 $C=0$,则 $K=A\Delta x^2$.

(ⅰ) 若 $A>0$, $K$有极小值且趋于零,即 $\Delta f>0$恒成立,此时 $p_0(x_0,y_0)$取得极小值点;(ⅱ) 若 $A<0$, $K$有极大值且趋于零,即 $\Delta f<0$恒成立,此时 $p_0(x_0,y_0)$取得极大值点;(ⅲ) 若 $A=0$时, $K=0$,此时 $\Delta f$的符号取决于 $\alpha\Delta x^2+2\beta\Delta x\Delta y+\eta\Delta y^2$的符号.

例 1　求 $f(x,y)=x^2-2xy+y^2+2x-2y+5$的极值.

解　$f_x=2x-2y+2$, $f_y=2y-2x-2$.令 $f_x=f_y=0$,得 $x-y+1=0$.

即　$f(x,y)$可能的极值在 $x-y+1=0$这条直线上.

又因为 $f_{x^2}=2$, $f_{xy}=-2$, $f_{y^2}=2$,即 $A=2, C=2, B=-2$,所以 $H=AC-B^2=0$.

又因为 $B=-2\neq 0, A=2>0$,故由定理知:$f(x,y)$在 $x-y+1=0$这条直线上取得极小值.


参考文献:

[1] 复旦大学数学系. 数学分析上册(2版)[M]. 北京:高等教育出版社, 1983

[2] 复旦大学数学系. 数学分析下册(2版)[M]. 北京:高等教育出版社, 1983

[3] 王建梅. 二元函数极值充分条件的评注 [J]. 工科数学, 2002, 18(6), 117-221

[4] 曹恒. 二元函数极值的充分条件的一点补充 [J]. 衡阳师范学院学报:自然科学, 2004: 25(3), 15-16


## Ponder about a dual quadratic function extreme value


**YUE Chun-hong**

(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)



**Abstract:** This article has made the further consummation in the teaching material to the dual extreme value of function's sufficient condition under the dual quadratic function extreme value's sufficient condition, has given sufficient condition of binary quadratic function's extrmum when $AC-B^2=0$, thus whether to take the extreme value for the dual quadratic function is possible under this situation to make the correct judgment.



**Key words:** dual function; quadratic function; maximum value; minimum value; sufficient condition


责任编辑:李翠薇

(上接333页)

## Study of mathematical model of man-made wetland


**CHENG Feng-lin**

(Department of Mathematics and Computer Science, Hengshui University, Hebei Hengshui 053000, China)



**Abstract:** This paper makes calculation and discussion on man-made wetland mathematical model under two conditions, under first order reaction $c_i \ll k_m$, Michaelis equation can be simplified into $r(c_i)=\frac{r_{\max}}{k_m}c_i$, uses Laplace convert to solve and analyze the model, under zero order reaction $c_i \gg k_m$, Michaelis equation can be simplified into $r(c_i)=-r_{\max}$, uses separation variable to make calculation on the model, and obtains relative concentration of pollutants of initial value and border value under different conditions, providing theoretical basis for sewage treatment of man-made wetland.



**Key words:** man-made wetland; Laplace transform; separating variables method


责任编辑:田 静