文章编号: 1672 - 058X(2009) 04 - 0316 - 03

一类新的上可嵌入图 *

盛 秀 艳
(聊城大学 数学科学学院,山东 聊城 252059)

摘 要:图 G的 CB划分是指: G的一个顶点划分 $\{V_1, V_2, \cdots, V_n\}$,使得每个 $G[V_i]$为多重完全二部图 $(1\le i\le n)$. 结合图的顶点 CB - 划分条件,确定了一类顶点的度在 modulo 4下值为 0, 1或 3的上可嵌入图类,较完整地刻画了这类图的上可嵌入情况.

关键词:图;Betti亏数;上可嵌入性;最大亏格
中图分类号: O157. 5 文献标志码: A

文中讨论的图均为有限无向连通图,其他未加说明的术语和记号均参考文献[1, 2],用 $V(G)$和 $E(G)$分别表示图的顶点集和边集. 将图称为多重完全二部图,若它有一个基础图为完全二部图,图 G的 CB - 划分是指: G的一个顶点划分 $\{V_1, V_2, \cdots, V_n\}$,使得每个 $G[V_i]$为多重完全二部图 $(1\le i\le k)$.

曲面指一个连通紧致 2维闭流形. 图 G在曲面 S上的 2胞腔嵌入意指存在 1—1连续映射 $h: G\to S$,使得 $S\setminus h(G)$的每个连通分支与开圆盘拓扑同胚. 考虑的嵌入均指胞腔嵌入,此时 $S\setminus h(G)$的每个连通分支称为 G在 S上的面,其大小指与该面关联的边数(重边计数 2次). 图 G的最大亏格记为 $\gamma_M(G)$,是指最大的整数 k,使得 G在亏格为 k的定向曲面 S上有 2胞腔嵌入. 设 $F(G)$为面集,由 Euler公式 $|V(G)| - |E(G)| + |F(G)| = 2 - 2g(S)$ (S可定向)或 $2 - g(S)$ (S不可定向),易得 $\gamma_M(G)\le[\frac{\beta(G)}{2}]$. 这里, $\beta(G) = |E(G)| - |V(G)| + 1$称为 G的圈秩数(或 Betti数), $[x]$表示不超过 x的最大整数. 将图 G称为上可嵌入的,若 $\gamma_M(G) = [\frac{\beta(G)}{2}]$. 关于图的最大亏格及上可嵌入性,可以参阅文献[2, 3].

图的最大亏格是刻画图在某个定向曲面上是否有 2胞腔嵌入的特征参数,对这一参数的研究是拓扑图论的主要问题之一,而确定一类图的上可嵌入性问题本身就是确定图的最大亏格问题. 联系图的顶点划分和度的条件,文献[3][4]给出了若干上可嵌入图类.

1 基本引理

设 G为连通图,且 T为 G的一棵生成树,记号 $\xi(G, T)$表示 $G - E(T)$中所有奇度分支的个数,称 $\xi(G) = \min_T \xi(G, T)$为 G的 Betti亏数,这里 min取遍 G的所有生成树 T. 对 G的任意生成树 T,均有 $\xi(G, T)\equiv\xi(G)\equiv\beta(G) \pmod 2$. 设 $A\subseteq E(G)$,记号 $G - A$表示从图 G中去掉边子集 A后所得到的图,记号 $c(G - A)$及 $b(G - A)$分别表示 $G - A$的所有连通分支数及 $G - A$的具有 Betti数为奇数的所有连通分支数. 设 $F_1, F_2, \cdots, F_k$

收稿日期: 2009 - 04 - 16;修回日期: 2009 - 05 - 20.
*基金项目:聊城大学校计划项目(编号 X061029).
作者简介:盛秀艳(1978—),女,山东临清人,讲师,从事图论及组合最优化研究.

$(k \geq 2)$为图 G的 k不相交的连通子图,记号 $E(F_1, F_2, \cdots, F_k)$表示 G中两个端点分别在不同连通分支 F_i和 $F_j\ (i \neq j)$中边组成的集合, $E(G, F)$表示 G中一个端点属于分支 F,另一个端点不属于 F的边组成的集合. 早期文献 [3]给出了 G是上可嵌入的充要条件及其最大亏格由 $\beta(G)$和 $\xi(G)$所表达的一个公式.

引理 1[3] 设 G为图,则 (1) $\gamma_M(G) = \frac{\beta(G) - \xi(G)}{2}$; (2) G是上可嵌入的当且仅当 $\xi(G) \leq 1$. 文献 [5]给出了非上可嵌入图的性质.

引理 2[5] 设 G为图,若 $\xi(G) > 1$,则 G的边子集 A具有下列性质:

(1) $c(G - A) \geq 2$,且对 $G - A$的任意连通分支 F,有 $\beta(F) \equiv 1 \pmod 2$;

(2) 对 $G - A$的任意连通分支 F, F是 G的点导出子图;

(3) 对 $G - A$的 k个不同连通分支 $F_1, F_2, \cdots, F_k\ (k \geq 2)$,有 $|E_G(F_1, F_2, \cdots, F_k)| \leq 2k - 3$,特别地, $k = 2$时, $|E_G(F_1, F_2)| \leq 1$;

(4) $\xi(G) = 2c(G - A) - |A| - 1$.

在引理 2的条件和结论下,有:

引理 3 (1) 对 $G - A$的任意连通分支 F,若 G是 k连通的 $(k \geq 1)$,则 $|E(G, F)| \geq k$;

(2) $|A| = \frac{1}{2}\sum_F |E(F, G)|$,这里"$\sum$"为 $G - A$的所有连通分支求和.

2 主要结果

定理 1 设 G为连通图,且对任意的 $v \in V(G)$, $d_G(v) \equiv 0 \pmod 4$,若 G的顶点集存在一个 CB - 划分 $\{V_1, V_2, \cdots, V_n\}$,使得对每个 $1 \leq i \leq n$, $|V_i| \geq 4$,且 $|V_i| \equiv 0 \pmod 2$,则图 G是上可嵌入的.

证明 假设 G不是上可嵌入的,即 $\xi(G) \geq 2$,则由引理 2,存在 $A \subseteq E(G)$,使得 $G - A$满足引理 2和引理 3. 设 $F_1, F_2, \cdots, F_p$为 $G - A$的所有连通分支, $p = c(G - A) \geq 2$. 对任意的 $1 \leq i \leq p$,下面将证明 $|E(G, F_i)| \geq 4$. 由于 G为 Euler型图,故 $|E(G, F_i)|$为偶数,因为 G为连通图,显然 $|E(G, F_i)| \neq 0$,因此只需证 $|E(G, F_i)| \neq 2$即可. 否则,设 $E(G, F_i) = \{e_1, e_2\}$,且 e_1, e_2属于 F_i中的端点,记为 x_1, x_2 (x_1, x_2可能相同),它们的另一个端点分别记为 y_1, y_2,属于 $G - A$的连通分支分别为 F_s, F_t,由引理 2性质 3知 $F_s \neq F_t$,则 F_i的顶点集是由 CB划分中的若干元素并构而成,所以 $|V(F_i)| \equiv 0 \pmod 4$. 对任意的 $v \in V(G)$,设 $d_G(v) = 4n_v$,其中 n_v为整数,进而得到 $|E(F_i)| = \frac{1}{2}(\sum_{v \in V(F_i)} 4n_v - 2) = 2\sum_{v \in V(F_i)} n_v - 1$以及 $\beta(F_i) = |E(F_i)| - |V(F_i)| + 1 = 2\sum_{v \in V(F_i)} n_v - |V(F_i)| \equiv 0 \pmod 2$,这与引理 2性质 1矛盾.

由上可知,对任意的 $1 \leq i \leq p$, $|E(G, F_i)| \geq 4$,分别由引理 3性质 1和引理 2性质 4得 $|A| \geq 2p$和 $\xi(G) \leq -1$,这与 $\xi(G) \geq 2$矛盾,因此,定理 1得证.

定理 2 设 G为连通图,且对任意的 $v \in V(G)$, $d_G(v) \equiv 1 \pmod 4$,若 G的顶点集存在一个 CB - 划分 $\{V_1, V_2, \cdots, V_n\}$,使得对每个 $1 \leq i \leq n$, $|V_i| \geq 4$,且 $|V_i| \equiv 0 \pmod 4$,则图 G是上可嵌入的.

证明 假设 G不是上可嵌入的,即 $\xi(G) \geq 2$,则由引理 2,存在 $A \subseteq E(G)$,使得 $G - A$满足引理 2和引理 3. 设 $F_1, F_2, \cdots, F_p$为 $G - A$的所有连通分支, $p = c(G - A) \geq 2$. 对任意的 $1 \leq i \leq p$,下面将证明 $|E(G, F_i)| \geq 4$,因为 G为连通图,所以 $|E(G, F_i)| \neq 0$,下面分情况讨论:

情况 1 若 $|E(G, F_i)| = 1$,设 $E(G, F_i) = \{e\}$,且 e属于 F_i中的端点,记为 x,因为 G存在 CB - 划分 $\{V_1, V_2, \cdots, V_n\}$,易知, e不属于某个 $G[V_i]\ (1 \leq i \leq n)$,因此 F_i的顶点集是由 CB - 划分中的若干元素并构而成,进而有 $|V(F_i)| \equiv 0 \pmod 4$,因此 F_i的顶点数为偶数,又因 $d_G(x)$为奇数,所以 F_i中有奇数个奇度点,矛盾.

情况 2 若 $|E(G, F_i)| = 2$,设 $E(G, F_i) = \{e_1, e_2\}$,且 e_1, e_2属于 F_i中的端点,记为 x_1, x_2 (x_1, x_2可能相同),它们的另一个端点分别记为 y_1, y_2,属于 $G - A$的连通分支分别为 F_s, F_t,由引理 2性质 3知 $F_s \neq F_t$,则 F_i的顶点集是由 CB - 划分中的若干元素并构而成,所以 $|V(F_i)| \equiv 0 \pmod 4$. 由定理 2的条件,对任意的 $v \in V(G)$,设 $d_G(v) = 4n_v + 1$,其中 n_v为整数,进而得到: $|E(F_i)| = \frac{1}{2}(\sum_{v \in V(F_i)} (4n_v + 1) - 2) = 2\sum_{v \in V(F_i)} n_v + \frac{1}{2}$

$|V(F_i)|-1$, $\beta(F_i)=|E(F_i)|-|V(F_i)|+1=2\sum_{v\in V(F_i)} n_v-\frac{1}{2}|V(F_i)|\equiv 0\pmod 2$,这与引理 2性质 1矛盾.

情况 3 若 $|E(G,F_i)|=3$,设 $E(G,F_i)=\{e_1,e_2,e_3\}$,因为 G存在 CB-划分 $\{V_1,V_2,\cdots,V_n\}$,易知 e_j不属于某个 $G[V_i]$ $(1\leq i\leq n,\ j=1,2,3)$,因此 F_i的顶点集是由 CB-划分中的若干元素并构而成,进而有 $|V(F_i)|\equiv 0\pmod 4$, $2|E(F_i)|=(\sum_{v\in V(F_i)}(4n_v+1))-3=4\sum_{v\in V(F_i)} n_v+|V(F_i)|-3\equiv 1\pmod 2$,矛盾.

综上可知,定理 2成立.

定理 3 设 G为连通图,且对任意的 $v\in V(G)$, $d_G(v)\equiv 3\pmod 4$,若 G的顶点集存在一个 CB-划分 $\{V_1,V_2,\cdots,V_n\}$,使得对每个 $1\leq i\leq n$, $|V_i|\geq 4$,且 $|V_i|\equiv 0\pmod 4$,则图 G是上可嵌入的.

其证明与定理 2类似.

3 结 论

与文献[4]类似,可用列表的形式给出每个点的度在 mod4下等值的上可嵌入图类. 设 G为连通图,对任意的 $v\in V(G)$,记 $d_G(v)\equiv k\pmod 4$,则对应表 1中列的图类是上可嵌入的.

表 1 在 mod4下等值的各个点的度的上可嵌入图类

k的值	"CB—划分"的条件	$\|V_i\|$的条件
0	有	$\|V_i\|\equiv 0\pmod 2$
1, 3	有	$\|V_i\|\equiv 0\pmod 4$
2	无	无

参考文献:

[1] BONDY J A, MURTY U S R. Graph Theory with Applications[M]. London and Elsevier, Beijing: Science Press, 1984

[2] LIU Y P. Embeddability in Graphs[M]. Beijing: Science Press, 1994

[3] NORDHAUS E, STEWART B, WHITE A. On the maxmimum genus of a graph[J]. J Combinatorial Theory B, 1971, 11: 258-267

[3] 刘端凤,黄元秋. 新的上可嵌入图类[J]. 湖南师范大学学报:自然科学版, 2002, 25(3): 1-4

[4] 盛秀艳. 与顶点 C-划分有关的上可嵌入图类[J]. 河北师范大学学报:自然科学版, 2003, 27(5): 438-440

[5] 黄元秋,刘彦佩. 关于图的最大亏格的一个定理的改进[J]. 应用数学, 1998, 11(2): 109-112

A new class of upper-embeddable graphs

SHENG Xiu-yan

(Department of Mathematical Science, Liaocheng University, Shandong Liaocheng 252059, China)

Abstract: Let G be a graph, if there exists a partition $\{V_1, V_2, \cdots, V_n\}$ of V(G) satisfying G[Vi] a multiple complete bigraph for any $i(1\leq i\leq n)$, then G has a CB-partition. Combined with the condition of CB-partition, it gives classes of upper-embeddable graphs whose value of degree of each vertex is 0, 1 or 3 respectively, under module 4. Based on the known results, it characterizes entirely the upper embeddablity of such classes of graphs

Key words: graph; Betti deficiency number; upper-embeddalility; maximum genus

责任编辑:李翠薇