

文章编号:1672-058X(2009)02-0178-05

下端固接上端弹性支承变截面压杆的屈曲

谢扬波

(重庆大学 土木工程学院,重庆 400044)

摘要:变截面压杆由于其节省材料且具有良好的受力特性,故在起重机械、桥梁结构、飞机结构中被大量使用.利用贝塞尔函数分析了一端固定一端弹性支承的截顶圆锥体变截面压杆的屈曲,得到了弹性支承在不同弹性刚度下,上下端不同刚度的临界荷载.

关键词:圆锥体变截面压杆;轴向构件;屈曲

中图分类号:TB 12

文献标识码:A

一端固定,另一端弹性支承的变截面压杆的失稳形式,为较常见的限制失稳形式,取其弹簧的刚度为 k ,得到如下平衡方程:

$$EI_0 \left(\frac{x}{a}\right)^\beta y'' + Py = R_1(x-a) \quad (1)$$

令 $B = \frac{EI_0}{a^\beta}$,代入式(1)后可得:

$$y'' + \frac{P}{B}x^{-\beta}y = \frac{R_1}{B}(x-a)x^{-\beta} \quad (2)$$

式(2)为二阶非齐次线性方程,其对应的齐次方程为:

$$y'' + \frac{P}{B}x^{-\beta}y = 0 \quad (3)$$

将式(3)化为贝塞尔方程,为此首先引进函数 $V(x)$,它与挠度 $y(x)$ 的关系为: $y(x) = x^{\frac{1}{2}}V(x)$,代入式(2)得挠曲线的微分方程为:

$$x^{\frac{1}{2}}V'' + x^{-\frac{1}{2}}V' + \left(\frac{P}{B}x^{\frac{1}{2}-\beta} - \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}\right)V = 0 \quad (4)$$

改变自变量 $x: x = \left[\left(1 - \frac{\beta}{2}\right)\sqrt{\frac{B}{P}t}\right]^{\frac{2}{2-\beta}}$,得:

$$t^2 \frac{d^2V}{dt^2} + t \frac{dV}{dt} + \left(t^2 - \frac{1}{(2-\beta)^2}\right)V = 0 \quad (5)$$

令 $\gamma = \frac{1}{2-\beta}$,式(5)变为:

$$t^2 \frac{d^2V}{dt^2} + t \frac{dV}{dt} + (t^2 - \gamma^2)V = 0 \quad (6)$$

根据贝塞尔函数的性质,对于任何的实数 γ ,式(6)的通解为: $V(t) = C_1N_\nu(t) + C_2J_\nu(t)$.而式(2)非齐次方程还需寻找一个特解,取式(2)的特解为 $y^* = \frac{R_1}{P}(x-a)$.故式(2)的通解为:

$$y(x) = x^{\frac{1}{2}} \left[C_1 N_\nu \left(\frac{2}{2-\beta} x^{1-\frac{\beta}{2}} \sqrt{\frac{P}{B}} \right) + C_2 J_\nu \left(\frac{2}{2-\beta} x^{1-\frac{\beta}{2}} \sqrt{\frac{P}{B}} \right) \right] + \frac{R_1}{P}(x-a)$$

收稿日期:2009-02-26;修回日期:2009-03-20.

作者简介:谢扬波(1980-),男,四川德阳人,硕士研究生,从事工程力学研究.

由边界条件: $x = l + a, y'(x) = 0; x = a, y(x) = 0$ 可得到:

$$C_1 N_\nu \left[\frac{2}{2-\beta} a^{1-\frac{\beta}{2}} \sqrt{\frac{P}{B}} \right] + C_2 J_\nu \left[\frac{2}{2-\beta} a^{1-\frac{\beta}{2}} \sqrt{\frac{P}{B}} \right] = 0 \quad (7)$$

利用下列关于贝塞尔函数的递推公式: $J'_\nu(t) = J_{\nu-1}(t) - \frac{\nu}{t} J_\nu(t), N'_\nu(t) = N_{\nu-1}(t) - \frac{\nu}{t} N_\nu(t)$, 可得:

$$\begin{aligned} & C_1 \left\{ N_\nu \left(\frac{2}{2-\beta} (l+a)^{1-\frac{\beta}{2}} \sqrt{\frac{P}{B}} \right) - \nu(2-\beta) \cdot N_\nu \left(\frac{2}{2-\beta} (l+a)^{1-\frac{\beta}{2}} \sqrt{\frac{P}{B}} \right) + \right. \\ & \quad \left. 2(l+a)^{1-\frac{\beta}{2}} \sqrt{\frac{P}{B}} \times N_{\nu-1} \left(\frac{2}{2-\beta} (l+a)^{1-\frac{\beta}{2}} \sqrt{\frac{P}{B}} \right) \right\} + \\ & C_2 \left\{ J_\nu \left(\frac{2}{2-\beta} (l+a)^{1-\frac{\beta}{2}} \sqrt{\frac{P}{B}} \right) - \nu(2-\beta) \cdot J_\nu \left(\frac{2}{2-\beta} (l+a)^{1-\frac{\beta}{2}} \sqrt{\frac{P}{B}} \right) + \right. \\ & \quad \left. 2(l+a)^{1-\frac{\beta}{2}} \sqrt{\frac{P}{B}} \cdot J_{\nu-1} \left(\frac{2}{2-\beta} (l+a)^{1-\frac{\beta}{2}} \sqrt{\frac{P}{B}} \right) \right\} + 2 \frac{R_1}{P} (l+a)^{\frac{1}{2}} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $R_1 = k \cdot y(x)|_{a+l}$, 可得弹簧的支反力为:

$$R_1 = k(a+l)^{\frac{1}{2}} \left\{ C_1 N_\nu \left[\frac{2}{2-\beta} (a+l)^{1-\frac{\beta}{2}} \sqrt{\frac{P}{B}} \right] + C_2 J_\nu \left[\frac{2}{2-\beta} (a+l)^{1-\frac{\beta}{2}} \sqrt{\frac{P}{B}} \right] \right\} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{lk}{P}\right)}$$

由式(7)、(8)组成的方程组,有异于零的解,其系数行列式必等于零,可以得到临界荷载的条件. 下面将研究截面为圆形的变截面失稳.

当截面为圆形时, $\beta = 4, \gamma = -\frac{1}{2}$, 将其代入式(7)、(8)整理后可得:

$$\begin{aligned} & C_1 \cdot J_{\frac{1}{2}} \left(-\sqrt{\frac{P}{Ba^2}} \right) + C_2 \cdot J_{-\frac{1}{2}} \left(-\sqrt{\frac{P}{Ba^2}} \right) = 0 \\ & C_1 \left\{ -\sqrt{\frac{P}{B(l+a)^2}} J_{\frac{3}{2}} \left(-\sqrt{\frac{P}{B(l+a)^2}} \right) + \frac{k(l+a)}{(P-lk)} J_{\frac{1}{2}} \left(-\sqrt{\frac{P}{B(l+a)^2}} \right) \right\} + \\ & C_2 \left\{ \sqrt{\frac{P}{B(l+a)^2}} \cdot J_{-\frac{3}{2}} \left(-\sqrt{\frac{P}{B(l+a)^2}} \right) + \frac{k(l+a)}{(P-lk)} J_{-\frac{1}{2}} \left(-\sqrt{\frac{P}{B(l+a)^2}} \right) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

方程组有非零解,即其系数行列式等于零,将 $J_{\frac{3}{2}}(t) = \frac{1}{x} J_{\frac{1}{2}}(t) - J_{-\frac{1}{2}}(t)$ 以及 $J_{-\frac{3}{2}}(t) = -\frac{1}{x} J_{-\frac{1}{2}}(t) - J_{\frac{1}{2}}(t)$ 代入式(9)后得:

$$\begin{aligned} & J_{-\frac{1}{2}} \left(-\sqrt{\frac{P}{Ba^2}} \right) \cdot \left\{ J_{\frac{1}{2}} \left(-\sqrt{\frac{P}{B(l+a)^2}} \right) + \sqrt{\frac{P}{B(l+a)^2}} J_{-\frac{1}{2}} \left(-\sqrt{\frac{P}{B(l+a)^2}} \right) + \frac{k(l+a)}{P-lk} J_{\frac{1}{2}} \left(-\sqrt{\frac{P}{B(l+a)^2}} \right) \right\} - \\ & J_{\frac{1}{2}} \left(-\sqrt{\frac{P}{Ba^2}} \right) \cdot \left\{ J_{-\frac{1}{2}} \left(-\sqrt{\frac{P}{B(l+a)^2}} \right) - \sqrt{\frac{P}{B(l+a)^2}} \cdot J_{\frac{1}{2}} \left(-\sqrt{\frac{P}{B(l+a)^2}} \right) + \frac{k(l+a)}{P-lk} \times \right. \\ & \quad \left. J_{-\frac{1}{2}} \left(-\sqrt{\frac{P}{B(l+a)^2}} \right) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

根据半阶贝塞尔函数的性质, $J_{-\frac{1}{2}}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}, J_{\frac{1}{2}}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$. 将其代入式(10)整理后可得:

$$\begin{aligned} & \sin \left(\sqrt{\frac{P}{Ba^2}} - \sqrt{\frac{P}{B(l+a)^2}} \right) + \sqrt{\frac{P}{B(l+a)^2}} \cos \left(\sqrt{\frac{P}{Ba^2}} - \sqrt{\frac{P}{B(l+a)^2}} \right) + \frac{k(l+a)}{(P-lk)} \times \\ & \quad \sin \left(\sqrt{\frac{P}{Ba^2}} - \sqrt{\frac{P}{B(a+l)^2}} \right) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

式(11)两边同时除以 $\cos \left(\sqrt{\frac{P}{Ba^2}} - \sqrt{\frac{P}{B(l+a)^2}} \right)$, 整理后可得:

$$\tan\left(\frac{l}{a(a+l)}\sqrt{\frac{P}{B}}\right) \cdot \left[1 + \frac{k(l+a)}{(P-lk)}\right] + \sqrt{\frac{P}{B(l+a)^2}} = 0 \quad (12)$$

对于给定的 a, l , 将 $B = EI_0 \frac{1}{a^4}$ 代入式(12), 解超越方程同样可以求得一端固定、一端弹性支承的变截面压杆临界荷载.

同上例一样, 取 $\lambda = \frac{I_{\min}}{I_{\max}} = \left(\frac{1}{l/a+1}\right)^4$, $B = EI_0 \frac{1}{a^4} = EI_0$ 代入式(10), 得:

$$\tan\left(\lambda^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{Pl^2}{EI_0}}\right) \cdot \left\{1 + \frac{lk}{(P-lk)(1-\lambda^{\frac{1}{4}})}\right\} + \frac{\lambda^{\frac{1}{2}}}{1-\lambda^{\frac{1}{4}}}\sqrt{\frac{Pl^2}{EI_0}} = 0 \quad (13)$$

对于弹簧刚度取不同的值, 式(13) 可得到不同的临界荷载. 令弹簧的刚度 $k = \psi \frac{EI_0}{l^3}$, 代入式(13) 中可得:

$$\tan\left(\lambda^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{Pl^2}{EI_0}}\right) \cdot \left[1 + \frac{\psi}{\left(\frac{Pl^2}{EI_0} - \psi\right)(1-\lambda^{\frac{1}{4}})}\right] + \frac{\lambda^{\frac{1}{2}}}{1-\lambda^{\frac{1}{4}}}\sqrt{\frac{Pl^2}{EI_0}} = 0, \text{ 令 } x = \sqrt{\frac{Pl^2}{EI_0}}, \text{ 简化为:}$$

$$\tan(\lambda^{\frac{1}{4}} \cdot x) \cdot \left(1 + \frac{\psi}{(x^2 - \psi)(1 - \lambda^{\frac{1}{4}})}\right) + \frac{\lambda^{\frac{1}{2}}}{1 - \lambda^{\frac{1}{4}}}x = 0 \quad (14)$$

将临界荷载表示成 $P_{cr} = m \frac{\pi^2 EI_0}{l^2}$, 下面将分别讨论弹簧刚度对临界荷载的影响.

当 $\psi = 0$ 时, 上例变为一端固定, 一端自由的悬臂变截面压杆, 式(14) 整理后得到如下形式:

$$\tan(\lambda^{\frac{1}{4}} \cdot x) + \frac{\lambda^{\frac{1}{2}}}{1 - \lambda^{\frac{1}{4}}}x = 0 \quad (15)$$

对于式(15), 可采用牛顿迭代或在 matlab 中图像求交点法计算, 下面采用图像法. 令函数 $y = \tan(\lambda^{\frac{1}{4}} \cdot x)$, $z = -\frac{\lambda^{\frac{1}{2}}}{1 - \lambda^{\frac{1}{4}}}x = 0$. 不同的 λ 对应不同的临界荷载, 如 $\lambda = 0.1$ 时, 所求的 x 值如下图所示:

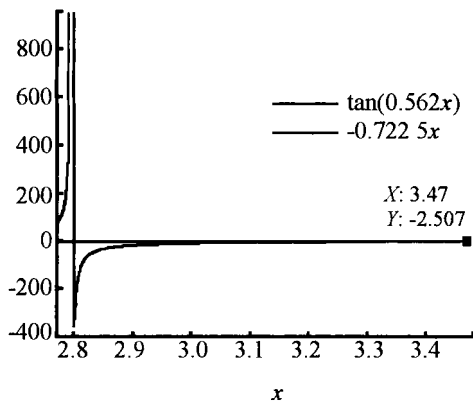


图 1 $\psi = 0, \lambda = 0.1$ 时 x 的值

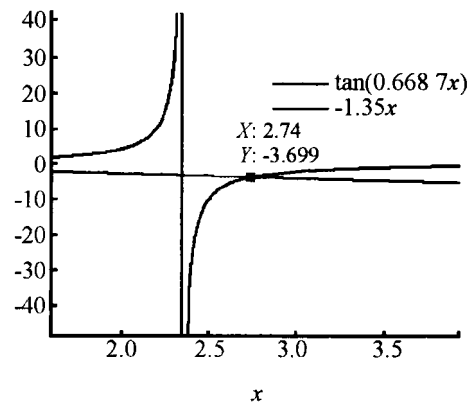


图 2 $\psi = 0, \lambda = 0.1$ 时 x 的值

从图 1 及图 2 可知, $\lambda = 0.1$ 时, x 的最小值为 3.470 2, 其系数 $m = 1.220$. 当 $\lambda = 0.2$ 时, $x = 2.743$, 系数 $m = 0.620$. 同理当 λ 为其它的值时的临界荷载见表 1.

表 1 不同的 λ 值时, 系数 m 取值

λ	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9
x	3.470	2.743	2.163	1.879	1.699	1.630
m	1.220	0.620	0.474	0.358	0.292	0.269

从表 1 中可知, 当 $\lambda \rightarrow 1$ 时, 临界荷载系数 $m \rightarrow 0.25$, 即一端固定的等截面压杆的系数.

当 $\psi \rightarrow \infty$ 时, 此时为一端固定, 一端铰支的限制失稳问题. 即方程为: $\tan(\lambda^{\frac{1}{4}} \cdot x) \cdot \left[1 - \frac{1}{(1 - \lambda^{\frac{1}{4}})} \right] + \frac{\lambda^{\frac{1}{2}}}{1 - \lambda^{\frac{1}{4}}} x = 0$. 对该超越方程同样在 matlab 中采用图像求交点法, 样不同的 λ 得到不同的系数 m , 见下表 2.

表 2 不同的 λ 值时, 系数 m 的取值

λ	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9	0.95
x	7.800	6.718	5.652	5.105	4.751	4.611	4.556
m	6.164	4.573	3.237	2.640	2.287	2.154	2.103

从表 2 可知, 当 $\lambda \rightarrow 1$ 时, 系数 $m \rightarrow 2.0408$, 即一端固定一端铰支的等截面压杆限制失稳时的系数.

当 $\psi \in (0, \infty)$ 时, 解式(14) 超越方程, 可采用牛顿迭代法、函数求交点法、摄动法等. 对于给定的一个 ψ 和 λ 值, 可以求得一个系数 m , 见表 3.

表 3 弹簧刚度系数 ψ 、最大与最小截面惯性矩 λ 对 m 的影响

λ	ψ									
	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	2.0
0.1	1.226	1.233	1.247	1.260	1.274	0.667	1.302	1.316	1.329	1.357
0.2	0.770	0.777	0.792	0.807	0.821	0.836	0.851	0.865	0.880	0.909
0.4	0.482	0.489	0.504	0.520	0.536	0.551	0.566	0.582	0.597	0.628
0.6	0.365	0.374	0.389	0.405	0.421	0.437	0.452	0.468	0.484	0.515
0.8	0.300	0.309	0.325	0.341	0.357	0.373	0.389	0.405	0.421	0.453
0.9	0.278	0.286	0.301	0.318	0.334	0.351	0.367	0.383	0.399	0.431

λ	ψ									
	4.0	6	8	10	12	14	18	24	30	50
0.1	1.494	1.629	1.762	1.894	2.024	2.151	2.401	2.760	3.097	4.050
0.2	1.054	1.196	1.336	1.473	1.607	1.739	1.992	2.346	2.664	3.437
0.4	0.779	0.927	0.159	1.212	1.348	1.479	1.726	2.048	2.307	2.781
0.6	0.670	0.821	0.967	1.107	1.243	1.371	1.604	1.887	2.087	2.387
0.8	0.610	0.762	0.908	1.049	1.181	1.305	1.522	1.764	1.913	2.053
0.9	0.588	0.741	0.887	1.027	1.158	1.280	1.488	1.712	1.845	2.015

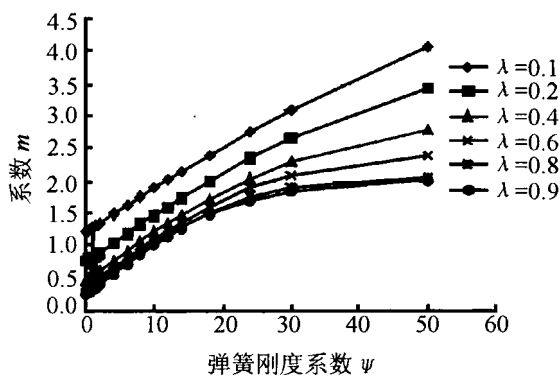


图 3 ψ, λ 的取值对系数 m 的影响

由表 3 及图 3 可知, 对于同一个 λ , 当弹簧刚度系数 ψ 增大时, 系数 m 也随之增大, 趋于一端固定, 一端铰支时的系数 m , 即趋近于表 2 中的数值; ψ 减少时, 趋近于表 1 中一端固定的变截面压杆时的系数 m .

参考文献:

[1] 刘鸿文. 高等材料力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1985
 [2] 刘光栋. 杆系结构稳定[M]. 北京: 人民交通出版社, 1988
 [3] 严镇军. 数学物理方程[M]. 北京: 中国科学出版社, 2004

Buckling of round variable section compression bars with one side fixed and another place elastic supports

XIE Yang – bo

(School of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract: Round variable section compression bars are applied generally in lifting equipment and bridge construction and aircraft configuration for favourable load – carrying capability. In this article, buckling of cross – section round bars with one side fixed and another place elastic support is analyzed with Bessel function and the accurate stability factors of critical load are obtained in the end with the different two terminal section.

Key words: round variable section compression bars; axial component; buckling

责任编辑:李翠薇

(上接第 173 页)

参考文献:

- [1] 刘国华. 关于凸函数的八个等价定义 [J]. 河北建筑科技学院学报, 2003, 20(3): 82 – 83
- [2] 郭素霞. 关于凸函数的定义的讨论 [J]. 衡水师专学报, 2000, 2(4): 49 – 52
- [3] 周翠莲. 凸函数定义的进一步研究 [J]. 山东工程学院学报, 1996, 10(3): 26 – 31
- [4] 尹传勇. 凸函数的等价命题 [J]. 中国高等教育论坛, 1988, 10(2): 21 – 24
- [5] 王飞. 凸函数等价性讨论 [J]. 广西师范学院学报, 2003, 20(1): 31 – 34
- [6] 钟伟. 凸函数的几种不同定义及作用 [J]. 九江学院学报, 2007, 11(3): 74 – 77
- [7] 向日光. 对函数凸性定义的诠释 [J]. 遵义师范学院学报, 2005, 7(4): 49 – 50
- [8] 俞文辉. 凸函数不同定义间的关系及其作用 [J]. 南昌高等学报, 2005, 60(5): 112 – 113
- [9] 刘立新. 关于凸函数的一个等价定义的注记 [J]. 保定师专学报, 1999, 12(4): 13 – 15
- [10] 曾毅. 两个凸函数定义的等价性证明 [J]. 成都教育学院学报, 2005, 19(4): 78 – 79
- [11] 林永. 实变量一元凸函数几种定义的等价关系 [J]. 宿州师专学报, 2000, 12(4): 78 – 79
- [12] 王振林. 凸函数的等价定义证明及应用 [J]. 山西煤炭管理干部学院学报, 2001, 11(3): 74 – 77
- [13] 花树忠. 凸函数的三种典型定义及其等价关系 [J]. 邯郸职业技术学院学报, 2002, 15(3): 52 – 54
- [14] 白景华. 凸函数的性质、等价定义及应用 [J]. 开封大学学报, 2003, 17(2): 59 – 64
- [15] 周科. 凸函数等价性命题证明 [J]. 广西师院学报, 2000, 17(3): 31 – 34
- [16] 裘春晗. 关于凸函数的几个不等式定义的探讨 [J]. 锦州师范学院学报, 2003, 24(4): 49 – 50
- [17] 林银河. 凸函数的等价描述与 Jensen 不等式 [J]. 丽水师范专科学校学报, 2001, 23(2): 8 – 11
- [18] 王凤鸣. 关于凹凸函数的定义 [J]. 南阳师范学院学报, 2002, 1(4): 16 – 18

Further research on equivalence among the definitions about convex functions

GU Xiao – min

(College of Mathematics and Computer Science, Chongqing Normal university, Chongqing 401331, China)

Abstract: Based on the known results, the thirteen kinds of definitions were summarized about convex function and the equivalence of them was discussed completely. Further improvement is made on convex function theory and conclusions in literature.

Key words: convex functions; continuity; differentiability; equivalence

责任编辑:李翠薇