文章编号: 1672 - 058X(2009) 01 - 0001 - 03

关于非线性特征值问题的几个重要结论 *

冷天玖[1], 马 煜[1], 王少敏[2]
(1. 云南师范大学 太阳能研究所, 昆明 650092; 2. 大理学院 数学与计算机学院, 云南 大理 671000)

摘 要:考虑特征值问题 $-\Delta_p u = \lambda V(x)|u|^{p-2}u, u \in W_0^{1,p}(\Omega)$;其中 $p > 1$, $\Delta_p u$是指的是 p - Laplacian 算子, $\lambda > 0$, Ω是 R^N 中的有界区域,证明了最小的正特征值在给定的区域的严格单调性,获得了几个重要性质.

关键词:非线性特征值;问题;下确界
中图分类号: O 175. 25 **文献标识码**: A

1 单调叙列

考虑非线性特征值问题:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda V(x)|u|^{p-2}u, & u \in \Omega \\ u = 0, & u \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

其中 $p > 1$, $\Delta_p u = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ 是 p - Laplacian, Ω是 R^N 中的有界区域, V是一个可变号的指定函数, λ是特征值参数. 常假定 $V^+ \neq 0$,且对某个 $s > \dfrac{N}{p}$时,若 $1 < p \leq N$,或当 $s = 1$时,若 $p > N$,则 $V \in L^s(\Omega)$. 通常 $V^{\pm}(x) = \max\{\pm V(x), 0\}$.

类似问题 (1) 的问题许多作者已经探讨过[1-4],对于 $V \equiv 1$,不定加权的情况,以及退化的椭圆方程也有很好的结果,此处的主要目是研究最小的正特征值的主要性质.

1.1 基本的定义

定义 1 $\lambda \in R$是问题 (1) 的一个特征值当且仅当存在 $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}$,使得:

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\phi \, dx = \lambda \int_\Omega V|u|^{p-2}u\phi \, dx, \quad \forall \phi \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{2}$$

u称为相伴于 λ的特征函数.

定义 2 C^1泛函 Φ 和 $J: W_0^{1,p}(\Omega) \to R$定义为: $\Phi(u) \triangleq \int_\Omega |\nabla u|^p dx$, $J(u) \triangleq \int_\Omega V|u|^p dx$

注:对 $\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $|J(u)| \leq \|V\|_s \|u\|_Y^p$,若 V变号, $J(u)$是不确定的. $\Phi(u)$的来源于 C^1 流形 Ljusternik - Schnirelman临界点理论的一个正的临界值已被证明[1].

$W_0^{1,p}(\Omega)$ 指的是通常的 Sobolev空间,范数 $\|u\| = (\int_\Omega |\nabla u|^p dx)^{\frac{1}{p}}$, $\langle\cdot, \cdot\rangle$表示 $W_0^{1,p}(\Omega)$和它的对偶空间 $W_0^{-1,p'}(\Omega)$ 的对偶对. 注意到若 $1 < p \leq N$,则 $Y = L^{sp'}(\Omega)$;若 $p > N$,则 $Y = C(\Omega)$,其中 $p' = \dfrac{p}{p-1}$是 p的 Hölder共轭指数, p^* 是临界指数, 即若 $p > N$,则 $p^* = \infty$, 若 $1 < p \leq N$,则 $p^* = \dfrac{Np}{N-p}$.

收稿日期: 2008 - 10 - 09;**修回日期**: 2008 - 11 - 20.
*基金项目:国家自然科学基金项目 (20762015) 资助.
作者简介:冷天玖 (1973 -),男,云南昆明人,硕士,讲师,从事非线性泛函分析研究.

使用下面的记号:

$$\lambda_1 \triangleq \inf\left\{\int_\Omega |\nabla u|^p \mathrm{d}x: u \in W_0^{1,p}(\Omega)\text{ 和 }\int_\Omega V|u|^p \mathrm{d}x = 1\right\} \tag{3}$$

$$\lambda_2' \triangleq \min\{\lambda \in R: \lambda\text{是特征值且 }\lambda > \lambda_1\} \tag{4}$$

1.2 4个基本命题

记 $M \triangleq \{u \in W_0^{1,p}(\Omega): J(u) = 1\}$,从 $V^+ \neq 0$ 可推出 $M \neq \phi$. 此集合 M 为在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 上的一个 C^1 阶流形. 下面的命题是此处引用的研究工具:

命题1[1] 设 $\gamma(A)$ 表示 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中的 Krasnoselski's亏格, $\Gamma_k \triangleq \{A \subset M: A$ 是紧的,对称的,且 $\gamma(A) \geq k, k \in N\}$,则 $\lambda_k \triangleq \inf_{A\in\Gamma_K}\max_{u\in A}\Phi(u)$ 是问题(1)的一个特征值.

命题2 设 S^k 表示 R^{k+1} 的一致球面且 $O(S^k, M) \triangleq \{h \in C(S^k, M): h$ 是奇的$\}$,则对 $\forall k \in N$, $\mu_k \triangleq \inf_{h\in O(S^{k-1},M)}\max_{z\in S^{k-1}}\Phi(h(z))$ 是问题(1)的一个特征值.

命题3[4] 若 $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ 是问题(1)的非负弱解,则对 $\forall x \in \Omega$, $u \equiv 0$ 或 $u(x) > 0$.

命题4[2] 假定 V 满足文献[5]中定理(1.2),则 $\lambda_2' = \inf_{h\in B}\max_{u\in h([-1,1])}\int_\Omega |\nabla u|^p \mathrm{d}x$,其中 $B \triangleq \{\gamma \in C([-1,1], M): \gamma(\pm 1) = \pm\phi_1\}$,且 $\phi_1 \in M$ 是相伴于特征值 λ_1 的正特征函数.

2 主要结果和证明

引理1 $\lambda \in R$ 是问题(1)的特征值当且仅当存在 $u \in W_0^{1,p}(\Omega)\setminus\{0\}$,使得 $\Phi'(u) = \lambda J'(u)$.

证明 首先令 $f(u) \in |u|$, $g(u) \in |\nabla u|$,令 f 和 g 的 G-导算子分别为 $\mathrm{d}f$ 和 $\mathrm{d}g$,则 $\forall h \in W_0^{1,p}(\Omega)$,有:

$$\langle \mathrm{d}f(u), h\rangle = \lim_{\lambda\to 0}\frac{|u+\lambda h| - |u|}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0}\frac{(u+\lambda h)^2 - u}{\lambda(|u+\lambda h| + |u|)} = \frac{uh}{|u|}$$

$$\langle \mathrm{d}g(u), h\rangle = \lim_{\lambda\to 0}\frac{|\nabla(u+\lambda h)| - |\nabla u|}{\lambda} = \lim_{\lambda\to 0}\frac{(\nabla u+\lambda\nabla h)^2 - |\nabla u|^2}{\lambda(|\nabla u+\lambda\nabla h| + |\nabla u|)} = \frac{\nabla u\nabla h}{|\nabla u|}$$

由于从上两式知 $\mathrm{d}f(u)$ 和 $\mathrm{d}g(u)$ 映 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 入 R 是有界线性的,所以 f 和 g 均 Fréchet可微. 从而 Φ 和 J 均 Fréchet可微且: $\langle\Phi'(u), h\rangle = \int_\Omega p|\nabla u|^{p-1}\frac{\nabla u\cdot\nabla h}{|\nabla u|}\mathrm{d}x = \int_\Omega p|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla h\mathrm{d}x$; $\langle\lambda J'(u), h\rangle = \lambda\langle J'(u), h\rangle = \lambda\int_\Omega p|u|^{p-1}\frac{u\cdot h}{|u|}\mathrm{d}x = \lambda\int_\Omega p|u|^{p-2}uh\mathrm{d}x$ 于是 λ 是问题(1)的一个特征值当且仅当 $\exists u \in W_0^{1,p}(\Omega)\setminus\{0\}$ 使得式(1)成立 $\Leftrightarrow \exists u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ 使得 $\Phi'(u) = \lambda J'(u)$.

定理1 $\lambda_k \leq \mu_k$.

证明 取 $\Gamma'_k \triangleq \{h(S^{k-1}): h \in O(S^{k-1}, M)\}$,证明 $\Gamma'_k \subset \Gamma_k$ 即可.

对 $\forall A \in \Gamma'_k$, $\exists h \in O(S^{k-1}, M)$,使得 $A = h(S^{k-1})$,则 $A \subset M$ 且 A 是紧的,对称的. 要证 $\gamma(A) \geq k$, 假设 $\gamma(A) = m < k$,则由 $A \neq \phi$ 知,存在 $l < k$ 和 $\phi \in C^0(A, R^l\setminus\{0\})$, $\phi(-u) = -\phi(u)$. 则 $\phi\circ h = p_l \in C^0(S^{K-1}, R^l\setminus\{0\})$ 是一个奇映射,由此得 $\gamma(S^{k-1}) \leq l < k$ 但由文献[5]中的命题5.2知 $\gamma(S^{k-1}) = k$ 故 $\gamma(A) \geq k$ 可得 $\Gamma'_k \subset \Gamma_k$,所以 $\lambda_k \leq \mu_k$.

定理2 $\lambda_1 = \mu_1 = \inf\left\{\int_\Omega |\nabla u|^p \mathrm{d}x: u \in W_0^{1,p}(\Omega)\text{ 和 }\int_\Omega V|u|^p \mathrm{d}x = 1\right\}$,即 λ_1 是最小的正特征值.

证明 首先证明 $\mu_1 = \inf\left\{\int_\Omega |\nabla u|^p \mathrm{d}x: u \in W_0^{1,p}(\Omega)\text{ and }\int_\Omega V|u|^p \mathrm{d}x = 1\right\}$. 事实上, $\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $\int_\Omega V|u|^p \mathrm{d}x = 1$, 由于 $S^0 = \{-1, 1\}$. 令 $h(1) = u$, $h(1) = -u$, 则有 $h \in O(S^0, M)$, 且 $\max_{z\in S^0}\Phi(h(z)) = \int_\Omega |\nabla u|^p \mathrm{d}x \Rightarrow \inf\left\{\int_\Omega |\nabla u|^p \mathrm{d}x: u \in W_0^{1,p}(\Omega)\text{ 且 }\int_\Omega V|u|^p \mathrm{d}x = 1\right\} \geq \mu_1$. 另一方面, $\forall h \in O(S^{k-1}, M)$, 令 $h(1) =$

$u\in M$,则 $h(-1)=-u$,且 $\max\limits_{z\in S^0}\Phi(h(z))=\int_\Omega|\nabla u|^p\,dx\Rightarrow\inf\limits_{h\in\Theta(S^0,M)}\max\limits_{z\in S^0}\Phi(h(z))\le\inf\left\{\int_\Omega|\nabla u|^p\,dx: u\in M\right\}$,即 $\mu_1\le\inf\left\{\int_\Omega|\nabla u|^p\,dx: u\in M\right\}$. 再证 $\lambda_1\ge\inf\left\{\int_\Omega|\nabla u|^p\,dx: u\in M\right\}$. 事实上, $\forall A\in\Gamma_1\Rightarrow A\subset M$, A是紧的,对称的,且 $\gamma(A)\ge 1$. 任取 $u\in A$, 有 $\Phi(u)=\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx$ 由 Γ_1 覆盖 M, 知:$\lambda_1=\inf\limits_{A\in\Gamma_1}\max\limits_{u\in A}\Phi(u)\ge\inf\limits_{u\in M}\max\{\Phi(u),\Phi(-u)\}=\inf\limits_{u\in M}\int_\Omega|\nabla u|^p\,dx$ 即 $\lambda_1=\mu_1=\inf\left\{\int_\Omega|\nabla u|^p\,dx: u\in W_0^{1,p}(\Omega)\text{ and }\int_\Omega V|u|^p\,dx=1\right\}$. 即 λ_1是最小的正特征值.

注:当 $p\ne 2$时,对于 k的其他情况,$\lambda_k=\mu_k$还是一个开放的问题;当 $p=2$时, $k\ge 1$, $\lambda_k=\mu_k$的证明是很简单的;当 $p>1$和 $N=1$, $V\equiv 1$时,在相关文献中已经证明.

引理 2　式 (3)中的 λ_1在某一点 $u\in M$达到其下确界且 λ_1是问题 (1)的最小正特征值. 此外,对某一个 $u\in M$, $\lambda_1=\Phi(u)$当且仅当 u是相伴于 λ_1的特征函数.

证明　令 $M=\{u\in W_0^{1,p}(\Omega): J(u)=1\}$,其中 $\Phi(u)=\int_\Omega|\nabla u|^p\,dx$, $J(u)=\int_\Omega V|u|^p\,dx$,显然 Φ满足文献 [5]中定理 1.2条件 (1°)和 (2°). 下证 $M\subset W_0^{1,p}(\Omega)$是弱闭的.

设 $\{u_n\}\subset M$, $u_n\xrightarrow{弱}u$,则 $\{u_n\}\subset W_0^{1,p}(\Omega)$弱有界 $\Rightarrow\{u_n\}$在 $W_0^{1,p}(\Omega)$中有界 $\Rightarrow$在 $L^p(\Omega)$中 $\{u_n\}\to u\Rightarrow u_n(x)\to u(x)$几乎处处于 $x\in\Omega$ ($\{u_n\}$的子列仍记为 $\{u_n\}$. 由 $V\in L^s(\Omega)$, $s\ge 1$,应用 Lebesgu控制收敛定理知 $1=\lim\limits_{n\to\infty}J(u_n)=J(u)\Rightarrow u\in M\Rightarrow M$弱闭. 于是由文献 [5]中定理 1.2知,$\Phi$在 M上达到其下确界,从而 $\lambda_1>0$. 另由 λ_k的定义易知当 $k_1\ge 2$时, $\lambda_k\ge\lambda_1$. 至于最后一个结论则是显然的.

定理 3　设 $u\in M$是相伴于特征值 λ_1的特征函数,则 $u(x)>0$或 $u(x)<0$.

证明　因为 $u\in M$是相伴于特征值 λ_1的特征函数,由引理 2知 u在式 (3)中达到其下确界,下证 $|u|$在 (3)中也达到其下确界. 对 $\forall u\in W_0^{1,p}(\Omega)$,有 $u=u^+-u^-$, $|u|=u^++u^-$,则:

$$\|\,|\nabla|u||\,\|_p^p-\|\,|\nabla u|\,\|_p^p=\int_\Omega|\nabla|u||^p\,dx-\int_\Omega|\nabla u|^p\,dx=$$

$$\int_\Omega(|\nabla|u||-|\nabla u|)[|\nabla|u||^{p-1}+\cdots+|\nabla u|^{p-1}]\,dx=$$

$$\int_\Omega(|\nabla u^++\nabla u^-|-|\nabla u^+-\nabla u^-|)[|\nabla u^++\nabla u^-|^{p-1}+\cdots+|\nabla u^+-\nabla u^-|^{p-1}]\,dx=$$

$$\int_\Omega(|\nabla u^++\nabla u^-|^2-|\nabla u^+-\nabla u^-|^2)\frac{[|\nabla u^++\nabla u^-|^{p-1}+\cdots+|\nabla u^+-\nabla u^-|^{p-1}]}{(|\nabla u^++\nabla u^-|+|\nabla u^+-\nabla u^-|)}\,dx=0$$

因此 $\|\,|\nabla|u||\,\|_p^p=\|\,|\nabla u|\,\|_p^p$,由 $|u|\in M$,知 $|u|$在式 (3)中也达到其下确界,由引理 2知 $|u|$是相伴于特征值 λ_1的特征函数. 由命题 3可推出 $\forall x\in\Omega$, $|u(x)|>0$,即 $u(x)>0$或 $u(x)<0$.

当 $V\in L^\infty(\Omega)$时 $\lambda_2'=\lambda_2$和当 $V\equiv 1$时 $\lambda_2'=\mu_2$分别在文献 [3]和文献 [6]中已证明. 命题 4的一个直接结果是:

定理 4　$\lambda_2'=\lambda_2=\mu_2=\inf\limits_{h\in B}\max\limits_{u\in h([-1,1])}\int_\Omega|\nabla u|^p\,dx$.

证明　$\forall h\in B\Rightarrow h\in C([-1,1],M)$且 $h(\pm 1)=\pm\phi_1$,其中 ϕ_1是关于特征值 λ_1的某正特征函数. 令 $B_h=h([-1,1])$, $A_h=B_h\cup(-B_h)$,则 $A_h\in\Gamma_2\Rightarrow\max\limits_{u\in h([-1,1])}\int_\Omega|\nabla u|^p\,dx=\max\limits_{u\in A_h}\int_\Omega|\nabla u|^p\,dx\Rightarrow\lambda_2'\ge\lambda_2$. 但 $\lambda_2'\le\lambda_2\Rightarrow\lambda_2'=\lambda_2$. 用 S_+^1和 S_-^1分别表示 R^2中单位圆周 S 的上半圆周和下半圆周. p表示 R^2到 R^1的投影,定义 $\tilde{h}: S^1\to M$如下:

$$\tilde{h}(x,y)=\begin{cases}h[p(x,y)]=h(x),\text{当 }(x,y)\in S_+^1\text{ 时}\\-h[p(-x,y)]=-h(-x),\text{当 }(x,y)\in S_-^1\text{ 时}\end{cases}$$

(下转第 7页)

参考文献:

[1] OWEN A. Empirical likelihood ratio confidence regions[J]. The Annals of Statistics, 1990, 18(1): 90 - 120

[2] OWEN A. Empirical likelihood for linear models[J]. Ann Statist, 1991, 19: 1725 - 1747

[3] 薛留根. 核实数据下非线性半参数 EV模型的经验似然推断[J]. 数学学报, 2006, 49(1): 145 - 154

[4] 薛留根,朱力行. 部分线性单指标模型中参数的经验似然置信域[J]. 中国科学, 2005, 35(8): 841 - 855

Confidence regions of the parametric in nonlinear models

FANG Lian - di, GUAN Shi - jun

(1. Tongling University, Anhui Tongling 244000; 2. Anhui Publishing Technical College, Anhui Hefei 230601, China)

Abstract: Consider the nonlinear models $Y = g(X, \beta) + \varepsilon$, in the text, we constuct the empirical log - likelihood statistic of β. It shows that the statistics has the asymptotics chi - square variable distribution. The result can be used to construct the confidence regions of β.

Keywords: empirical likelihood; chi - square variable distribution; nonlinear model

责任编辑:李翠薇

(上接第 3页)

则 $\tilde{h} \in \mathrm{O}(S^1, M)$ 且 $\max_{z \in S^1} \Phi(\tilde{h}(z)) = \max_{z \in [-1,1]} \Phi(h(z)) = \max_{u \in h[-1,1]} \int_\Omega |\nabla u|^p dx \Rightarrow \lambda_2' \geq \mu_2 \Rightarrow \lambda_2' = \mu_2$.

上述结果在临界点理论和微分方程理论中有十分重要的作用.

参考文献:

[1] SZULKIN A. Ljusternik - Schnirelmann theory on C^1 - manifolds[M]. Annales inst H Poincare Analyse non - lineaire, 1988

[2] ARIAS M, CAMPOS J, CUESTA M, et al. Assymetric Eigenvalue Problems with Weights[J]. CRAST, 2001, 332(I): 1 - 4

[3] ANANE A, TSOURLI N. On the Second Eigenvalue of the P - lapacian[J]. in Nonlinear PDE, Ed A Benkirane and J - PGossez, Pitman Research Notes in Mathematics, 1996, 343: 1 - 9

[4] MABEL, CUESTA. Eigenvalue Problems for the P - laplacian with Indefinite Weights[J]. Journal of Differential Equations, 2001, 33: 1 - 9

[5] STRUWE M. Variational methods applications to nonlinear PDE and Hamiltonial Systems [M]. Springer - Verlag, 1980

[6] DRABEK P, ROBINSON S. Resonance problems for the p - laplacian[J]. J. Funct Anal, 1999, 169: 189 - 200

A research on the nonlinear eigenvalue problem

LENG Tian jiu[1], MA Yu[1], WANG Shao - min[2]

(1. The Solar Energy Research Institute, Yunnan Normal University, Kunming 650092;

2. Department of Mathematics and Computer, Dali University, Dali 671000, China)

Abstract: Consider the eigenvalue problem $-\Delta_p u = \lambda V(x) |u|^{p-2} u$, $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ where $p > 1$, $\Delta_p u$ is p - Laplacian operator, $\lambda > 0$, Ω is a bounded domain in R^N. We prove the strict monotonicity of the least positive eigenvalue with respect to the domin, and obtain some important properties.

Keywords: nonlinear eigenvalue; problem; infimum.

责任编辑:李翠薇