基于逻辑选择脉冲时滞动力系统的稳定性分析

谢巧玲[a],刘志鑫[b],杨志春[a]
重庆师范大学 a. 数学科学学院; b. 计算机与信息科学学院,重庆 401331

摘 要:为了使动力系统在稳定性分析上更具有一般化,能更加精确实际地刻画自然现象;针对具有逻辑选择脉冲效应的时滞动力系统,提出此系统的全局指数稳定性分析问题,可在一定程度上推广一般脉冲时滞动力系统的稳定性分析;通过引入具有逻辑选择脉冲效应的时滞非线性动力系统,并利用半张量积将该动力系统中的逻辑函数转换为代数状态空间表示,再建立脉冲型 Halanay 微分不等式来估计该动力系统中线性系统部分的 Cauchy 矩阵;基于此,对向量和函数给出了 4 个假设条件,得到在逻辑选择脉冲控制下的非线性时滞系统的零解全局指数稳定性判定依据,且证明了此动力系统的指数收敛率为 $\lambda-\eta$。

关键词:全局稳定性;逻辑选择;半张量积; Halanay 微分不等式

中图分类号:O175 **文献标识码:**A doi:10. 16055/j. issn. 1672-058X. 2023. 0004. 009

Stability Analysis of Time-delayed Dynamic Systems with Impulsive Effects due to Logical Selection

XIE Qiaoling[a], LIU Zhixin[b], YANG Zhichun[a]
a. School of Mathematical Sciences; b. School of Computer and Information Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China

Abstract: In order to make the stability analysis of dynamic systems more general and to portray natural phenomena more accurately and practically, the stability analysis of the global exponential was proposed for a time-delay dynamic system with a logical selection impulse effect. The stability analysis of general impulse time-delayed dynamic systems can be extended to a certain extent. By introducing a time-delayed nonlinear dynamic system with logically selected impulsive effects, the logistic functions in this dynamic system were converted into an algebraic state space representation using the half-tensor product. An impulsive Halanay differential inequality was then developed to estimate the Cauchy matrix of the linear part of the dynamic system. Based on this, four assumptions were given for the vectors and functions, and a basis for determining the global exponential stability of the zero solution of a nonlinear time-delayed system under the control of a logically selected pulse was obtained. The exponential convergence rate of this dynamic system was proved to be $\lambda-\eta$.

Keywords: global stability; logical selection; half-tensor product; Halanay differential inequality

收稿日期:2022-06-27 **修回日期:**2022-10-10 **文章编号:**1672-058X(2023)04-0063-06

基金项目:国家自然科学基金项目资助(11971081);重庆市教育委员会科技研究重大项目(KJZD-M202000502);重庆市研究生科研创新项目(CYS20242).

作者简介:谢巧玲(1996—),女,重庆合川人,硕士研究生,从事微分方程与动力系统研究.

通讯作者:杨志春(1971—),男,重庆江津人,教授,博士生导师,从事微分方程与动力系统研究. Email: yangzhch@ 126. com.

引用格式:谢巧玲,刘志鑫,杨志春. 基于逻辑选择脉冲时滞动力系统的稳定性分析[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版),2023,40(4):63—68.

XIE Qiaoling, LIU Zhixin, YANG Zhichun. Stability analysis of time-delayed dynamic systems with impulsive effects due to logical selection[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition), 2023, 40(4): 63—68.

1 引 言

脉冲时滞动力系统广泛存在于各种动力学模型中,如人口动态、药物管理、金融系统及自动化等领域[1-4]。近 20a 来,许多学者研究了脉冲动力系统的稳定性、渐近稳定性和指数稳定性[5-10],其中,You 等在文献[5]中得到了线性脉冲时滞微分方程解的表示形式,从而得到了平凡解局部渐近稳定的一些充分条件。对于非线性脉冲动力系统,文献[11,12]利用类 Lyapunov 方法研究了脉冲镇定(一致)稳定性的判定。然而对于给定的一个实际动力系统,构造 Lyapunov 函数或泛函非常巧妙且困难,研究非线性系统动力学行为的另一个重要工具是微分不等式,特别是 Halanay 微分不等式,它已成功应用于时滞系统、奇异系统、反应扩散系统等。

自然界中存在着各种类型的逻辑现象,例如:细胞中含有许多起着开关作用的“调节”基因,可以相互开启和关闭,这表明遗传网络是以逻辑方式运作的。逻辑效应广泛存在于一些系统中,如著名的布尔网络,科学家使用布尔网络来构建网络元素之间的逻辑关系。对于一些真实的脉冲系统,可以将变量分量的绝对值与脉冲时刻的某些阈值进行比较,根据上述比较结果之间的一些逻辑关系,从不同的函数中选择脉冲效应。然而,由于在过去几十年中几乎没有可用的技术来处理逻辑,因此对包括逻辑在内的系统的研究成果很少,直到 Cheng 和 Qi 在文献[12,13]中提出了一种强大的方法:半张量积,它可以将逻辑函数转换为代数状态空间表示,从而在布尔网络和博弈论等许多领域取得了巨大的进展。

在某些实际情况下,脉冲控制可以使系统模型更真实或具有更好的特性,例如文献[14-19]提出了逻辑脉冲,即受逻辑选择影响的脉冲控制。由于逻辑效应的输入,逻辑脉冲控制可能比一般脉冲控制具有更好的效果。到目前为止,逻辑脉冲控制系统已经取得了一些成果。例如,Sou 等在文献[14]中研究了逻辑选择下脉冲微分系统的渐近稳定性判据; He 等在文献[19]中给出了逻辑选择下离散随机时滞系统最终有界性的判据。但文献[14—19]均是对线性系统的稳定性进行分析,因此本文将逻辑效应应用于非线性动力系统中。

本文利用半张量积及脉冲微分不等式讨论了具有逻辑选择脉冲效应的时滞动力系统脉冲稳定性问题。首先,建立一个脉冲型 Halanay 微分不等式,通过估计脉冲线性系统的 Cauchy 矩阵,利用常数变易法,结合微分不等式,得到逻辑选择脉冲控制下非线性时滞系统零解的全局指数稳定性。

2 预备知识

$\boldsymbol{R}^n$ 表示 n 维空间实数列向量集合;$\boldsymbol{R}^{n\times m}$ 表 $n\times m$ 阶实矩阵集合;$\mathbf{N}$ 是自然数集;$\lambda_{\max}(\boldsymbol{A})$ ($\lambda_{\min}(\boldsymbol{A})$) 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大(最小)特征值;用等价向量确定逻辑值:$\boldsymbol{F}=1\sim\delta_2^1=[1,0]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{F}=0\sim\delta_2^2=[1,0]^{\mathrm{T}}$;$\boldsymbol{\delta}_k^i$ 表示单位矩阵 $\boldsymbol{I}_k$ 的第 i 列向量;设 $\Delta_k=\{\boldsymbol{\delta}_k^i \mid i=1,2,\cdots,k\}$;$\otimes$表示矩阵的 Kronecker 积;$\mathbf{diag}\{\cdots\}$ 表示对角矩阵;$\boldsymbol{Row}_i(\boldsymbol{B})$ ($\boldsymbol{Col}_i(\boldsymbol{B})$)表示矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 i 行向量(矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 i 列向量),$\boldsymbol{Col}(\boldsymbol{B})$ 表示矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量集;设 $\tau\geqslant 0$,$t_0<t_1<\cdots<t_k<t_{k+1}<\cdots$ ($k\in\mathbf{N}$) 表示脉冲点且 $\lim\limits_{k\to\infty} t_k=\infty$,对 $\boldsymbol{\varphi}=(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)^{\mathrm{T}}:\mathbf{R}\to\boldsymbol{R}^n$,有

$$[\varphi_i(t)]_\tau=\sup_{-\tau\leqslant s\leqslant 0}\varphi_i(t+s)$$

$$\varphi(t^+)=\lim_{s\to 0^+}\varphi(t+s),\varphi(t^-)=\lim_{s\to 0^-}\varphi(t+s)$$

$C[X,Y]$ 表示从拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的连续映射空间;$PC:=\{\boldsymbol{\varphi}:[-\tau,0]\to\boldsymbol{R}^n \mid \varphi(t^+)=\varphi(t),t\in(-\tau,0],\ \varphi(t^-)$存在且 $\varphi(t^-)=\varphi(t)\}$,对任意的 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{R}^n$,$\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$,$\boldsymbol{\varphi}\in PC$,其范数为 $\|\boldsymbol{x}\|=(\sum\limits_{j=1}^n x_j^2)^{1/2}$,$\|\boldsymbol{A}\|=(\rho(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}))^{1/2}$,$\|\boldsymbol{\varphi}\|_\tau=\sup\limits_{-\tau\leqslant s\leqslant 0}\|\varphi(s)\|$。

定义 1[13] 如果 $\boldsymbol{Col}(\boldsymbol{L})\subset\Delta_m$,则称 $\boldsymbol{L}\in\boldsymbol{R}^{m\times n}$ 是逻辑矩阵,$\mathcal{L}_{m\times n}$ 表示 $m\times n$ 阶逻辑矩阵集。

定义 2[13] 对于矩阵 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{R}^{m\times n}$,$\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{R}^{p\times q}$,$\alpha=lcm(n,p)$,$\boldsymbol{A}\ltimes\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{I}_{\alpha/n})(\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{I}_{\alpha/p})$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的半张量积,其中 $\alpha=lcm(n,p)$表示 n,p 的最小公倍数。

显然,半张量积不再对两个相乘矩阵有维数约束,因此它推广了传统的矩阵乘积。

定义 3[18] 如果存在正数 λ、K,使得对任意初始函数 $\varphi(t)$,有 $\|x(t)\|\leqslant K\|\boldsymbol{\varphi}\|_\tau \mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)}$,$t\geqslant t_0$,则称系统式(2)的零解指数稳定,其中,$\|\boldsymbol{\varphi}\|_\tau=\sup\limits_{-\tau\leqslant s\leqslant 0}\|\varphi(s)\|$。

定义 4[18] 如果连续函数 $\boldsymbol{x}(t):[t_0-\tau,+\infty)\to\boldsymbol{R}^n$ 在 $t\neq t_k$,$t\geqslant t_0$,$\boldsymbol{x}(t_k)=\boldsymbol{x}(t_k^+)$ $\boldsymbol{x}(t_k^-)$存在,且在初始条件 $\boldsymbol{x}(t_0+s)=\varphi(s)\in PC$,$s\in[-\tau,0]$下满足式(2),则称 $\boldsymbol{x}(t)$是式(2)的解。

引理 1[1] 如果 $\boldsymbol{U}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$ 是正定矩阵,$\boldsymbol{Q}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$ 是对称矩阵,则

$$\lambda_{\min}(U^{-1}Q)x^{\mathrm{T}}Ux\leqslant x^{\mathrm{T}}Qx\leqslant\lambda_{\max}(U^{-1}Q)x^{\mathrm{T}}Ux$$

引理 2[14]　如果逻辑函数 $f(p_1,p_2,\cdots,p_r)\in\Delta_2$,其中 $p_1,p_2,\cdots,p_r\in\Delta_2$ 是逻辑变量,则存在且唯一存在一个 2×2^r 阶矩阵 $M_f\in\mathcal{L}_{2\times2^r}$,使得

$$f(p_1,p_2,\cdots,p_r)=M_f\ltimes p_1\ltimes p_2\ltimes\cdots\ltimes p_r=M_f\ltimes_{i=1}^{r}p_i$$

则称 M_f 为 f 的结构矩阵。因此,$Col(M_f)\subset\Delta_2$,$\ltimes_{i=1}^{r}p_i\in\Delta_{2^r}$。

本文考虑脉冲时滞系统:

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+f(t,x(t),x(t-\tau(t))),t\neq t_k\\ \Delta x(t_k)=B_kx(t_k^-)+\widetilde{\Phi}_k(x(t_k^-)),t=t_k,k\in\mathbf{N}\end{cases}$$

其中,

$A=(a_{ij})\in R^{n\times n},B_k\in R^{n\times n}$

$x(t)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in R^n,f(t,0,0)\equiv0$

$f=(f_1,f_2,\cdots,f_n)^{\mathrm{T}}\in C[[t_{k-1},t_k)\times R^n\times R^n,R^n]$

$\Delta x(t)=(\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n)^{\mathrm{T}}\in R^n$

对于 $i=1,2,\cdots,n$,有

$$\widetilde{\Phi}_k^i(x(t_k^-))=g_i(t_k^-)I_k^i(x(t_k^-))+\overline{g_i(t_k^-)}J_k^i(x(t_k^-))$$

对于连续函数 $I_k(\cdot)$ 和 $J_k(\cdot)$,满足 $I_k(0)=J_k(0)\equiv0$;$g_i,\bar{g}_i:\{\delta_2^1,\delta_2^2\}^n\rightarrow\{0,1\}$ 是逻辑函数,$\bar{g}_i$ 是 g_i 的反逻辑函数,定义如下:

$$g_i(t)\triangleq g_i(p_1(x(t)),\cdots,p_n(x(t)))$$

$$\overline{g_i(t)}\triangleq\overline{g_i(p_1(x(t)),\cdots,p_n(x(t)))}$$

函数 $p_i:R^n\rightarrow\{0,1\}$ 是一个分段函数:

$$p_i(u)=\begin{cases}\delta_2^2\sim0,\ \|w_i(u)\|\geqslant c_i\\ \delta_2^1\sim1,\ \|w_i(u)\|<c_i\end{cases}$$

其中,$w_i\in C(R^n,R^n)$,$c_i>0$ 是一个阈值。在 $t=t_k$ 时刻,从函数 $I_k,J_k\in C(R^n,R^n)$ 中选择脉冲效应。

因此,受逻辑选择影响的脉冲控制系统可化为

$$\begin{cases}\dot{x}_i(t)=(Ax(t))_i+f_i(t,x(t),x(t-\tau(t))),t\neq t_k\\ \Delta x_i(t_k)=(B_kx(t_k^-))_i+g_i(t_k^-)I_k^i(x(t_k^-))+\\ \quad\overline{g_i(t_k^-)}J_k^i(x(t_k^-)),t=t_k,k\in\mathbf{N}\end{cases}$$

其中,$(Ax(t))_i$ 表示向量 $Ax(t)$ 的第 i 个元素。

在本文中,对于任何初始条件,假设式(2)至少有一个解 $x(t,t_0,\varphi)$。根据引理 2,对于逻辑函数 g_i 和 $\bar{g}_i$,存在且唯一存在一个结构矩阵 $M_i\in2\times2^n$,使得

$$g_i(p_1(x(t)),\cdots,p_n(x(t)))=Row_1(M_i)\ltimes_{i=1}^{n}p_i(x(t_k))$$

$$\overline{g_i(p_1(x(t)),\cdots,p_n(x(t)))}=Row_2(M_i)\ltimes_{i=1}^{n}p_i(x(t_k))$$

令 $p(x(t_k))\triangleq\ltimes_{i=1}^{n}p_i(x(t_k))$,根据 $p_i(u)$ 和半张量积的定义,知道 $p_i(x(t_k))\in\Delta_2;i=1,2,\cdots,n;p(x(t_k))\in\Delta_{2^n}$。

令 $\varphi_k^i(x(t_k^-))=[I_k^i(x(t_k^-))\quad J_k^i(x(t_k^-))]$,可得到

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi}_k^i(x(t_k^-))&=Row_1(M_i)p(x(t_k^-))I_k^i(x(t_k^-))+\\&Row_2(M_i)p(x(t_k^-))J_k^i(x(t_k^-))=\\&[I_k^i(x(t_k^-))J_k^i(x(t_k^-))]M_ip(x(t_k^-))=\\&\varphi_k^i(x(t_k^-))M_ip(x(t_k^-))\end{aligned}$$

相应地,将受逻辑选择的脉冲控制微分时滞系统(2)转化为

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+f(t,x(t),x(t-\tau(t))),t\neq t_k\\ \Delta x(t_k)=B_kx(t_k^-)+\Phi_k(t_k^-)Mp(x(t_k^-))\\ \quad t=t_k,k\in\mathbf{N}\end{cases}$$

其中,$M=[M_1^{\mathrm{T}},M_2^{\mathrm{T}},\cdots,M_n^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$,$\Phi_k(t_k^-)=\mathbf{diag}\{\varphi_k^i(x(t_k^-)),\varphi_k^i(x(t_k^-)),\cdots,\varphi_k^i(x(t_k^-))\}$。

3　主要结论

在本节中,将给出一个脉冲型 Halanay 微分不等式,并获得脉冲线性系统 Cauchy 矩阵的指数估计。

定理 1　假设 $\alpha>\beta\geqslant0$,$u(t)$ 满足标量脉冲微分不等式:

$$\begin{cases}D^+u(t)\leqslant-\alpha u(t)+\beta[u(t)]_\tau,t\neq t_k,t\geqslant t_0\\ u(t_k^+)\leqslant b_ku(t_k^-)+c_k[u(t_k^-)]_\tau,t=t_k,k\in\mathbf{N}\\ u(t_0+s)=\varphi(s)\in PC,s\in[-\tau,0]\end{cases}$$

其中,连续函数 $u(t)$ 在 $t\neq t_k,t\geqslant t_0$ 时,有 $u(t_k)=u(t_k^+)$,$u(t_k^-)$ 存在,则

$$u(t)\leqslant(\prod_{t_0<t_k\leqslant t}\delta_k)\|\varphi\|_\tau e^{-\lambda(t-t_0)},t\geqslant t_0$$

其中,$\delta_k=\max\{1,|b_k|+|c_k|e^{\lambda\tau}\}$,$k\in\mathbf{N}$,$\|\varphi\|_\tau=\sup_{s\in[-\tau,0]}|\varphi(s)|$,$\lambda>0$ 是方程

$$\lambda-\alpha+\beta e^{\lambda\tau}=0\tag{5}$$

的解。

证　明　因为 $\alpha>\beta\geqslant0$,$\lambda>0$ 是式(5)的唯一解,显然,

$$u(t)\leqslant\|\varphi\|_\tau e^{-\lambda(t-t_0)},t\in[t_0-\tau,t_0]\tag{6}$$

故有

$$u(t)\leqslant\|\varphi\|_\tau e^{-\lambda(t-t_0)},t\in[t_0,t_1)\tag{7}$$

考虑两种情况:当 $\beta=0$ 时,由式(4)和式(6)知,$u(t_k)$ 满足

$$D^+u(t)\leqslant -\alpha u(t),u(t_0)\leqslant \|\boldsymbol{\varphi}\|_\tau,t\in[t_0,t_1)$$

因为 $\alpha=\lambda$,所以

$$u(t)\leqslant \|\boldsymbol{\varphi}\|_\tau \mathrm{e}^{-\alpha(t-t_0)}=\|\boldsymbol{\varphi}\|_\tau \mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)},t\in[t_0,t_1)$$

当 $\beta>0$ 时,对任意 $z>\|\boldsymbol{\varphi}\|_\tau\geqslant 0$,有

$$u(t)\leqslant z\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)}\triangleq y(t),t\in[t_0,t_1) \tag{8}$$

若式(8)不成立,由式(6)知,一定存在一个常数 $t'\in[t_0,t_1)$ 和足够小的正常数 δ,使得 $\delta<\tau$,以及当 $t\leqslant t'$ 时,有

$$u(t'+\delta)>y(t'+\delta),u(t)\leqslant y(t)$$

因此,存在一个足够小的正常数 ϵ,使得当 $t\leqslant t'$ 时,

$$u(t'+\delta)>(1+\epsilon)y(t'+\delta),u(t)<(1+\epsilon)y(t) \tag{9}$$

因为函数 $u(t)$ 和 $(1+\epsilon)y(t)$ 在 $t\in[t_0,t_1)$ 上连续,所以存在 $t^*\in(t',t'+\delta)$,使得

$$u(t^*)=(1+\epsilon)y(t^*),D^+u(t^*)\geqslant(1+\epsilon)y'(t^*) \tag{10}$$

$$u(t)\leqslant(1+\epsilon)y(t),t\leqslant t^* \tag{11}$$

由式(9)、式(11)及 $-\tau<t'-t^*<0$,当 $s\in[-\tau,t'-t^*]$ 时,$u(t^*+s)<(1+\epsilon)y(t^*+s)\leqslant(1+\epsilon)z\mathrm{e}^{-\lambda(t^*-\tau-t_0)}$;当 $s\in[t'-t^*,0]$ 时,$u(t^*+s)\leqslant(1+\epsilon)y(t^*+s)<(1+\epsilon)z\mathrm{e}^{-\lambda(t^*-\tau-t_0)}$,即有

$$[u(t^*)]_\tau<(1+\epsilon)z\mathrm{e}^{-\lambda(t^*-\tau-t_0)}=\mathrm{e}^{\lambda\tau}(1+)y(t^*) \tag{12}$$

由式(4)、式(10)、式(12)及 $\beta>0$,可以得到

$$D^+u(t^*)\leqslant-\alpha u(t^*)+\beta[{}_u<-\alpha(1+\epsilon)y(t^*)+\beta\mathrm{e}^{\lambda\tau}(1+)y(t^*)=[-\alpha+\beta\mathrm{e}^{\lambda\tau}](1+\epsilon)z\mathrm{e}^{-\lambda(t^*-t_0)}$$

由式(5)有

$$D^+u(t^*)<-\lambda(1+\epsilon)z\mathrm{e}^{-\lambda(t^*-t_0)}=(1+\epsilon)y'(t^*)$$

与式(10)矛盾,因此式(8)对任意 $z>\|\boldsymbol{\varphi}\|_\tau$ 成立,令 $z\to\|\boldsymbol{\varphi}\|_\tau$,就可以得到式(8)。

由式(4)、式(6)、式(7),可以得到

$$u(t_1)\leqslant b_1u(t_1^-)+c_1[u(t_1^-)]_t\leqslant |b_1|\,\|\boldsymbol{\varphi}\|_\tau \mathrm{e}^{-\lambda(t_1-t_0)}+|c_1|\mathrm{e}^{\lambda\tau}\|\boldsymbol{\varphi}\|_\tau \mathrm{e}^{-\lambda(t_1-t_0)}\leqslant \delta_1\|\boldsymbol{\varphi}\|_\tau \mathrm{e}^{-\lambda(t_1-t_0)}$$

因为 $\delta_1\geqslant 1$,有

$$u(t)\leqslant\delta_1\|\boldsymbol{\varphi}\|_\tau \mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)},t\in[t_1-\tau,t_1] \tag{13}$$

同理,由式(13)可得

$$u(t)\leqslant\delta_1\|\boldsymbol{\varphi}\|_\tau \mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)},t\in[t_1,t_2)$$

通过简单的推导,可以得到,对任意 $k\in\mathbf{N}$,有

$$u(t)\leqslant\delta_1\cdots\delta_{k-1}\|\boldsymbol{\varphi}\|_\tau \mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)},t\in[t_{k-1},t_k)$$

注 1 定理 1 推广了著名 Halanay 微分不等式[4],并在脉冲时滞动力系统的定性分析中发挥了重要作用。

定理 2 设 $\boldsymbol{W}(t,t_0)$ 是线性系统式(14)的 Cauchy 矩阵,有

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t),t\neq t_k\\ \Delta\boldsymbol{x}(t_k)=\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{x}(t_k^-),k\in\mathbf{N}\end{cases} \tag{14}$$

若存在 $b,\varrho,\rho>0$,使得 $\|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}_k\|\leqslant b,\varrho\leqslant t_k-t_{k-1}\leqslant\rho$,则 $\|\boldsymbol{W}(t,t_0)\|\leqslant c\mathrm{e}^{-h(t-t_0)}$,其中

$$a=\frac{\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})}{2}$$

$$c=\begin{cases}1, & b>1\\ 1/b, & 0<b\leqslant 1\end{cases}$$

$$h=\begin{cases}-a-\dfrac{\ln b}{\varrho}, & b>1\\ -a-\dfrac{\ln b}{\rho}, & 0<b\leqslant 1\end{cases}$$

证 明 对任意 $\boldsymbol{x}_0\in\boldsymbol{R}^n$,设 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}(t,t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 是通过初始值 $(t_0,\boldsymbol{x}_0)$ 的解,令 $V(t)=\|\boldsymbol{x}(t)\|^2=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{x}(t)$,有

$$D^+V(t)\leqslant\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}(t)\leqslant 2aV(t),t\neq t_k$$

$$V(t_k)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t_k^-)(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}_k)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}_k)\boldsymbol{x}(t_k^-)=\|(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}_k)\boldsymbol{x}(t_k^-)\|^2\leqslant\|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}_k\|^2V(t_k^-)$$

通过推导可以得到

$$V(t)\leqslant\prod_{t_0<t_m\leqslant t}\|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}_k\|^2\mathrm{e}^{2a(t-t_0)}V(t_0),t\geqslant t_0$$

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant\prod_{t_0<t_m\leqslant t}\|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}_k\|\mathrm{e}^{a(t-t_0)}\|\boldsymbol{x}_0\|\leqslant\prod_{t_0<t_m\leqslant t}b\mathrm{e}^{a(t-t_0)}\|\boldsymbol{x}_0\|,t\geqslant t_0$$

当 $0<b\leqslant 1$ 时,

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant b^{\frac{t-t_0}{\rho}-1}\mathrm{e}^{a(t-t_0)}\|\boldsymbol{x}_0\|\leqslant\frac{1}{b}\mathrm{e}^{\left(\frac{\ln b}{\rho}+a\right)(t-t_0)}\|\boldsymbol{x}_0\|$$

当 $b>1$ 时,

$$\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant b^{\frac{t-t_0}{\varrho}}\mathrm{e}^{a(t-t_0)}\|\boldsymbol{x}_0\|\leqslant\mathrm{e}^{\left(\frac{\ln b}{\rho}+a\right)(t-t_0)}\|\boldsymbol{x}_0\|$$

因为 $\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{W}(t,t_0)\boldsymbol{x}_0$,所以

$$\|\boldsymbol{W}(t,t_0)\|=\sup_{x_0\neq 0}\frac{\|\boldsymbol{W}(t,t_0)\boldsymbol{x}_0\|}{\|\boldsymbol{x}_0\|}\leqslant c\mathrm{e}^{-h(t-t_0)}$$

接下来,利用上述结果分析脉冲时滞系统的全局指数稳定性。给出以下 4 个假设:

($\mathbf{H}_1$) 对任意 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{R}^n,t\in\mathbf{R}$,存在 $l,q\geqslant 0$,使得

$$\|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|\leqslant l\|\boldsymbol{x}\|+q\|\boldsymbol{y}\|$$

($\mathbf{H}_2$)　对任意 $z\in\boldsymbol{R}^n$,存在 $r_{1k},r_{2k}>0$,使得

$|I_k^i(z)|\leqslant r_{1k}\|z\|$, $|J_k^i(z)|\leqslant r_{2k}\|z\|$, $k\in\mathbf{N}$

($\mathbf{H}_3$)　存在常数 $c\geqslant1,h\geqslant0$,使得

$$\|\boldsymbol{W}(t,t_0)\|\leqslant c\mathrm{e}^{-h(t-t_0)},t\geqslant t_0$$

其中,$\boldsymbol{W}(t,t_0)$是脉冲线性系统式(14)的 Cauchy 矩阵。

($\mathbf{H}_4$)　设$-h+cl+cq<0$,有

$$\eta=\sup_{k\in N}\left\{\frac{\ln(1+\sqrt{n}c(r_{1k}^2+r_{2k}^2)^{\frac12})}{t_k-t_{k-1}}\right\}<\lambda$$

其中,λ 是方程

$$-h+cl+cq\mathrm{e}^{\lambda\tau}+\lambda=0 \tag{15}$$

的一个正解。

定理 3　假设(H_1)—(H_4)都成立,则式(2)的零解是全局稳定的且指数收敛率为 $\lambda-\eta$。

证　明　由于$-h+cl+cq<0$,式(15)只有一个解 $\lambda>0$。对任意的 $\boldsymbol{\varphi}\in PC$,设 $\boldsymbol{x}(t)$是式(2)且初始条件为$(t_0,\boldsymbol{\varphi})$的解。令

$$\boldsymbol{L}_i=\begin{pmatrix}(I_k^i(\boldsymbol{x}(t_k^-)))^2 & I_k^i(\boldsymbol{x}(t_k^-))J_k^i(\boldsymbol{x}(t_k^-))\\ I_k^i(\boldsymbol{x}(t_k^-))J_k^i(\boldsymbol{x}(t_k^-)) & (J_k^i(\boldsymbol{x}(t_k^-)))^2\end{pmatrix}$$

不失一般性,设 $t_0<t_1$,很容易验证,以下参数变化公式是成立的,当 $t\geqslant t_0$ 时,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t)=&\boldsymbol{W}(t,t_0)\boldsymbol{x}(t_0)+\\&\int_{t_0}^t\boldsymbol{W}(t,s)\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}(s),\boldsymbol{x}(s-\tau(s)))\mathrm{d}s+\\&\sum_{t_0<t_k\leqslant t}\boldsymbol{W}(t,t_k)\boldsymbol{\Phi}_k(t_k^-)\boldsymbol{Mp}(\boldsymbol{x}(t_k^-))\end{aligned}$$

由假设($\mathbf{H}_1$)($\mathbf{H}_2$),得

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant& c\mathrm{e}^{-h(t-t_0)}\|\boldsymbol{\varphi}(0)\|+\\&\int_{t_0}^t c\mathrm{e}^{-h(t-s)}\|\boldsymbol{f}(s,\boldsymbol{x}(s),\boldsymbol{x}(s-\tau(s)))\|\mathrm{d}s+\\&\sum_{t_0<t_k\leqslant t}c\mathrm{e}^{-h(t-t_k)}\|\boldsymbol{\Phi}_k(t_k^-)\boldsymbol{Mp}(\boldsymbol{x}(t_k^-))\|\leqslant\\&c\mathrm{e}^{-h(t-t_0)}\|\boldsymbol{\varphi}(0)\|+\int_{t_0}^t c\mathrm{e}^{-h(t-s)}[l\|\boldsymbol{x}(s)\|+\\&q\|\boldsymbol{x}(s-\tau(s))\|]+\sum_{t_0<t_k\leqslant t}c\mathrm{e}^{-h(t-t_k)}[(\boldsymbol{\Phi}_k(t_k^-)\boldsymbol{Mp}(\boldsymbol{x}(t_k^-)))^{\mathrm{T}}\times\\&\boldsymbol{\Phi}_k(t_k^-)\boldsymbol{Mp}(\boldsymbol{x}(t_k^-))]^{\frac12}\leqslant\\&c\mathrm{e}^{-h(t-t_0)}\|\boldsymbol{\varphi}(0)\|+\\&\int_{t_0}^t c\mathrm{e}^{-h(t-s)}[l\|\boldsymbol{x}(s)\|+q\|\boldsymbol{x}(s-\tau(s))\|]+\\&\sum_{t_0<t_k\leqslant t}c\mathrm{e}^{-h(t-t_k)}[(\boldsymbol{Mp}(\boldsymbol{x}(t_k^-)))^{\mathrm{T}}\times\\&\boldsymbol{\Phi}_k^{\mathrm{T}}(t_k^-)\boldsymbol{\Phi}_k(t_k^-)\boldsymbol{Mp}(x(t_k^-))]^{\frac12}\leqslant\\&c\mathrm{e}^{-h(t-t_0)}\|\boldsymbol{\varphi}(0)\|+\\&\int_{t_0}^t c\mathrm{e}^{-h(t-s)}[l\|\boldsymbol{x}(s)\|+q\|\boldsymbol{x}(s-\tau(s))\|]+\\&\sum_{t_0<t_k\leqslant t}c\mathrm{e}^{-h(t-t_k)}[n\lambda_{\max}(\mathbf{diag}\{\boldsymbol{L}_1,\cdots,\boldsymbol{L}_n\})]^{\frac12}\leqslant\\&c\mathrm{e}^{-h(t-t_0)}\|\boldsymbol{\varphi}(0)\|+\\&\int_{t_0}^t c\mathrm{e}^{-h(t-s)}[l\|\boldsymbol{x}(s)\|+q\|\boldsymbol{x}(s-\tau(s))\|]+\\&\sum_{t_0<t_k\leqslant t}\sqrt{n}c\mathrm{e}^{-h(t-t_k)}[\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{(I_k^i(\boldsymbol{x}(t_k^-)))^2+\\&(J_k^i(\boldsymbol{x}(t_k^-)))^2\}]^{\frac12}\leqslant\\&c\mathrm{e}^{-h(t-t_0)}\|\boldsymbol{\varphi}(0)\|+\\&\int_{t_0}^t c\mathrm{e}^{-h(t-s)}[l\|\boldsymbol{x}(s)\|+q\|\boldsymbol{x}(s-\tau(s))\|]+\\&\sum_{t_0<t_k\leqslant t}\sqrt{n}c\mathrm{e}^{-h(t-t_k)}[(r_{1k}^2+r_{2k}^2)\|\boldsymbol{x}(t_k^-)\|^2]^{\frac12}\leqslant\\&c\mathrm{e}^{-h(t-t_0)}\|\boldsymbol{\varphi}(0)\|+\int_{t_0}^t c\mathrm{e}^{-h(t-s)}[l\|\boldsymbol{x}(s)\|+\\&q\|\boldsymbol{x}(s-\tau(s))\|]+\\&\sum_{t_0<t_k\leqslant t}\sqrt{n}c\mathrm{e}^{-h(t-t_k)}(r_{1k}^2+r_{2k}^2)^{\frac12}\|\boldsymbol{x}(t_k^-)\|\end{aligned}$$

如果

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{z}(t)\|=&c\mathrm{e}^{-h(t-t_0)}\|\boldsymbol{\varphi}(0)\|+\\&\int_{t_0}^t c\mathrm{e}^{-h(t-s)}[l\|x(s)\|+\\&q\|\boldsymbol{x}(s-\tau(s))\|]+\sum_{t_0<t_k\leqslant t}\sqrt{n}c\mathrm{e}^{-h(t-t_k)}\times\\&(r_{1k}^2+r_{2k}^2)^{\frac12}\|\boldsymbol{x}(t_k^-)\|\ \|\boldsymbol{z}(t)\|=\\&c\|\boldsymbol{\varphi}(t-t_0)\|,t_0-\tau\leqslant t\leqslant t_0\end{aligned}$$

则有

$$\begin{cases}\dot{z}(t)\leqslant-hz(t)+clz(t)+cq[z(t)]_\tau\\ \quad t\neq t_k,t\geqslant t_0\\ z(t_k)\leqslant(1+\sqrt{n}c(r_{1k}^2+r_{2k}^2)^{\frac12})z(t_k^-),k\in\mathbf{N}\\ \|z(t_0+s)\|=c\|\boldsymbol{\varphi}(s)\|,s\in[-\tau,0]\end{cases}$$

由定理 1 得:当 $t_k\leqslant t<t_{k+1},k\in\mathbf{N}$ 时,

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}(t)\|\leqslant&\|\boldsymbol{z}(t)\|\leqslant\\&\prod_{t_0<t_k\leqslant t}(1+\sqrt{n}c(r_{1k}^2+r_{2k}^2)^{\frac12})c\|\boldsymbol{\varphi}\|_\tau\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)}\end{aligned}$$

再由假设($\mathbf{H}_4$)得:当 $t_{k-1}\leqslant t<t_k,k\in\mathbf{N}$ 时,

$$\|\boldsymbol{x}(t)\| \leqslant e^{\eta(t_1-t_0)} \cdots e^{\eta(t_{k-1}-t_{k-2})} c\|\boldsymbol{\varphi}\|_{\tau} e^{-\lambda(t-t_0)} = c e^{-(\lambda-\eta)(t-t_0)}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{\tau} \leqslant c\|\boldsymbol{\varphi}\|_{\tau} e^{\eta(t-t_0)} e^{-\lambda(t-t_0)}$$

因此,式(2)的零解是全局稳定的且指数收敛率为 $\lambda-\eta$。

注2 对任意 i,k,当 $I_k^i(x)=J_k^i(x)$ 时,式(1)可化简为一般脉冲系统:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-\tau(t))) \\ \quad t\neq t_k \\ \Delta\boldsymbol{x}(t_k)=\boldsymbol{B}_k\boldsymbol{x}(t_k^-)+\boldsymbol{I}_k(\boldsymbol{x}(t_k^-)) \\ \quad k\in\mathbf{N} \end{cases}$$

其中,$\boldsymbol{I}_k(\boldsymbol{x}(t_k^-))=[I_k^1(\boldsymbol{x}(t_k^-)),\cdots,I_k^n(\boldsymbol{x}(t_k^-))]^{\mathrm{T}}$。因此,定理1对一般脉冲系统也是有效的,可以得出结论:系统式(1)在一定程度上推广了一般脉冲系统。

4 结束语

研究了具有逻辑选择脉冲效应的时滞动力系统的全局指数稳定性,推广了一般脉冲时滞动力系统和逻辑脉冲动力系统,使其稳定性更具一般性和实际性。

参考文献(References):

[1] LAKSHMIKANTHAM V, BAINOV D D, SIMEONOV P S. Theory of impulsive differential equations[M]. Singapore: World Scientific, 1989.

[2] LUO Z, SHEN J. Impulsive stabilization of functional differential equations with infinite delays[J]. Applied Mathematics Letters, 2003, 16(5): 695—701.

[3] LI X, WENG P. Impulsive stabilization of two kinds of second-order linear delay differential equations[J]. Math Anal Appl, 2004, 291(1): 270—281.

[4] RUAN D, LIU W, YANG M, et al. Novel stability results for Halanay inequality and applications to delay neural networks[J]. IEEE Access, 2020(99): 1—1.

[5] YOU Z L, WANG J R. Stability of impulsive delay differential equations[J]. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2018, 56(1-2): 253—268.

[6] CHENG D Z, LIU Z Q. Optimization via game theoretic control[J]. National Science Review, 2020, 7(7): 1120—1122.

[7] CHENG D Z. On finite potential games[J]. Automatica, 2014, 50(7): 1793—1801.

[8] LIU X, ZENG Y M. Analytic and numerical stability of delay differential equations with variable impulses[J]. Comput Appl Math, 2019, 358(1): 293—304.

[9] ZHANG G L, SONG M H, LIU M Z. Exponential stability of the exact solutions and the numerical solutions for a class of linear impulsive delay differential equations[J]. Comput Appl Math, 2015, 285(C): 32—44.

[10] XU D Y, YANG Z G, YANG Z C. Exponential stability of nonlinear impulsive neutral differential equations with delays[J]. Nonlinear Analysis, 2007, 67(5): 1426—1439.

[11] LI F, SUN J. Stability and stabilization of Boolean networks with impulsive effects[J]. Systems Control Letters, 2012, 61(1): 1—5.

[12] CHENG D, QI H. A linear representation of dynamics of Boolean networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2010, 55(10): 2251—2258.

[13] CHENG D, QI H, LI Z. Analysis and control of Boolean networks: a semitensor product approach [M]. London: Springer-Verlag, 2011.

[14] SUO J, SUN J. Asymptotic stability of differential systems with impulsive effects suffered by logic choice [J]. Automatica, 2015(51): 302—307.

[15] ZHANG J, SUN J, WANG Q. Finite-time stability of nonlinear systems with impulsive effects due to logic choice[J]. IET Control Theory Appl, 2018, 12(11): 1644—1648.

[16] HE Z, SUN J. Stability analysis of time-delay discrete systems with logic impulses[J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simul, 2019, 78(11): 2—9.

[17] LI C. Stability of stochastic delay differential systems with variable impulses due to logic choice[J]. IEEE Access, 2021(9): 81546—81553.

[18] LI C. Exponential stability for a class of linear delay differential systems under logic impulsive control[J]. IEEE Access, 2021(9): 107884—107894.

[19] HE Z, SUN J. Ultimate boundedness of discrete stochastic time-delay systems with logic impulses[J]. Neural Computing and Applications, 2020, 32(10): 5805—5813.

责任编辑:李翠薇