集值优化问题 E-Henig 有效解的稳定性

曾 静,胡瑞婷,彭家玉,丁若文
重庆工商大学 数学与统计学院,重庆 400067

摘 要:改善集下的 Henig 有效解统一了 Henig 有效解和近似 Henig 有效解,其稳定性分析在数值计算中不可或缺,同时集值优化问题是当前优化领域研究的热点问题,研究基于改善集下的集值优化问题 E-Henig 有效解的稳定性具有重要的理论意义和实用价值。首先,针对集值优化问题,基于改善集的概念,引入集值优化问题的 E-Henig 有效解,统一了集值优化问题近似 Henig 有效解和 Henig 有效解;其次,在集值优化问题目标映射和约束条件均扰动的情况下,借助 Painlevé-Kuratowski 收敛性,建立集值映射水平集的闭凸性、有界性及回收锥的相关性质;然后,借助所获得的集值映射水平集的闭凸性、有界性及回收锥的性质,在集值优化问题目标映射和约束条件均扰动的情况下,分别建立严格真拟 C-凸集值优化问题 E-弱有效点集、E-Henig 有效点集和 E-Henig 有效解的稳定性结果。所得结果首次聚焦于集值优化问题基于改善集概念下的弱有效点集、Henig 有效点集及 Henig 有效解集的稳定性结果,相较于以往文献大都只关注集值优化问题 Henig 有效解的存在性、最优性条件、对偶性性质,大大完善了集值优化问题 Henig 有效解的理论结果,并为数值计算的稳定性分析提供了方法和技巧。

关键词:集值优化问题;E-Henig 有效解;Painlevé-Kuratowski 收敛性;稳定性
中图分类号:O224 **文献标识码**:A doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2023.0003.013

Stability of E-Henig Efficient Solutions for Set-valued Optimization Problem

ZENG Jing, HU Ruiting, PENG Jiayu, DING Ruowen
School of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China

Abstract: The Henig efficient solution under the improved set unifies the Henig efficient solution and the approximate Henig efficient solution, and its stability analysis is indispensable in the numerical calculation. Set-valued optimization problem is a hot problem in the field of optimization. The study of the stability of E-Henig efficient solutions for set-valued optimization problems based on improved sets is of great theoretical and practical importance. Firstly, the E-Henig effective solution of the set-valued optimization problem was introduced based on the concept of improved set, and the approximate Henig effective solution and Henig effective solution of the set-valued optimization problem were unified. Secondly, the closed convexity, boundedness and related properties of the recovery cone of the level set of the set-valued mapping were established by using Painlevé-Kuratowski convergence in the case where both the objective mapping and the constraints of the set-valued optimization problem were perturbed. Then, with the obtained closed convexity, boundedness, and properties of recovery cone of the level set of set-valued mapping, stability results for the E-weakly effective point set, the E-Henig effective point set and the E-Henig effective solution for strictly proper quasi C-convex set-valued optimization problems were established, respectively, under the perturbation of both the objective mapping and the constraints of the set-valued

收稿日期:2022-06-25 **修回日期**:2022-08-02 **文章编号**:1672-058X(2023)03-0097-09
基金项目:重庆市自然科学基金(基础研究与前沿探索专项)面上项目(CSTC2019JCYJ-MSXMX0605);重庆市教委科学技术研究项目(KJQN201800837);重庆工商大学研究生创新型科研项目(YJSCXX2022-112-74).
作者简介:曾静(1983—),女,四川彭州人,副教授,博士,从事最优化理论及应用研究.
通讯作者:胡瑞婷(1996—),女,重庆南岸人,硕士研究生,从事最优化理论及应用研究. Email:943389111@qq.com.
引用格式:曾静,胡瑞婷,彭家玉,等.集值优化问题 E-Henig 有效解的稳定性[J].重庆工商大学学报(自然科学版),2023,40(3):97—105.
ZENG Jing, HU Ruiting, PENG Jiayu, et al. Stability of E-Henig efficient solutions for set-valued optimization problem[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition), 2023, 40(3): 97—105.

optimization problem. The results obtained for the first time focus on the stability results of the set-valued optimization problem based on the weak effective point set, Henig effective point set and Henig effective solution set under the concept of improved set. Compared with the previous literature, which mainly focused on the existence, optimality condition and duality property of Henig effective solutions for set-valued optimization problems, this study has significantly improved the theoretical results of Henig efficient solution for set-valued optimization problems and provided methods and techniques for stability analysis of numerical computations.

Keywords: set-valued optimization problems; E-Henig efficient solutions; Painlevé-Kuratowski convergence; stability

1 引 言

集值优化问题包含了向量优化、数值优化等多种优化问题,具有丰富的实际背景,是优化领域的研究热点之一。有关这一问题的研究涉及变分分析、数理经济、博弈论等多个学科分支,它与学科间的密切联系极大程度上拓宽了集值优化问题理论研究和实际应用的范围。近年来,学者们已取得了一系列的研究成果[1-6]。2012年,Gutiérrez等[7]基于改善集给出了E-有效解的定义,不仅对数值优化问题的解进行了进一步推广,还把向量优化问题的几个解(有效解、近似有效解、弱有效解、近似弱有效解)进行了统一;2015年,赵克全和杨新民[8]首次定义了E-Benson真有效解,它是经典真有效解和近似真有效解概念的合理推广;2017年,林佩静[3]在研究中给出E-Henig真有效点的定义、等价刻画、解的特征等。目前关于Henig有效解的最优性条件[9]、连通性[10-11]、对偶性[12-13]等方面的研究已经比较成熟,但鲜有文献研究集值优化问题改善集下Henig有效解的稳定性。由上述文献可以看出:以往学者聚焦于集值优化问题Henig有效解的存在性、最优性、对偶性等方面的研究,大大丰富了集值优化问题有效解性质的研究,进一步推动了优化问题的发展。而改善集下的Henig有效解统一了Henig有效解和近似Henig有效解,其稳定性分析是数值计算中必不可少的环节,因此研究集值优化问题E-Henig有效解的稳定性具有重要的理论意义和实用价值。但基于改善集下的集值优化问题E-Henig有效解的研究还少之又少,文献[3]虽然对其进行了研究,但其主要研究改善集下集值优化问题E-Henig有效解的存在性、鞍点、对偶性。本文致力于改善集下集值优化问题E-Henig有效解的稳定性研究。值得一提的是,2004年,Lucchetti和Miglierina[14]在目标映射和约束条件均扰动的情形下研究了凸向量优化问题有效点集和解集的稳定性;2014年,李小兵等[15]在扰动问题序列Painlevé-Kuratowski收敛到目标优化问题时,建立了严格真拟C-凸向量优化问题Henig有效点集和解集的稳定性。随后几年,李小兵等[16]讨论了当近似问题的数据Painlevé-Kuratowski收敛到原问题的数据时,拟凸集值优化问题3种解(有效解、弱有效解、Henig有效解)的点集和解集的稳定性。文献[14,15]为向量优化问题有效解的稳定性研究做出了贡献,本文拟借助文献[16]的研究方法,将文献[14,15]的结果进一步推广至集值优化问题中。因此,本文拟在目标映射和约束条件都扰动的情况下,获得严格真拟C-凸集值优化问题E-Henig有效点集和解集的稳定性结果,推广文献[14-16]中的相关结果,为集值优化问题E-Henig有效解的实际数值计算分析提供重要的稳定性理论分析依据。

2 预备知识

本节主要介绍集值映射的一些相关概念和性质。

设C为R^l中非空的集合,若$x\in C$,$\lambda\geqslant 0$能推出$\lambda x\in C$,则称集合C为锥;若$C\neq\{0\}$且$C\neq R^l$,则称C为真锥;若$C\cap(-C)=\{0\}$,则称C为尖锥;若$cl(C)$是尖锥,则称C为锐锥;若C既是尖锥,又是锐锥,则称C为尖锐锥。设有非空集合$S\subset R^m$,称集合$\{\lambda s\mid \lambda\geqslant 0, s\in S\}$是由集合$S$生成的锥,记为$cone(S)$;定义$\partial S$是非空集合$S$的边界;设$C$为$R^l$中内部非空的尖闭凸锥,$R^l$中$C$诱导的偏序如下:$y\leqslant_C x\Leftrightarrow x-y\in C$,$y<_C x\Leftrightarrow x-y\in \operatorname{int} C$,$\forall x,y\in R^l$。

设$F:S\to 2^{R^l}$是从S到R^l的集值映射,考虑如下集值优化问题:

$$(S,F):\min_{x\in S}F(x)$$

首先回顾集值优化问题(S,F)的几种解的定义、改善集的定义、改善集下解的定义以及相关性质。从现在起,总假设非空集合$S\subset R^m$,$F(S)=\cup_{x\in S}F(x)$,C为R^l中内部非空的尖闭凸锥。

定义 1[11,15]　设 $y\in F(S)$,$\varepsilon\in \text{int}\, C$,若存在满足 $C\backslash\{0\}\subset \text{int}\, C_1$ 的内部非空尖闭凸锥 C_1,使得 $(F(S)-\{y\}+\varepsilon)\cap(-C_1\backslash\{0\})=\varnothing$,则称点 y 为集合 $F(S)$ 的 ε-近似 Henig 有效点; 记集合 $F(S)$ 中所有 ε-近似 Henig 有效点构成的集合为 ε-HMin $F(S)$;若 $x_0\in S$,存在 $y_0\in F(x_0)$,使得 $y_0\in\varepsilon$-HMin $F(S)$,则称点 x_0 为集值优化问题(S,F)的近似 Henig 有效解;记集值优化问题(S,F)所有近似 Henig 有效解构成的集合为 ε-HEff(S,F)。

定义 2[15]　设 $y\in F(S)$,若存在满足 $C\backslash\{0\}\subset \text{int}\, C_1$ 的内部非空尖闭凸锥 C_1,使得$(F(S)-\{y\})\cap(-C_1\backslash\{0\})=\varnothing$,则称点 y 为集合 $F(S)$的 Henig 有效点;记集合 $F(S)$所有 Henig 有效点构成的集合为 HMin $F(S)$;若 $x_0\in S$,存在 $y_0\in F(x_0)$,使得 $y_0\in$ HMin$F(S)$,则称点 x_0 为集值优化问题(S,F)的 Henig 有效解;记集值优化问题(S,F)所有 Henig 有效解构成的集合为 HEff(S,F)。

定义 3[8]　设 E 为 R^l 中的一个非空子集,C 为 R^l 中内部非空尖闭凸锥,若满足 $0\notin E$ 且 $E+C=E$,则称 E 为关于 C 的一个改善集,记 R^l 中关于 C 的改善集全体为 ξ_Y。

定义 4[8]　设 $E\in\xi_Y$,$y\in F(S)$,若点 y 满足$(F(S)-\{y\})\cap(-\text{int}\, E)=\varnothing$,则称点 y 为集合 $F(S)$的 E-弱有效点;记 $F(S)$所有 E-弱有效点构成的集合为 EWMin $F(S)$;若 $x_0\in S$,存在 $y_0\in F(x_0)$,使得 $y_0\in$ EWMin $F(x_0)$,则称点 x_0 为集值优化问题(S,F)的 E-弱有效解;记集值优化问题(S,F)所有 E-弱有效解构成的集合为 EWEff(S,F)。

定义 5[8]　设 $E\in\xi_Y$,$y\in F(S)$,若点 y 满足 $(F(S)-\{y\})\cap(-E-C\backslash\{0\})=\varnothing$,则称点 y 为集合 $F(S)$的 E-有效点;记 $F(S)$所有 E-有效点构成的集合为 EMin (S); 若 $x_0\in S$,存在 $y_0\in F(x_0)$,使得 $y_0\in$ EMin $F(x_0)$,则称点 x_0 为集值优化问题(S,F)的 E-有效解;记集值优化问题(S,F)所有 E-有效解构成的集合为 EEff(S,F)。

定义 6　设 $E\in\xi_Y$,$y\in F(S)$,若存在满足 $C\backslash\{0\}\subset \text{int}\, C_1$ 的内部非空的尖闭凸锥 C_1,使得$(F(S)+E-\{y\})\cap(-C_1\backslash\{0\})=\varnothing$,则称点 y 为集合 $F(S)$的 E-Henig 有效点;记 $F(S)$所有 E-Henig 有效点构成的集合为 EHMin $F(S)$;若 $x_0\in S$,存在 $y_0\in F(x_0)$,使得 $y_0\in$ EHMin $F(S)$,则称点 x_0 为集值优化问题(S,F)的 E-Henig 有效解;记集值优化问题(S,F)所有 E-Henig 有效解构成的集合为 EHEff(S,F)。

注 1　若取 $E=\varepsilon+C\backslash\{0\}$,其中 $\varepsilon\in C\backslash\{0\}$,此时 E-Henig 有效点退化为 ε-近似 Henig 有效点;若取 $E=C\backslash\{0\}$,此时 E-Henig 有效点退化为 Henig 有效点。因此 E-Henig 有效点统一了 Henig 有效点及 ε-近似 Henig 有效点概念。

命题 1[7,17]　若 $E\in\xi_Y$,$\text{int}\, E\neq\varnothing$,$A\subset R^l$ 为非空子集,则以下性质成立:

(1) $\text{int}\, E\in\xi_Y$,$\text{int}\, E=E+\text{int}\, C$,$\text{int}\, E=cl(E)+\text{int}\, C$。

(2) 若 $E\subset C$,则 $E+E\subset E$,$E+\text{int}\, E\subset E$,且 $cone\, E$ 为凸的。

(3) 若 $\text{int}\, C\subset E\subset C\backslash\{0\}$,则有 $clcone\,(A+C)=clcone\,(A+E)$。

(4) $clcone\,(A+E)=clcone\,(A+\text{int}\, E)$,$clcone\,(A+E)+C=clcone\,(A+E)$。

注 2　结合命题 1 中(1)易得,EWMin $F(S)\supset$ EMin $F(S)\supset$ EHMin $F(S)$。

下面介绍紧集值映射、集值映射凸性、集合 Painlevé-Kuratowski(简记 P. K.)收敛,以及集值映射序列 Painlevé-Kuratowski 收敛的概念及相关性质。

定义 7[16]　设 $F:S\to 2^{R^l}$ 为集值映射,若对任意 x_1,$x_2\in S$,$\lambda\in[0,1]$,有

$$\lambda F(x_1)+(1-\lambda)F(x_2)\subset F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)+C$$

则称集值映射 F 为 C-凸集值映射。

定义 8[16]　设 $F:S\to 2^{R^l}$ 为集值映射,若对任意 x_1,$x_2\in S$,$x_1\neq x_2$ 和任意 $\lambda\in(0,1)$,有

$$\lambda F(x_1)+(1-\lambda)F(x_2)\subset F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)+\text{int}\, C$$

则称集值映射 F 为严格 C-凸集值映射。

定义 9[18]　设 $F:S\to 2^{R^l}$ 为集值映射,若对任意 x_1,$x_2\in S$,$\lambda\in[0,1]$,有下式之一一定成立:

$$F(x_1)\subset F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)+C$$

$$F(x_2)\subset F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)+C$$

则称集值映射 F 为真拟 C-凸集值映射。

定义 10[18]　设 $F:S\to 2^{R^l}$ 为集值映射,若对任意 x_1,$x_2\in S$,$x_1\neq x_2$ 和任意 $\lambda\in(0,1)$,有下式之一一定成立:

$$F(x_1)\subset F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)+\text{int}\, C$$

$$F(x_2)\subset F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)+\text{int}\, C$$

则称集值映射 F 为严格真拟 C-凸集值映射。

定义 11[18] 设 $F:S\to 2^{R^l}$ 为集值映射,若对任意 $x_1,x_2\in S,y_1\in F(x_1),y_2\in F(x_2)$ 和任意 $\lambda\in[0,1]$,存在 $\eta\in[0,1]$,使得 $\eta y_1+(1-\eta)y_2\in F(x_\lambda)+C$,则称 F 为自然拟凸集值映射。

定义 12[18] 设 $F:S\to 2^{R^l}$ 为集值映射,若对任意 $x_1,x_2\in S,x_1\neq x_2,y_1\in F(x_1),y_2\in F(x_2)$ 和任意 $\lambda\in(0,1)$,存在 $\eta\in[0,1]$,使得 $\eta y_1+(1-\eta)y_2\in F(x_\lambda)+\mathrm{int}\,C$,则称 F 为严格自然拟凸集值映射。

注 3[18] 若 F 是严格真拟 C-凸集值映射,则 F 也是真拟 C-凸集值映射;若 F 是真拟 C-凸集值映射,则 F 也是自然拟凸集值映射。然而真拟 C-凸性与 C-凸性没有必然联系。

定义 13[16] 设 $\alpha\in R^l,F:S\to 2^{R^l}$ 为集值映射;F 在高度 α 下的水平集 F^α 定义为 $F^\alpha=\{x\in S:\alpha\in F(x)+C\}$。

注 4[16] 1) 对任意 $\alpha\in R^l$,当 F 是自然拟凸集值映射时,F^α 是凸集; 2) 结合注 3 可知,当 F 是严格真拟 C-凸集值映射或真拟 C-凸集值映射时,F^α 也是凸集。

定义 14[14] 设 $S\subset R^m$ 是闭凸集合,S 的回收锥集合定义为 $0^+(S)=\{d\in X:x+td\in S,\forall x\in S,\forall t\geqslant 0\}$。

注 5 显然,对于闭凸集合 $S\subset R^m,0^+(S)=\{0\}$,当且仅当 S 为有界集。

定义 15[19] 设 $F:S\to 2^{R^l}$ 为集值映射,若对任意 $x\in S,F(x)$ 是 R^l 上的紧子集,则称集值映射 F 在 S 上是紧值的。

定义 16[20] 若 R^m 中非空凸集 S 的边界(简记为 ∂S)不包含线段,则称 S 是 rotund 的,即对任意 $x,x'\in S,x\neq x'$,有 $]x,x'[\cap(\partial S)^c\neq\varnothing$,其中,$]x,x'[=\{\lambda x+(1-\lambda)x':\lambda\in[0,1]\}$。

定义 17[16] 设 $F:S\to 2^{R^l}$ 为凸值映射,若对任意 $x\in S,F(x)$ 是 rotund 子集,则称 F 在 S 上是 rotund 值的。

注 6[16] 若 F 是单值映射,则 F 在 S 上既是 rotund 值,又是紧值。

引理 1[19] 设 $F:S\to 2^{R^l}$ 是集值映射,$x_0\in S$,若 F 在 S 上是紧值的,F 在 x_0 处上半连续(简记 $u.s.c$),则对任意 S 中的序列 $\{x_n\}$ 有 $x_n\to x_0$,且对任意 $y_n\in F(x_n)$,存在 $y_0\in F(x_0)$ 和 $\{y_n\}$ 中的子序列 $\{y_{n_k}\}$,使得 $y_{n_k}\to y_0$。

定义 18[16] 设集合 D 和序列 $\{D_n\}$ 为 R^m 中的非空集合,若 $\lim_n\sup D_n\subset D\subset\lim_n\inf D_n$,则称集合序列 $\{D_n\}$ 是 Painlevé-Kuratowski 收敛于集合 D(简记为 $D_n\xrightarrow{P.K.}D$)的,其中

$$\lim_n\inf D_n:=\{x\in R^m:x=\lim_{n\to\infty}x_n,x_n\in D_n\}.\ \lim_n\sup D_n:=\{x\in R^m:x=\lim_{k\to\infty}x_k,x_k\in D_{n_k}\}$$

定义 19[16] 设集合 S 和序列 $\{S_n\}$ 为 R^m 中的非空集合,$F:S\to 2^{R^l}$ 和 $F_n:S_n\to 2^{R^l}(n\in N)$ 是集值映射,令 $\mathrm{epi}\,F=\{(x,z)\in S\times 2^{R^l}:z\in F(x)+C\}$,若 $\mathrm{epi}\,F_n\xrightarrow{P.K.}\mathrm{epi}\,F$,则称集值映射序列 $\{F_n\}$ 是 Painlevé-Kuratowski 收敛于集值映射 F 的(简记为 $F_n\xrightarrow{P.K.}F$)。

3 稳定性结果

本节在集值优化问题可行域和目标映射均扰动的情况下,建立了集值优化问题 E-Henig 有效解点集和解集的稳定性结果。从下面开始,总假设 $E\in\xi_Y$。

引理 2 设 $S\subset R^m$ 是非空闭凸子集,F 在 S 上是上半连续的真拟 C-凸紧值集值映射,若 $\alpha\in R^l,F^\alpha\neq\varnothing$,则有 F^α 是闭凸集。

证 明 结合注 4 可知,对 $\alpha\in R^l$,若 $F^\alpha\neq\varnothing$,则显然有 F^α 是凸集。下证 F^α 是闭集:令 $x_n\in F^\alpha$ 且 $x_n\to x$,因为 $x_n\in S$,S 为闭集,所以 $x\in S$;由 $x_n\in F^\alpha$ 可知,存在 $y_n\in F(x_n)$,使得 $\alpha\in y_n+C$;又由引理 1 可知,$\{y_n\}$ 中存在子序列 $\{y_{n_k}\}$,使得 $y_{n_k}\to y$ 且 $y\in F(x)$,从而有 $\alpha\in F(x)+C$。因此 $x\in F^\alpha$,即 F^α 为闭集。

命题 2 设 $\alpha\in R^l,S,S_n\subset R^m(n\in N)$ 为非空闭凸集合(N 为正整数集合),满足 $S_n\xrightarrow{P.K.}S$;设 $F:S\to 2^{R^l}$ 和 $F_n:S_n\to 2^{R^l}$ 为非空真拟 C-凸集值映射,满足 $F_n\xrightarrow{P.K.}F$;若对于 $F^\alpha\neq\varnothing$ 的 F^α,有 $0^+(F^\alpha)=\{0\}$,则对任意 $r>0$ 和任意满足 $F^\alpha\neq\varnothing$ 的 $\alpha\in R^l$,存在 $k_r\in N$,使得 $F_n^\alpha\subset F^\alpha+B(0,r),\forall n>k_r$,其中 $B(0,r)$ 表示以 0 为球心,r 为半径的球。

证 明 用反证法:假设存在 $r>0$,满足 $F^\alpha\neq\varnothing$ 的 $\alpha\in R^l$,对任意 $k_r\in N$,存在 $n_k\geqslant k_r$,使得 $F_{n_k}^\alpha\subset F^\alpha+B(0,r)$,即对任意 $k_r\in N$,存在 $x_{n_k}\in F_{n_k}^\alpha$,使得

$$d(x_{n_k},F^\alpha)>r \tag{1}$$

当 $\{x_{n_k}\}$ 有界时,不失一般性,设 $x_{n_k}\to x_0$,由 $x_{n_k}\in F_{n_k}^\alpha$ 可知 $(x_{n_k},\alpha)\in\mathrm{epi}\,F_{n_k}$,从而有 $(x_{n_k},\alpha)\to(x_0,\alpha)$;又由

$F_{n_k}\xrightarrow{P.K.}F$ 可知,$(x_0,\alpha)\in\text{epi}\,F$,即 $x_0\in F^\alpha$,这与式(1)相矛盾。

当$\{x_{n_k}\}$无界时,不妨设(如果有必要可选择合适的子序列)

$$\|x_{n_k}\|\to\infty \tag{2}$$

设对任意 $t\geqslant0$,有

$$\frac{t}{\|x_{n_k}\|}x_{n_k}\to t\boldsymbol{d} \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{d}$ 为 R^l 中的单位向量。设 $x_0\in S$,因为 $S_n\xrightarrow{P.K.}S$,所以存在 $x_{n_k}'\in S_{n_k}$,使得 $x_{n_k}'\to x_0$,如果有必要可选择合适的子序列;令 $z_{n_k}=\left(1-\frac{t}{\|x_{n_k}\|}\right)\cdot x_{n_k}'+\frac{t}{\|x_{n_k}\|}\cdot x_{n_k}$,显然 $x_{n_k}\in S_{n_k}$,$x_{n_k}'\in S_{n_k}$;由 S_{n_k} 的凸性可知,$z_{n_k}\in S_{n_k}$,又由式(2)和式(3)可知,$z_{n_k}\to x_0+t\boldsymbol{d}$;令 $z=x_0+t\boldsymbol{d}$,因为 $S_n\xrightarrow{P.K.}S$,所以 $z\in S$;设 $x'\in F^\alpha$,由 $F_{n_k}\xrightarrow{P.K.}F$ 可知,存在 epi F_{n_k} 中的子序列$\{(x_{n_k}',\gamma_{n_k})\}$,使得$(x_{n_k}',\gamma_{n_k})\to(x',\alpha)$;显然,对任意 n_k,有

$$\gamma_{n_k}\in F_{n_k}(x_{n_k}')+C \tag{4}$$

因为 $\gamma_{n_k}\to\alpha$,所以对任意 $\varepsilon\in\text{int}\,C$,存在 $k_\varepsilon\in N$,使得

$$\alpha+\varepsilon\in\gamma_{n_k}+C,\ \forall\,k\geqslant k_\varepsilon \tag{5}$$

由 F_{n_k} 的真拟 C-凸性可知,对任意 $\lambda\in[0,1]$,下式之一一定成立

$$F_{n_k}(x_{n_k})\subset F_{n_k}(z_{n_k})+C \tag{6}$$

$$F_{n_k}(x_{n_k}')\subset F_{n_k}(z_{n_k})+C \tag{7}$$

当式(6)成立时,由 $x_{n_k}\in F_{n_k}^\alpha$ 可知,$\alpha\in F_{n_k}(x_{n_k})+C$;进一步,有 $\alpha\in F_{n_k}(z_{n_k})+C$,即 $z_{n_k}\in F_{n_k}^\alpha$;由 $F_n\xrightarrow{P.K.}F$ 和 $z\in S$ 可知,$(z_{n_k},\alpha)\to(z,\alpha)$ 且 $(z,\alpha)\in\text{epi}\,F$,从而有 $z\in F^\alpha$。因此 $\boldsymbol{d}\neq0$ 且 $\boldsymbol{d}\in0^+(F^\alpha)$,这与 $0^+(F^\alpha)=\{0\}$ 相矛盾。

当式(7)成立时,结合式(4)和式(5)可知,对任意 $k\geqslant k_\varepsilon$,有 $\alpha+\varepsilon\in F_{n_k}(z_{n_k})+C$,即 $z_{n_k}\in F_{n_k}^{\alpha+\varepsilon}$;由 $F_n\xrightarrow{P.K.}F$ 和 $z\in S$ 可知,$z\in F^{\alpha+\varepsilon}$;又由 ε 的任意性可知,$z\in F^\alpha$。因此 $\boldsymbol{d}\neq0$ 且 $\boldsymbol{d}\in0^+(F^\alpha)$,这与 $0^+(F^\alpha)=\{0\}$ 相矛盾。

综上,式(1)不成立,求证成立。

命题 3　设 $S\subset R^m$ 为非空闭凸子集,$F:S\to2^{R^l}$ 为 S 上的上半连续真拟 C-凸集值紧值映射,epi F 为闭集,则以下命题等价:

1) $\alpha\in R^l$,当 $F^\alpha\neq\varnothing$时,$0^+(F^\alpha)=\{0\}$。

2) $\alpha\in R^l$,当 $F^\alpha\neq\varnothing$时,F^α 有界。

证　明　2)⇒1)。用反证法:若存在 $x\in0^+(F^\alpha)$ 且 $x\neq0$,则有

$$a+tx\in F^\alpha,\ \forall\,a\in F^\alpha,\ \forall\,t\geqslant0 \tag{8}$$

因为 $F^\alpha\neq\varnothing$,取 $l\in F^\alpha$,由式(8)可知,$l+tx\in F^\alpha$,$\forall\,t\geqslant0$,这意味着 F^α 无界。

1)⇒2)。用反证法:设存在 F^α 中的序列$\{x_n\}$,使得$\{x_n\}$无界,即 $\|x_n\|\to\infty$;不妨设$\frac{x_n}{\|x_n\|}\to x_0$(如果有必要可选择合适的子序列),从而有 $x_0\neq0$,否则,由 $\frac{x_n}{\|x_n\|}\to x_0$ 可知,$\frac{x_n}{\|x_n\|}\to0$,这意味着对任意 $\varepsilon>0$,存在正整数 N,当 $n>N$ 时,有 $d\left(\frac{x_n}{\|x_n\|},0\right)<\varepsilon$;然而易得,对任意 n,有 $d\left(\frac{x_n}{\|x_n\|},0\right)=1$,因此,当 $0<\varepsilon<1$ 时,对任意 n,有 $d\left(\frac{x_n}{\|x_n\|},0\right)>\varepsilon$,这与 $d\left(\frac{x_n}{\|x_n\|},0\right)<\varepsilon$ 相矛盾。

任取 $x\in F^\alpha$,令 $z_n=\left(1-\frac{t}{\|x_n\|}\right)\cdot x+\frac{t}{\|x_n\|}\cdot x_n$,其中,$t\geqslant0$,结合 $x\in S$,$x_n\in S$ 和 S 的凸性可知,$z_n\in S$,显然 $z_n\to x+tx_0$;令 $z=x+tx_0$,因为 S 为闭集,所以 $z\in S$,又因为 $x_n\in F^\alpha$,$x\in F^\alpha$,所以分别存在 $y\in F(x)$,$y_n\in F_n(x_n)$,使得

$$\alpha\in y+C \tag{9}$$

$$\alpha\in y_n+C \tag{10}$$

由 F 的真拟 C-凸性可知,$y\in F(z_n)+C$ 或 $y_n\in F(z_n)+C$ 一定成立。当 $y\in F(z_n)+C$ 时,由式(9)可知,$\alpha\in F(z_n)+C$,即 $z_n\in F^\alpha$;当 $y_n\in F(z_n)+C$ 时,由式(10)可知,$\alpha\in F(z_n)+C$,即 $z_n\in F^\alpha$;因此存在 $F(z_n)$ 中的序列$\{w_n\}$,使得 $\alpha-w_n\in C$。由引理 1 可知,存在$\{w_n\}$中的子序列$\{w_{n_k}\}$,使得 $w_{n_k}\to w$ 且 $w\in F(z)$,从而有 $\alpha-w\in C$,这意味着 $\alpha\in F(z)+C$,即 $z\in F^\alpha$。因此 $x_0\neq0$ 且 $x_0\in0^+(F^\alpha)$,这与 $0^+(F^\alpha)=\{0\}$ 相矛盾。

命题 4　设 $\alpha\in R^l$,$S,S_n\subset R^m(n\in N)$ 为非空闭凸集合,满足 $S_n\xrightarrow{P.K.}S$;设 $F:S\to2^{R^l}$ 和 $F_n:S_n\to2^{R^l}$ 为非空真拟 C-凸集值映射,满足 $F_n\xrightarrow{P.K.}F$,此外 $0^+(F^\alpha)=\{0\}$(其中 $F^\alpha\neq\varnothing$),则当 $F_n^\alpha\neq\varnothing$,$n$ 充分大时,有 $0^+(F_n^\alpha)=\{0\}$。

证　明　用反证法：假设存在 $\alpha\in R^l$，$F_n^\alpha\neq\varnothing$，当 n 充分大时，有 $0^+(F_n^\alpha)\neq\{0\}$，则存在 $0^+(F_n^\alpha)$ 中的子序列 $\{d_k\}$，使得 $d_k\to\boldsymbol{d}$，其中 $\boldsymbol{d}$ 为 R^l 中的单位向量；任取 $x\in S,\beta\in F(x)$，则 $F^\beta\neq\varnothing$；因为 $\text{int}\,C\neq\varnothing$，所以存在 $\varepsilon\in\text{int}\,C,\lambda>0$，使得 $\lambda\varepsilon\in\alpha+C$ 且 $\lambda\varepsilon\in\beta+C$；令 $\gamma=\lambda\varepsilon$，则有 $\gamma\in\alpha+C$ 且 $\gamma\in\beta+C$；由此可知，$\gamma\in F(x)+C$。进一步，有 $x\in F^\gamma$ 且 $F^\gamma\neq\varnothing$，因为 $F_n\xrightarrow{P.K.}F$，所以存在子序列 $\{(x_k,\gamma_k)\}$，使得

$$x_k\in S_{n_k},\gamma_k\in F_{n_k}(x_k)+C \tag{11}$$

$$(x_k,\gamma_k)\to(x,\gamma) \tag{12}$$

由式(12)可知，$\gamma_k\to\gamma$，所以对任意 $\varepsilon\in\text{int}\,C$，存在 $k_\varepsilon\in N$，使得

$$\gamma+\varepsilon\in\gamma_k+C,\ \forall\, k\geqslant k_\varepsilon \tag{13}$$

结合式(11)和式(13)可知，$\gamma+\varepsilon\in F_{n_k}(x_k)+C,\ \forall\, k\geqslant k_\varepsilon$。这意味着，当 k 充分大时，有

$$x_k\in F_{n_k}^{\gamma+\varepsilon} \tag{14}$$

任取 $x'\in F_{n_k}^\alpha$，则有 $\alpha\in F_{n_k}(x')+C$；因为 $\gamma\in\alpha+C$，所以 $\gamma+\varepsilon\in\alpha+\varepsilon+C\subset\alpha+C$，从而 $\gamma+\varepsilon\in\alpha+C\subset F_{n_k}(x')+C+C\subset F_{n_k}(x')+C$，即 $x'\in F_{n_k}^{\gamma+\varepsilon}$，从而易得 $0^+(F_{n_k}^\alpha)\subset0^+(F_{n_k}^{\gamma+\varepsilon})$；结合式(14)可知，对任意 $\mu\geqslant0$，有 $x_k+\mu d_k\in F_{n_k}^{\gamma+\varepsilon}$，从而有 $(x_k+\mu d_k,\gamma+\varepsilon)\in\text{epi}\,F_{n_k}$；因为 $F_n\xrightarrow{P.K.}F$，$x_k+\mu d_k\to x+\mu\boldsymbol{d}$，所以 $x+\mu\boldsymbol{d}\in F^{\gamma+\varepsilon},\ \forall\mu\geqslant0$。因此 $\boldsymbol{d}\neq0$ 且 $\boldsymbol{d}\in0^+(F^{\gamma+\varepsilon})$，这与 $0^+(F^{\gamma+\varepsilon})=\{0\}$ 相矛盾。

接下来，在集值优化问题的可行域和目标映射均扰动的情况下，建立集值优化问题 E-弱有效点集和 E-Henig 有效点集的稳定性结果。

命题 5　设 $E=C_1\setminus\{0\}$，$(F(S)-\{y\})\cap(-C_1\setminus\{0\})=\varnothing$，则 $(F(S)-\{y\}+E)\cap(-C_1\setminus\{0\})=\varnothing$。

证　明　任取 $x\in F(S)-\{y\}$，由 $(F(S)-\{y\})\cap(-C_1\setminus\{0\})=\varnothing$，可知 $x\notin-C_1\setminus\{0\}$，即 $x\in R^l\setminus(-C_1\setminus\{0\})$，从而

$$F(S)-\{y\}+C_1\setminus\{0\}\subset R^l\setminus(-C_1\setminus\{0\})+C_1\setminus\{0\}\subset R^l\setminus(-C_1\setminus\{0\})$$

即 $(F(S)-\{y\}+C_1\setminus\{0\})\cap(-C_1\setminus\{0\})=\varnothing$。因为 $E=C_1\setminus\{0\}$，所以 $(F(S)+E-\{y\})\cap(-C_1\setminus\{0\})=\varnothing$。

注 7　由命题 5 可知，当 $E=C_1\setminus\{0\}$ 时，Henig 有效解一定是 E-Henig 有效解。

定理 1　设 $S,S_n\subset R^m(n\in N)$ 为非空闭凸集合，且 $S_n\xrightarrow{P.K.}S$，$F:S\to2^{R^l}$ 和 $F_n:S_n\to2^{R^l}$ 为非空 C-凸集值映射，且 $F_n\xrightarrow{P.K.}F$；若 $\text{int}\,C\subset\text{int}\,E$，则 $\lim_n\sup\text{EWMin}\,F_n(S_n)\subset\text{EWMin}\,F(S)$。

证　明　任取 $y\in\lim_n\sup\text{EWMin}\,F_n(S_n)$，则存在 $\text{EWEff}\,(S_{n_k},F_{n_k})$ 中的子序列 $\{(x_{n_k},y_{n_k})\}$，使得 $y_{n_k}\to y$。用反证法：假设 $y\notin\text{EWMin}\,F(S)$，则存在 $\bar{x}\in S,\bar{y}\in F(\bar{x})$，使得 $\bar{y}-y\in-\text{int}\,E$；令 $\frac{\varepsilon}{2}=y-\bar{y}$，因为 $y_{n_k}\to y$，则存在 $k_\varepsilon\in N$，使得对 $k\geqslant k_\varepsilon$，有 $y_{n_k}\in y-\frac{\varepsilon}{4}+\text{int}\,C$；由 $(\bar{x},\bar{y})\in\text{epi}\,F$，$S_n\xrightarrow{P.K.}S$ 和 $F_n\xrightarrow{P.K.}F$ 可知，存在 $\text{epi}\,F_n$ 中的序列 $\{(u_n,v_n)\}$，使得 $(u_n,v_n)\to(\bar{x},\bar{y})$；由 $v_n\to\bar{y}$ 可知，存在 $k'_\varepsilon\geqslant k_\varepsilon$，使得对任意 $n\geqslant k'_\varepsilon$，有 $v_n\in\bar{y}+\frac{\varepsilon}{4}-\text{int}\,C=y-\frac{\varepsilon}{4}-\text{int}\,C$；不失一般性，存在 $\{v_n\}$ 中的子序列 $\{v_{n_k}\}$，使得对任意 $k\geqslant k'_\varepsilon$，有 $v_{n_k}\in y-\frac{\varepsilon}{4}-\text{int}\,C\subset y_{n_k}-\text{int}\,C-\text{int}\,C$；结合 $\text{int}\,C\subset\text{int}\,E\subset E$ 和 $E+\text{int}\,C=\text{int}\,E$，可知 $v_{n_k}\in y_{n_k}-\text{int}E$。这与 $(x_{n_k},y_{n_k})\in\text{EWEff}(S_{n_k},F_{n_k})$ 相矛盾，从而可知 $y\in\text{EWMin}\,F(S)$。

定理 2　设 $F:S\to2^{R^l}$ 和 $F_n:S_n\to2^{R^l}$ 为上半连续严格真拟 C-凸的紧值集值映射，且满足命题 2 中其余的条件，若 C 是满足 $C\setminus\{0\}\subset\text{int}C_1$ 的尖闭凸锥，$\text{epi}\,F$ 为闭集，$\text{int}\,C\subset\text{int}\,E$，$E=C_1\setminus\{0\}$，$F$ 在 S 上为 rotund 值映射，则有 $\lim_n\sup\text{EHMin}\,F_n(S_n)\subset\text{EHMin}\,F(S)$。

证　明　任取 $y\in\lim_n\sup\text{EHMin}\,F_n(S_n)$，下证 $y\in\text{EHMin}\,F(S)$。因为

$$\lim_n\sup\text{EHMin}F_n(S_n)\subset\lim_n\sup\text{EWMin}F_n(S_n)\subset\text{EWMin}\,F(S)\subset F(S)$$

因此存在 $x\in S$，使得 $y\in F(x)$。用反证法：假设 $y\notin\text{EHMin}F(S)$，则对任意满足 $C\setminus\{0\}\subset\text{int}\,C_1$ 的尖闭凸锥 C_1，都有 $(F(S)+E-\{y\})\cap(-C_1\setminus\{0\})\neq\varnothing$，从而存在 $u\in S,\bar{y}\in F(u),e\in E$，使得 $\bar{y}+e-y\in-C_1\setminus\{0\}$；令 $z=\bar{y}-y$，显然 $z\neq0$，结合 $E=C_1\setminus\{0\}$ 和 C_1 为内部非空的尖闭凸锥，可知

$$\begin{aligned}z=\bar{y}-y\in-C_1\setminus\{0\}-e\subset\\ -C_1\setminus\{0\}-C_1\setminus\{0\}\subset\\ -C_1\setminus\{0\}-C_1\subset\\ -C_1\setminus\{0\}\end{aligned} \tag{15}$$

由 $y\in\lim_n\sup\mathrm{EHMin}F_n(S_n)$ 可知,存在 EHMin $F_{n_k}(S_{n_k})$ 中的序列$\{y_{n_k}\}$,使得 $y_{n_k}\to y$;又由 $y_{n_k}\in$ EHMin$F_{n_k}(S_{n_k})$ 可知,存在 $x_{n_k}\in S_{n_k}$,使得 $y_{n_k}\in F_{n_k}(x_{n_k})$;任取 $\varepsilon\in\mathrm{int}\,C$,由 $y_{n_k}\to y$ 可知,当 k 充分大时,有 $y+\varepsilon\in F_{n_k}(x_{n_k})+C$,从而有 $x_{n_k}\in S_{n_k}\cap F_{n_k}^{y+\varepsilon}$。由命题 2、命题 3 和命题 4 可知,序列$\{x_{n_k}\}$有界且含有收敛子序列。不失一般性,设 $x_{n_k}\to\hat{x}\in S$,因为$(u,\bar{y})\in\mathrm{epi}\,F$,$F_n\xrightarrow{P.K.}F$,所以存在 epi$F_{n_k}$ 中的序列$\{(u_{n_k},v_{n_k})\}$,使得$(u_{n_k},v_{n_k})\to(u,\bar{y})$,从而对任意 $\varepsilon\in\mathrm{int}\,C$,存在 $k_\varepsilon\in N$,使得

$$\bar{y}+\varepsilon\in F_{n_k}(u_{n_k})+C,\ \forall\,n_k\geqslant k_\varepsilon \tag{16}$$

对任意 $k>1$,令 $s_k=\frac{1}{k}\cdot u_{n_k}+\left(1-\frac{1}{k}\right)\cdot x_{n_k}$,由 S_{n_k} 的凸性可知 $s_k\in S_{n_k}$;又由 $S_n\xrightarrow{P.K.}S$,可知 $s_k\to\hat{x}\in S$。现需分两种情况讨论,对任意的 k,若 $x_{n_k}=u_{n_k}$,则

$$\hat{x}=u\ \text{且}\ \bar{y}\in F(u)=F(\hat{x}) \tag{17}$$

若 $x_{n_k}\neq u_{n_k}$,由 F_{n_k} 的严格真拟 C-凸性可知,有 $F_{n_k}(x_{n_k})\subset F_{n_k}(s_k)+\mathrm{int}\,C$ 或 $F_{n_k}(u_{n_k})\subset F_{n_k}(s_k)+\mathrm{int}\,C$ 之一成立。因为 $y_{n_k}\in F_{n_k}(x_{n_k})$ 且 $y_{n_k}\in\mathrm{EHMin}\,F_{n_k}(S_{n_k})$,所以

$$(F_{n_k}(S_{n_k})+E-\{y_{n_k}\})\cap(-C_1\setminus\{0\})=\varnothing \tag{18}$$

又因为 $C\setminus\{0\}\subset\mathrm{int}\,C_1$,所以由式(18),可知$(F_{n_k}(S_{n_k})+E-\{y_{n_k}\})\cap(-\mathrm{int}\,C)=\varnothing$;进一步,有

$$y_{n_k}\notin F_{n_k}(S_{n_k})+E+\mathrm{int}\ C \tag{19}$$

由命题 1 中(1)可知,$E+\mathrm{int}\,C=\mathrm{int}E$,结合 $\mathrm{int}\,C\subset\mathrm{int}\,E$ 和式(19),可知

$$y_{n_k}\notin F_{n_k}(S_{n_k})+\mathrm{int}\ C \tag{20}$$

因此,显然有 $F_{n_k}(x_{n_k})\subset F_{n_k}(s_k)+\mathrm{int}\,C$;否则,若 $F_{n_k}(x_{n_k})\subset F_{n_k}(s_k)+\mathrm{int}\,C$,因为 $y_{n_k}\in F_{n_k}(x_{n_k})$,所以 $y_{n_k}\in F_{n_k}(s_k)+\mathrm{int}\,C$,这与式(20)矛盾,因此仅有 $F_{n_k}(u_{n_k})\subset F_{n_k}(s_k)+C$ 成立。结合式(16)可知,对 $\forall\,k\geqslant k_\varepsilon$,有 $\bar{y}+\varepsilon\in F_{n_k}(s_k)+C$ 成立,从而有$(s_k,\bar{y}+\varepsilon)\in\mathrm{epi}\,F_{n_k}$ 且$(s_k,\bar{y}+\varepsilon)\to(\hat{x},\bar{y}+\varepsilon)$;因为 $F_n\xrightarrow{P.K.}F$,所以$(\hat{x},\bar{y}+\varepsilon)\in\mathrm{epi}\,F$,即 $\bar{y}+\varepsilon\subset F(\hat{x})+C$,由 $\varepsilon\in\mathrm{int}\,C$ 的任意性和 epi F 的闭性可知

$$\bar{y}\in F(\hat{x})+C \tag{21}$$

故由式(17)和式(21),可知 $\bar{y}\in F(\hat{x})+C$ 总成立,即存在 $c\in C$,使得 $\bar{y}-c\in F(\hat{x})$。下面将分以下两种情况进行讨论:

(1) 若 $x=\hat{x}$,则 $y\in F(x)=F(\hat{x})$,显然 $y\neq\bar{y}-c$;否则,若 $y=\bar{y}-c$,则

$$z=\bar{y}-y=c\in C\subset C_1 \tag{22}$$

由式(15)和式(22)可知,$z\in C_1\cap(-C_1\setminus\{0\})$,又因为 C_1 是尖锥,从而有 $C_1\cap(-C_1\setminus\{0\})=\varnothing$,这与事实 $z\in C_1\cap(-C_1\setminus\{0\})$ 相矛盾,因此 $y\neq\bar{y}-c$;由 $F(\hat{x})$ 的 rotund 性可知,对任意 $y\in F(\hat{x})$ 和 $\bar{y}-c\in F(\hat{x})$ 有,$]y,\bar{y}-c[\cap(\partial F(\hat{x}))^c\neq\varnothing$,即$]y,\bar{y}-c[\cap(\mathrm{int}F(\hat{x}))\neq\varnothing$,因此存在 $y'\in\,]y,\bar{y}-c[\cap(\mathrm{int}F(\hat{x}))$,即存在 $\alpha\in(0,1)$,使得 $y'=y+\alpha[(\bar{y}-c)-y]$;因为 $y'\in\mathrm{int}\,F(\hat{x})$,所以可以取合适的 $\varepsilon\in\mathrm{int}\,C$,使得 $y'-\varepsilon\in F(\hat{x})$,而此时,有

$$\begin{aligned}&y'-\varepsilon=y+\alpha[(\bar{y}-c)-y]-\varepsilon=\\&y+\alpha(\bar{y}-y)-\alpha c-\varepsilon\in y-C_1\setminus\{0\}-C-\mathrm{int}\ C\subset\\&y-E-\mathrm{int}\ C\end{aligned}$$

由命题 1 中(1) 可知,$E+\mathrm{int}\,C=\mathrm{int}\,E$,从而有 $y'-\varepsilon\in y-\mathrm{int}\,E$;又由 $y'-\varepsilon\in F(\hat{x})$ 可知,$y'-\varepsilon\in F(\hat{x})\cap(y-\mathrm{int}\,E)$,这与 $y\in\mathrm{EWMin}F(S)$ 相矛盾。

(2) 若 $x\neq\hat{x}$,由 F 的严格真拟 C-凸性可知,对任意 $\lambda\in(0,1)$,有下式之一一定成立,

$$F(x)\subset F(\lambda\hat{x}+(1-\lambda)x)+\mathrm{int}\ C$$

$$F(\hat{x})\subset F(\lambda\hat{x}+(1-\lambda)x)+\mathrm{int}\ C$$

因为 $y\in F(x)$ 且 $y\in\mathrm{EWMin}\,F(S)$,所以 $y\notin F(S)+\mathrm{int}\,E$;又因为 $\mathrm{int}\,C\subset\mathrm{int}\,E$,所以 $y\notin F(S)+\mathrm{int}\,C$,结合 $\hat{x}\in S$,$x\in S$ 和 S 为凸集可知,$\lambda\hat{x}+(1-\lambda)x\in S$,从而有 $y\notin F(\lambda\hat{x}+(1-\lambda)x)+\mathrm{int}\,C$。由此可知,对任意 $\lambda\in(0,1)$,有 $F(\hat{x})\subset F(\lambda\hat{x}+(1-\lambda)x)+\mathrm{int}\,C$;结合式(21)可得,$\bar{y}\in F(\lambda\hat{x}+(1-\lambda)x)+\mathrm{int}\,C$;由 epi F 为闭集,取极限 $\lambda\to0_+$ 可知 $\bar{y}\in F(x)+C$,所以存在 $c'\in C$,使得 $\bar{y}-c'\in F(x)$,与情况(1)类似,显然有 $y\neq\bar{y}-c'$;由 $F(x)$ 的 rotund 性可知,对任意 $y\in F(x)$ 和 $\bar{y}-c\in F(x)$ 有,$]y,\bar{y}-c[\cap(\partial F(x))^c\neq\varnothing$,即$]y,\bar{y}-c[\cap(\mathrm{int}F(x))\neq\varnothing$,因此存在 $y'\in\,]y,\bar{y}-c[\cap(\mathrm{int}F(x))$,即存在 $\alpha\in(0,1)$,使得 $y'=y+\alpha[(\bar{y}-c)-y]$;因为 $y'\in\mathrm{int}\,F(x)$,所以可以取合适的 $\varepsilon\in\mathrm{int}\,C$,使得 $y'-\varepsilon\in F(x)$,而此时,有

$$\begin{aligned}&y'-\varepsilon=y+\alpha[(\bar{y}-c)-y]-\varepsilon=\\&y+\alpha(\bar{y}-y)-\alpha c-\varepsilon\in y-C_1\setminus\{0\}-C-\mathrm{int}\ C\subset\\&y-E-\mathrm{int}\ C\end{aligned}$$

由命题 1 中(1) 可知,$E+\mathrm{int}\,C=\mathrm{int}\,E$,从而有 $y'-\varepsilon\in y-$

$\mathrm{int}\ E$;又由 $y'-\varepsilon\in F(x)$ 可知,有 $y'-\varepsilon\in F(x)\cap(y-\mathrm{int}\ E)$,这与 $y\in \mathrm{EWMin}\ F(S)$ 相矛盾。

综上由(1)和(2)可知,$y\in \mathrm{EHMin}\ F(S)$,$\lim_n \sup \mathrm{EHMin}\ F_n(S_n)\subset \mathrm{EHMin}\ F(S)$。

其次,建立扰动真拟 C-凸集值优化问题 E-Henig 有效解集的稳定性结果。

定理 3 设 C_1 是满足 $C\backslash\{0\}\subset \mathrm{int}\ C_1$ 的尖闭凸锥,$S,S_n\subset R^m$ 为闭凸集合,满足 $S_n\xrightarrow{P.K.}S$;设 $F:S\to 2^{R^l}$ 和 $F_n:S_n\to 2^{R^l}$ 为上半连续严格真拟 C-凸的紧值集值映射,且 $F_n\xrightarrow{P.K.}F$,设 $\mathrm{int}\ C\subset \mathrm{int}\ E$,$E=C_1\backslash\{0\}$,$\mathrm{epi}\ F$ 为闭集,F 在 S 上为 rotund 值映射,若存在 $\alpha\in R^l$,$F^\alpha\neq\varnothing$,使得 $0^+(F^\alpha)=\{0\}$,则$\lim_n \sup \mathrm{EHEff}\ (S_n,F_n)\subset \mathrm{EHEff}\ (S,F)$。

证 明 任取 $x\in \lim_n \sup \mathrm{EHEff}\ (S_n,F_n)$,则存在 $\mathrm{EHEff}\ (S_{n_k},F_{n_k})$ 中的序列$\{x_k\}$,使得 $x_k\to x$,显然必有 $x\in \mathrm{EHEff}(S,F)$。用反证法:假设 $x\notin \mathrm{EHEff}(S,F)$,则不存在 $y\in F(x)$,满足 $y\in \mathrm{EHMin}F(x)$,即对任意满足 $C\backslash\{0\}\subset \mathrm{int}\ C_1$ 的尖闭凸锥 C_1,都有$(F(S)+E-\{y\})\cap(-C_1\backslash\{0\})\neq\varnothing$,从而存在 $u\in S$,$\bar{y}\in F(u)$,$e\in E$,使得 $\bar{y}+e-y\in -C_1\backslash\{0\}$;因为 $e\in E$,从而有

$$\bar{y}-y\in -C_1\backslash\{0\} \tag{23}$$

显然,$\bar{y}-y\neq 0$;由 $\bar{y}\in F(u)$ 和 $F_n\xrightarrow{P.K.}F$ 可知,存在 $\mathrm{epi}\ F_{n_k}$ 中的序列$\{(u_k,\bar{y}_k)\}$,使得$(u_k,\bar{y}_k)\to(u,\bar{y})$;由 $\bar{y}_k\to\bar{y}$ 可得,任取 $\varepsilon\in \mathrm{int}\ C$,当 k 充分大时,有

$$\bar{y}+\varepsilon\in \bar{y}_k+C \tag{24}$$

因为$(u_k,\bar{y}_k)\in \mathrm{epi}\ F_{n_k}$,所以

$$\bar{y}_k\in F_{n_k}(u_k)+C \tag{25}$$

由式(24)和式(25)可得,当 k 充分大时,有

$$\bar{y}+\varepsilon\in F_{n_k}(u_k)+C \tag{26}$$

令 $v_k=\dfrac{1}{k}u_k+\left(1-\dfrac{1}{k}\right)x_k$,则由 S_{n_k} 的凸性可知,$v_k\in S_{n_k}$。因为 $S_n\xrightarrow{P.K.}S$,所以 $v_k\to x\in S$,由 F_{n_k} 的严格真拟 C-凸性可知,有

$$F_{n_k}(x_k)\subset F_{n_k}(v_k)+\mathrm{int}\ C \tag{27}$$

$$F_{n_k}(u_k)\subset F_{n_k}(v_k)+\mathrm{int}\ C \tag{28}$$

因为 $x_k\in \mathrm{EHEff}\ (S_{n_k},F_{n_k})$,所以存在 $y_k\in F_{n_k}(x_k)$,使得 $y_k\in \mathrm{EHMin}\ F_{n_k}(S_{n_k})$;又因为 $\mathrm{EHMin}\ F(S)\subset \mathrm{EWMin}\ F(S)$,所以有 $y_k\in \mathrm{EWMin}\ F(S)$,显然式(27)不成立,式(28)成立;否则,若式(27)成立,则有 $y_k\in F_{n_k}(v_k)+\mathrm{int}\ C$。因为 $\mathrm{int}\ C\subset \mathrm{int}\ E$,所以 $y_k\in F_{n_k}(v_k)+\mathrm{int}\ E$,这与 $y_k\in \mathrm{EWMin}F(S)$ 矛盾。由式(26)和式(28)可得,当 k 充分大时,有 $\bar{y}+\varepsilon\in F_{n_k}(v_k)+\mathrm{int}\ C$,因此当 k 充分大时,有$(v_k,\bar{y}+\varepsilon)\in \mathrm{epi}\ F_{n_k}$;结合 $F_n\xrightarrow{P.K.}F$ 和$(v_k,\bar{y}+\varepsilon)\to(x,\bar{y}+\varepsilon)$可知,$(x,\bar{y}+\varepsilon)\in \mathrm{epi}\ F$,从而有 $\bar{y}+\varepsilon\in F(x)+C$;因为 $\mathrm{epi}\ F$ 为闭集,所以 $\bar{y}\in F(x)+C$,从而存在 $c\in C$,使得 $\bar{y}-c\in F(x)$,显然 $y\neq\bar{y}-c$;否则,若 $y=\bar{y}-c$,则

$$\bar{y}-y=c\in C\subset C_1 \tag{29}$$

因此,由式(23)和式(29)可知,$\bar{y}-y\in C_1\cap(-C_1\backslash\{0\})$,因为 C_1 是尖锥,所以 $C_1\cap(-C_1\backslash\{0\})=\varnothing$。这与事实 $\bar{y}-y\in C_1\cap(-C_1\backslash\{0\})$ 相矛盾,因此 $y\neq\bar{y}-c$。由 $F(x)$ 的 rotund 性可知,对任意 $y\in F(x)$ 和 $\bar{y}-c\in F(x)$,有 $]y,\bar{y}-c[\ \cap(\partial F(x))^c\neq\varnothing$,即 $]y,\bar{y}-c[\ \cap(\mathrm{int}F(x))\neq\varnothing$,因此存在 $y'\in\ ]y,\bar{y}-c[\ \cap(\mathrm{int}F(x))$,即存在 $\alpha\in(0,1)$,使得 $y'=y+\alpha[(\bar{y}-c)-y]$。因为 $y'\in \mathrm{int}\ F(x)$,所以可以取合适的 $\varepsilon\in \mathrm{int}\ C$,使得 $y'-\varepsilon\in F(x)$;而此时,有

$$\begin{aligned}y'-\varepsilon&=y+\alpha[(\bar{y}-c)-y]-\varepsilon=\\&y+\alpha(\bar{y}-y)-\alpha c-\varepsilon\in y-C_1\backslash\{0\}-C-\mathrm{int}\ C\subset\\&y-E-\mathrm{int}\ C\end{aligned}$$

由命题 1 中(1)可知,$E+\mathrm{int}\ C=\mathrm{int}\ E$,从而有 $y'-\varepsilon\in y-\mathrm{int}\ E$;又由 $y'-\varepsilon\in F(x)$ 可知,有 $y'-\varepsilon\in F(x)\cap(y-\mathrm{int}\ E)$,因为 $\mathrm{EHMin}\ F(S)\subset \mathrm{EWMin}\ F(S)$,所以 $y\in \mathrm{EWMin}\ F(S)$,这与 $y'-\varepsilon\in F(x)\cap(y-\mathrm{int}\ E)$ 相矛盾。因此 $x\in \mathrm{EHEff}(S,F)$。

4 结 论

有关集值优化问题“解”的研究一直是最优化理论与方法的研究热点之一,关于集值优化问题 E-Henig 有效解的性质和稳定性研究较少。本文利用 Painlevé-Kuratowski 收敛性,建立集值映射水平集的闭凸性、有界性及回收锥的相关性质,然后借助所获得的集值映射水平集的闭凸性、有界性及回收锥的性质,在集值优化问题目标映射和约束条件均扰动的情况下,分别建立严格真拟 C-凸集值优化问题 E-弱有效点集、E-Henig 有效点集和 E-Henig 有效解的稳定性结果。该结论大

大完善了集值优化问题 Henig 有效解理论,并为数值计算的稳定性分析提供了方法和技巧。

参考文献(References):

[1] HUERGA L, JIMÉNEZ B, NOVO V. New notions of proper efficiency in set optimization with the set criterion[J]. J Optim Theory Appl, 2022, 195(3): 878—902.

[2] XU Y H. Optimality conditions for strictly efficient solutions in set-valued optimization[J]. Acta Math Appl Sin Engl Ser, 2020, 36(4): 891—901.

[3] 林佩静. 集值优化问题的 E-Henig 真有效解[D]. 杭州: 浙江师范大学, 2017.
LIN Pei-jing. E-Henig proper efficient solution for set-valued optimization problems[D]. Hangzhou: Zhejiang Normal University, 2017.

[4] AMAHROQ T, OUSSARHAN A. Existence of pseudo-relative sharp minimizers in set-valued optimization[J]. Appl Math Optim, 2021, 84(3): 2969—2984.

[5] PENG Z H, WAN Z P, GUO Y J. New higher-order weak lower inner epiderivatives and application to Karush-Kuhn-Tucker necessary optimality conditions in set-valued optimization[J]. Japan J Indust Appl Math, 2020, 37(3): 851—866.

[6] SOM K, VETRIVEL V. A note on pointwise well-posedness of set-valued optimization problems[J]. J Optim Theory Appl, 2022, 192(2): 628—647.

[7] GUTIÉRREZ C, JIMÉNEZ B, NOVO V. Improvement sets and vector optimization[J]. European J Oper Res, 2012, 223(2): 304—311.

[8] ZHAO K Q, YANG X M. E-Benson proper efficiency in vector optimization [J]. Optimi-zation, 2015, 64 (8): 739—752.

[9] 徐义红, 张霞. 关于"集值优化问题 Henig 真有效解的最优性条件"一文的注记[J]. 应用数学学报, 2016, 39(1): 94—99.
XU Yi-hong, ZHANG Xia. A remark on "the optimizaition condition of Henig proper efficient solution for set-valued optimization problem" [J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2016, 39(01): 94—99.

[10] 吴昌耀, 陈剑尘. 带约束条件集值优化问题近似 Henig 有效解集的连通性[J]. 数学的实践与认识, 2021, 51(5): 221—227.
WU Chang-yao, CHEN Jian-chen. Connectedness of approximate Henig efficient solution sets for set-valued optimization problems with constraints[J]. Journal of Mathematics in Practice and Theory, 2021, 51(5): 221—227.

[11] 仇秋生, 王定畅, 张莹. 集值优化问题近似 Henig 有效解集的连通性[J]. 应用数学学报, 2017, 40(1): 149—160.
QIU Qiu-sheng, WANG Ding-chang, ZHANG Ying. Connectedness of approximate Henig efficient solution set for set-valued optimization problems [J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2017, 40(1): 149—160.

[12] 刘芳, 孟旭东, 龚循华. 向量拟均衡问题的 Henig 近似对偶[J]. 南昌大学学报(理科版), 2016, 40(5): 409—412.
LIU Fang, MENG Xu-dong, GONG Xun-hua. Henig approximate duality for set-vector quasi-equilibrium problems[J]. Journal of Nanchang University (Natural Science), 2016, 40(5): 409—412.

[13] 王海英. 一类集值优化的 Henig 真有效解的对偶性与鞍点[J]. 安顺学院学报, 2016, 18(4): 119—121.
WANG Hai-ying. Duality and saddle-point theorem of Henig proper efficiency for a set-valued optimization problem [J]. Journal of Anshun College, 2016, 18(4): 119—121.

[14] LUCCHETTI R E, MIGLIERINA E. Stability for convex vector optimization problems [J]. Optimization, 2004, 53 (5 - 6): 517—528.

[15] LI X B, PENG Z Y, LIN Z. Convergence results for Henig proper efficient solution sets of vector optimization problems[J]. Numerical Functional Analysis and Optimization, 2014, 35(11): 1419—1434.

[16] LI X B, WANG Q L, LIN Z. Stability of set-valued optimization problems with naturally quasi-functions [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2016, 168(3): 850—863.

[17] ZHAO K Q, YANG X M, PENG J W. Weak e-optimal solution in vector optimization [J]. Taiwanese Journal of Mathematics, 2013, 17(4): 1287—1302.

[18] KUROIWA D. Convexity for set-valued maps [J]. Applied Mathematics Letters, 1996, 9(2): 97—101.

[19] AUBIN J P, EKLAND I. Applied nonlinear analysis [D]. New York: Wiley, 1984.

[20] HOLMES R B. Geometric functional analysis and its applications[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1975.

责任编辑:李翠薇