

## 基于 Vague 集模糊熵和 D-S 证据理论的多属性群决策方法

邹 圆<sup>1</sup>, 杨道理<sup>2</sup>, 王立威<sup>3</sup>

1. 重庆工商大学 经济学院, 重庆 400067
2. 重庆工商大学 管理科学与工程学院, 重庆 400067
3. 六盘水师范学院 物理与电气工程学院, 贵州 六盘水 553004

**摘要:**针对方案属性值为 Vague 值且考虑专家评分可信度的多属性群决策问题,提出了一种基于 Vague 集模糊熵和 D-S 证据理论的多属性群决策分析方法。该方法充分考虑各专家给出的 Vague 值评价信息中所蕴含的模糊性与不确定性,借助模糊熵来获取与专家自身意见相匹配的评分可信度序列,其完全由数据驱动,弥补了传统方法对可信度主观统一设定的不足。首先,基于各专家原始决策矩阵获得各属性下的 Vague 集模糊熵,以构建与专家集相对应的评分可信度矩阵;其次,对经可信度调整后的各专家决策矩阵使用证据合成进行信息集结,利用 Vague 集记分函数并经可信度调整得到属性权重;最后,将专家群体集结信息经属性权重加权修正后算出各方案最终的 Vague 评价值,进而使用记分函数获得各方案综合得分,筛选出最优方案。利用证据理论在不确定信息融合方面的优势和 Vague 集记分函数的信息转化功能,通过证据合成和记分函数集结专家群体的评价信息,所得出的决策结果更加客观、合理,并通过一个具体算例验证了所提方法的可行性和有效性。

**关键词:** Vague 集;模糊熵;证据理论;多属性群决策;记分函数

**中图分类号:** C934 **文献标识码:** A **doi:** 10.16055/j.issn.1672-058X.2023.0003.011

### A Multi-attribute Group Decision Making Method Based on Fuzzy Entropy of Vague Sets and D-S Evidence Theory

ZOU Yuan<sup>1</sup>, YANG Daoli<sup>2</sup>, WANG Liwei<sup>3</sup>

1. School of Economics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China
2. School of Management Science and Engineering, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China
3. School of Physics and Electrical Engineering, Liupanshui Normal University, Guizhou Liupanshui 553004, China

**Abstract:** Aiming at the multi-attribute group decision-making problems with Vague value and considering the reliability of expert rating, a multi-attribute group decision-making analysis method based on Vague set fuzzy entropy and D-S evidence theory was proposed. The method took into full account the fuzziness and uncertainty embedded in the Vague value evaluating information given by various experts, and used fuzzy entropy to obtain the scoring credibility sequence matching experts' opinions. It is completely data-driven, which makes up for the deficiency of the traditional method in the subjective unified setting of credibility. Firstly, based on the original decision matrix of each expert, the fuzzy entropy of Vague set under each attribute was obtained to construct the scoring credibility matrix corresponding to the expert set. Secondly, the information of each expert decision matrix adjusted by credibility was gathered through evidence synthesis,

**收稿日期:** 2022-04-25 **修回日期:** 2022-06-01 **文章编号:** 1672-058X(2023)03-0078-07

**基金项目:** 重庆工商大学高层次人才科研启动项目(2153014);重庆市社会科学规划博士项目(2018BS80).

**作者简介:** 邹圆(1986—),男,湖南常德人,讲师,博士,从事经济统计分析 with 预测研究.

**引用格式:** 邹圆,杨道理,王立威.基于 Vague 集模糊熵和 D-S 证据理论的多属性群决策方法[J].重庆工商大学学报(自然科学版),2023,40(3):78—84.

ZOU Yuan, YANG Daoli, WANG Liwei. A multi-attribute group decision making method based on fuzzy entropy of vague sets and D-S evidence theory[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition), 2023, 40(3): 78—84.

and the attribute weight was obtained by using score function of Vague sets and credibility adjustment. Finally, the final Vague evaluation value of each scheme was calculated by modifying the aggregation information of expert group by attribute weight, and then the comprehensive score of each scheme was obtained by using the score function to screen the optimal scheme. By using the advantages of evidence theory in uncertain information fusion and the information transformation function of score function of Vague sets, the evaluation information of expert group was gathered through evidence synthesis and score function of Vague sets, the decision-making results were more objective and reasonable, and the feasibility and effectiveness of the proposed method were verified by a specific numerical example.

**Keywords:** Vague sets; fuzzy entropy; evidence theory; multi-attribute group decision making; score function

## 1 引言

多属性群决策指多人共同参与决策分析,在各属性下对方案进行评估,通过将不同决策者提供的带有各自偏好的决策信息进行集结,据此对备选方案排序并选优的过程<sup>[1]</sup>。由于经济社会等领域中现实决策问题的复杂性、人们自身知识的有限性及认识事物的局限性,专家们往往难以给出精确的评估值而使决策问题通常带有不确定特征。Gau 等<sup>[2]</sup>于 1993 年首次提出 Vague 集概念,其特点在于同时包含了支持隶属度、反对隶属度和未知度 3 方面信息;Mishra 等<sup>[3]</sup>认为相比于单一隶属度的 Zadeh 模糊集,Vague 集对事物的刻画更为细腻,可视为 Zadeh 模糊集概念的推广。以 Vague 值表征的专家评价信息可很好契合人类思维“亦此亦彼、非此非彼”的模糊特性,因而引起了研究者的极大关注并在不确定多属性群决策问题中获得了广泛的应用<sup>[4-6]</sup>。

对 Vague 多属性群决策的现有研究主要聚焦于两个方面:一是方案排序及选优。Liu<sup>[7]</sup>、Zhou<sup>[8]</sup>、Gao<sup>[9]</sup>等将 TOPSIS 方法引入 Vague 集,通过算出各备选方案与正负理想解之间的差距以对方案进行排序;Wang<sup>[10]</sup>、Guo<sup>[11]</sup>、Lin<sup>[12]</sup>、许昌林等<sup>[13]</sup>各自定义 Vague 集记分函数,将 Vague 值转化为精确数,从而计算各方案的得分,分数越高表示方案越优;Gui<sup>[14]</sup>提出了基于 Vague 集的灰色关联分析排序方法。二是个体决策信息集结到群体判断。一些学者通过定义 Vague 集的基本运算诸如实数与 Vague 值乘积<sup>[15]</sup>、Vague 值间的交并运算<sup>[16]</sup>、Vague 值间的乘积<sup>[17]</sup>、Vague 集间的相似度<sup>[18]</sup>等将评价信息集结,获得方案的最终评价价值。上述操作均未涉及 Vague 集未知度的合理分配,融合结果存在不同程度的偏差。Wang<sup>[19]</sup>将 Vague 值转化为 Fuzzy 值后进行信息融合以筛选方案,但在转换时易造成信息损失。后续,Wang 等<sup>[20]</sup>定义了 Vague 集的极小和极大信心度,并利用线性规划模型求出群体最优综合信心度,以此作为唯一依据进行决策,其缺陷在于未考虑其他影响因素。鉴于传统方法对 Vague 信息集

结时未知度分配不合理以及将 Vague 信息转化为其他类型信息处理所导致的信息损失问题,崔春生等<sup>[21]</sup>提出了基于证据理论的 Vague 多属性群决策方法。证据理论作为一种被广泛运用的不确定信息处理方法,在信息融合中不需要先验概率<sup>[22]</sup>,且在证据合成过程中可对未知度进行重新分配,在不确定信息的表达与融合上具有优势,有效地解决了 Vague 多属性群决策的信息集结难题。

通过对现有文献的研究梳理发现,学者们往往关注 Vague 信息转化和信息集结,较少探讨 Vague 多属性群决策问题中的专家评分可信度获取规则,通常是直接先验给定可信度点值,这缺乏客观依据,也未考虑专家在不同属性下评分可信度的差异,影响评价结果的内在一致性。模糊熵是对 Vague 信息模糊不确定性的客观度量,熵值越大,表示模糊不确定性越高,专家评价信息的可信度越低,可用来客观反映专家在决策中的评分可信性。本文在前人工作的基础上,将模糊熵的思想引入 Vague 决策环境中,结合证据理论和 Vague 集记分函数,提出了一种新的完全由数据驱动的 Vague 多属性群决策方法。该方法基于专家群体的原始评价信息,利用模糊熵获取各专家在不同属性下的评分可信度,从而构建起专家评价信息与其可信度之间的一一映射关系,降低了由于可信度赋值的主观性对最终决策结果产生的影响。引入证据理论来解决 Vague 多属性群决策的信息集结问题,以及利用记分函数进行 Vague 值转化及排序,最后以一个决策实例验证了该方法的可行性和有效性。

## 2 问题描述及方法基础

### 2.1 问题描述

假设决策方案集为  $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ ; 方案的属性集为  $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ ; 决策的专家集为  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_L\}$ ; 关于属性  $C_j$ , 专家  $e_k$  对方案  $A_i$  给出的 Vague 评价值为  $d_{ij}^k$ , 其中  $d_{ij}^k = [t_{ij}^k, 1 - f_{ij}^k]$ ;  $t_{ij}^k, f_{ij}^k, \pi_{ij}^k = (1 - f_{ij}^k) - t_{ij}^k$  分别表示支持度、反对度与未知度; 专家评分可信度分别记为  $r_1, r_2, \dots, r_L$ ; 集合所有专家的意见可构建原始决

策矩阵  $D^k (k=1, 2, \dots, L)$  为

$$D^k = [d_{ij}^k]_{m \times n} = \begin{bmatrix} d_{11}^k & \cdots & d_{1n}^k \\ \vdots & & \vdots \\ d_{m1}^k & \cdots & d_{mn}^k \end{bmatrix} \quad (1)$$

考虑各属性对决策方案的重要性,假定专家  $e_k$  对属性  $C_j$  给出的 Vague 权重值为  $w_{kj}$ , 其中  $w_{kj} = [t_{kj}, 1 - f_{kj}]$ ,  $t_{kj}, f_{kj}, \pi_{kj} = (1 - f_{kj}) - t_{kj}$  分别表示重要度、不重要度与对属性影响的未知度,则可构建属性权重矩阵  $W$  为

$$W = [w_{kj}]_{L \times n} = \begin{bmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{L1} & \cdots & w_{Ln} \end{bmatrix} \quad (2)$$

基于专家评分可信度、决策矩阵与属性权重矩阵对各方案进行集成评价,最终筛选出最优决策方案。本文主要解决的问题在于:传统方法一般事先给定专家评分可信度,往往带有一定的主观性,且对所有属性均相同,缺乏客观依据与针对性,并影响方案的最终评价结果。而本质上造成专家评分可信度不一的来源在于其在 Vague 决策过程中的未知性、不确定性与模糊性。模糊熵作为上述特征的度量工具,可据此来计算评分可信度。首先,通过计算各专家 Vague 决策矩阵中的模糊熵获得其在各属性上的评分可信度;其次,基于 D-S 证据理论对各专家关于每一个方案的 Vague 评价值进行信息集结;再次,确定各属性权重并计算决策方案的最终评价值;最后根据评价值进行方案的排序与择优。

## 2.2 Vague 集模糊熵

Vague 集的模糊熵通常被用来度量 Vague 集的未知性、不确定性以及二者交叉时形成的模糊性。其公理化要求为<sup>[23]</sup>

**定义 1** 假设  $A$  是论域  $U$  上的一个 Vague 集,记为  $A(x) = [t_A(x), 1 - f_A(x)]$ , 其中  $t_A(x), f_A(x)$  及  $\pi_A(x) = 1 - t_A(x) - f_A(x)$  分别为  $x$  在  $A$  中的支持度、反对度和未知度。称函数  $VE: U \rightarrow [0, 1]$  为 Vague 集  $A$  的模糊熵,若其满足如下条件:

(1)  $VE(A) = 0$  当且仅当对  $\forall x \in U, A(x) = [0, 0]$  或  $[1, 1]$ ;

(2)  $VE(A) = 1$  当且仅当对  $\forall x \in U, t_A(x) = f_A(x)$ ;

(3) 若  $B$  是初始论域  $U$  上的一个 Vague 集,令  $B(x) = [t_B(x), 1 - f_B(x)]$ ,  $\pi_B = 1 - t_B - f_B$ , 当满足

$$\left| \frac{t_A(x) - f_A(x)}{2 + \pi_A(x)} \right| \leq \left| \frac{t_B(x) - f_B(x)}{2 + \pi_B(x)} \right| \quad (\forall x \in U) \text{ 时, 则有}$$

$VE(A) \geq VE(B)$ ;

(4) 若  $A^c$  是  $A$  的补集,  $A^c(x) = [f_A(x), 1 - t_A(x)]$ ,

则  $VE(A) = VE(A^c)$ 。

基于上述公理化定义,杨永伟<sup>[23]</sup>、范平<sup>[24]</sup>等分别独立提出了 Vague 集上模糊熵的具体计算公式。

**定义 2** 设论域  $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ,  $A$  是  $U$  上的一个 Vague 集,  $A(x) = [t_A(x), 1 - f_A(x)]$ 。

(1) 假定未知度  $\pi_A(x_i) = 1 - t_A(x_i) - f_A(x_i)$ , 且  $y_A(x_i) = \frac{t_A(x_i) - f_A(x_i)}{2 + \pi_A(x_i)}$ , 则 Vague 集  $A$  的模糊熵定义为<sup>[23]</sup>

$$VE(A) = - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [y_A(x_i) \log_2 y_A(x_i) + (1 - y_A(x_i)) \log_2 (1 - y_A(x_i))] \quad (3)$$

(2) 令  $\pi_A(x_i) = 1 - t_A(x_i) - f_A(x_i)$ , Vague 集  $A$  的模糊熵定义为<sup>[24]</sup>

$$VE(A) = \frac{\sum_{i=1}^n \pi_A(x_i) + n - \sum_{i=1}^n |t_A(x_i) - f_A(x_i)|}{2n} + \frac{\sum_{i=1}^n \pi_A(x_i) |t_A(x_i) - f_A(x_i)|}{2n} \quad (4)$$

上述关于模糊熵的两个计算公式均体现了 Vague 信息的未知度、不确定度及二者交叉的模糊度。当  $A$  变成 Fuzzy 集时,前者退化成 Fuzzy 集上的模糊熵,因而与 Fuzzy 集上的模糊熵定义相容;后者按照 Vague 集模糊熵的度量来源直接表示,其测算过程符合人们直觉。

## 2.3 D-S 证据理论

D-S 证据理论通过定义信任函数,并以 Dempster 合成规则为核心来综合不同数据源或专家群体的数据或知识,勿需先验概率信息,在证据合成过程中可对未知度进行重新分配,表征和融合不确定性信息更为有效直观。在信息融合方面的突出优势使其在专家系统、情报分析、多属性决策分析等领域均获得了广泛应用。D-S 证据理论的相关基本概念定义如下:

**定义 3** 将不确定性问题的所有可能结果组成的集合记为识别框架  $\Theta$ , 在识别框架  $\Theta$  上定义集函数  $m: 2^\Theta \rightarrow [0, 1]$ , 称为 mass 函数, 满足  $m(\emptyset) = 0$  且  $\sum_{A \subseteq \Theta} m(A) = 1$ , 则称  $m(A)$  为  $A$  的基本概率分配函数, 使得  $m(A) > 0$  的  $A$  称为焦元, 其中  $\emptyset$  是空集,  $2^\Theta$  为  $\Theta$  的幂集。

**定义 4** 在识别框架  $\Theta$  上, 假定基本概率分配函数  $m: 2^\Theta \rightarrow [0, 1]$ , 有

(1) 在  $\Theta$  上基于  $m$  的信任函数  $Bel: 2^\Theta \rightarrow [0, 1]$  定义为  $Bel(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B)$ ;

(2) 在  $\Theta$  上基于  $m$  的似然函数  $Pl: 2^\Theta \rightarrow [0, 1]$  定义为  $Pl(A) = \sum_{B \cap A \neq \emptyset} m(B)$ 。

**定义 5** 对于  $\forall A \subseteq \Theta$ , 定义识别框架  $\Theta$  上的有限个 mass 函数  $m_1, m_2, \dots, m_k$ , 焦元(证据)分别为  $A_1, A_2, \dots, A_k$ , 则 Dempster 证据合成规则为

$$m(A) = (m_1 \oplus m_2 \oplus \dots \oplus m_k)(A) = \frac{1}{1 - K_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k = A}} \sum_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k = A} m_1(A_1) \cdot m_2(A_2) \cdot \dots \cdot m_k(A_k) \quad (5)$$

其中,  $K = \sum_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k = \varnothing} m_1(A_1) \cdot m_2(A_2) \cdot \dots \cdot m_k(A_k)$  称作冲突系数, 反映了证据间的冲突程度。

### 3 模型设计

#### 3.1 评价信息处理

专家评分可信度受制于其在对目标方案的 Vague 决策中表现出来的未知性、不确定性及二者兼具时的模糊性影响, 可由模糊熵来客观度量。

(1) 专家可信度确定。对于专家  $e_k$  的决策矩阵  $D^k$ , 运用上述模糊熵公式计算各属性  $C_j$  对应的 Vague 集的模糊熵  $VE_j^k$ 。由于熵是对系统状态不确定性的度量, 模糊熵值越大, 所表征的未知性、不确定性与模糊性越高, 且  $VE$  取值在  $[0, 1]$  范围内。专家  $e_k$  在属性  $C_j$  上的评分可信度记为  $r_j^k$ , 可设定为  $r_j^k = 1 - VE_j^k$ , 根据熵的性质可以判断, 属性的模糊熵值越高, 其在该属性下的评分可信度越低。专家  $e_k$  关于属性集  $C$  的评分可信度序列  $r^k = (r_1^k, r_2^k, \dots, r_n^k)$ , 从而与专家集  $E$  对应的评分可信度矩阵  $r$  为

$$r = \begin{bmatrix} r_1^1 & \dots & r_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ r_1^L & \dots & r_n^L \end{bmatrix} \quad (6)$$

(2) 决策矩阵修正。根据专家决策矩阵  $D^k (k=1, 2, \dots, L)$  与评分可信度矩阵  $r$ , 对专家的评价信息进行修正后获得新的决策矩阵  $\hat{D}^k (k=1, 2, \dots, L)$  为

$$\hat{D}^k = [\hat{d}_{ij}^k]_{m \times n} = \begin{bmatrix} \hat{d}_{11}^k & \dots & \hat{d}_{1n}^k \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{d}_{m1}^k & \dots & \hat{d}_{mn}^k \end{bmatrix} \quad (7)$$

在上述矩阵中, 元素  $\hat{d}_{ij}^k = [t_{ij}^k, 1 - f_{ij}^k]$  是一个经专家  $e_k$  的评分可信度  $r^k$  修正后关于方案  $A_i$  的 Vague 评价价值, 其中  $t_{ij}^k = r_j^k \times t_{ij}^k, f_{ij}^k = r_j^k \times f_{ij}^k$ 。

(3) 属性权重计算。通常采用记分函数表示决策方案对决策者要求的满足程度。对于方案  $A_i$ , 根据评价函数  $E$ , 获得  $A_i$  的 Vague 评价价值  $E(A_i) = [t_{A_i}, 1 - f_{A_i}]$ , 将记分函数定义如下:

$$S(E(A_i)) = \frac{t_{A_i} + t_{A_i} \times (1 - t_{A_i} - f_{A_i})}{1 - (t_{A_i} - f_{A_i})} \quad (8)$$

基于上述记分函数计算属性权重矩阵  $W$  中 Vague 权重的得分, 获得属性权重得分矩阵:

$$\hat{W} = [\hat{w}_{kj}]_{L \times n} = \begin{bmatrix} \hat{w}_{11} & \dots & \hat{w}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{w}_{L1} & \dots & \hat{w}_{Ln} \end{bmatrix} \quad (9)$$

结合考虑专家的评分可信度, 在各个属性上将所有专家的意见进行加权综合, 计算出各个属性的综合权重值, 并构建属性综合权重序列  $W^*$ :

$$W^* = [w_j^*]_{1 \times n} = [w_1^*, \dots, w_n^*] \quad (10)$$

其中,  $w_j^* = \frac{\sum_{k=1}^L r_j^k \hat{w}_{kj}}{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^L r_j^k \hat{w}_{kj}}$  为属性  $C_j (j=1, 2, \dots, n)$  的权重。

#### 3.2 决策矩阵证据信息集结

在 Vague 多属性群决策中, 对于每个决策方案, 在各属性下均有多位专家给出的 Vague 值评价信息, 利用证据理论将各专家经修正后的 Vague 评价价值进行信息集结, 获得每个方案在各属性下的综合 Vague 评价价值。其流程如下:

设定识别框架  $\Theta = \{ \text{Support} = \text{支持}, \text{Opposite} = \text{反对}, \text{Unknown} = \text{未知} \}$ , 简记为  $\Theta = \{ S, O, U \}$ , 对于专家  $e_k$ , 其基本概率分配函数为  $m_{ij}^k(S) = \hat{t}_{ij}^k, m_{ij}^k(O) = \hat{f}_{ij}^k, m_{ij}^k(U) = (1 - \hat{f}_{ij}^k) - \hat{t}_{ij}^k$ 。其中  $m_{ij}^k(S), m_{ij}^k(O)$  与  $m_{ij}^k(U)$  分别表示在属性  $C_j$  下, 专家  $e_k$  对决策方案  $A_i$  的支持度、反对度及未知度。基于上述证据合成式(5), 将专家群体的评价信息集结, 计算出决策方案  $A_i$  在属性  $C_j$  下的 Vague 专家群体评价价值, 因此获得群体决策矩阵  $D$ :

$$D = [d_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} d_{11} & \dots & d_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{m1} & \dots & d_{mn} \end{bmatrix} \quad (11)$$

其中,  $d_{ij} = [t_{ij}, 1 - f_{ij}]$ , 并满足:

$$t_{ij} = m_{ij}(S) = \frac{1}{1 - K_{A_1 \cap \dots \cap A_L = S}} \sum m_{ij}^1(A_1) \cdot \dots \cdot m_{ij}^L(A_L) \quad (12)$$

$$f_{ij} = m_{ij}(O) = \frac{1}{1 - K_{A_1 \cap \dots \cap A_L = O}} \sum m_{ij}^1(A_1) \cdot \dots \cdot m_{ij}^L(A_L) \quad (13)$$

$$K = \sum_{A_1 \cap \dots \cap A_L = \varnothing} m_{ij}^1(A_1) \cdot \dots \cdot m_{ij}^L(A_L) \quad (14)$$

### 3.3 确定最优决策方案

在属性集  $C$  下专家群体对方案  $A_i$  的综合评价值为 Vague 值序列  $d_{i1}, d_{i2}, \dots, d_{in}$ ; 利用属性权重序列  $W^* = [w_1^*, \dots, w_n^*]$ , 计算各个方案的 Vague 加权平均评价价值  $\bar{d}_i = [\bar{t}_i, 1 - \bar{f}_i]$ , 其中  $\bar{t}_i = \sum_{j=1}^n w_j^* \cdot t_{ij}, \bar{f}_i = \sum_{j=1}^n w_j^* \cdot f_{ij}$ ; 再结合 Vague 值的记分函数式(8), 集成获得决策方案  $A_i$  的综合评价得分为  $S(\bar{d}_i)$ 。分数越高, 表明方案越优, 得分最高的方案即是最优决策方案。

### 3.4 算法步骤

根据上述分析, 给出基于 Vague 集模糊熵和 D-S 证据理论的多属性群决策方法。具体步骤如下:

**步骤 1** 将各专家给出的方案的属性评价价值以及属性权重值用 Vague 值表示, 构建决策矩阵与属性权重矩阵。

**步骤 2** 根据决策矩阵计算各专家在各属性下的 Vague 集模糊熵, 得到每位专家的评分可信度序列, 并以此修正各专家的决策矩阵。

**步骤 3** 针对每个方案, 利用证据合成式(12)一式(14), 对各专家在各属性下经修正后的每一方案 Vague 评价价值进行信息集结, 相应构建得到专家群体决策矩阵。

**步骤 4** 针对属性权重矩阵, 使用记分函数式(8)计算属性权重得分矩阵, 并利用各专家的评分可信度序列进行调整, 获得属性综合权重序列。

**步骤 5** 基于专家群体决策矩阵与属性综合权重序列, 计算各方案的加权平均 Vague 评价价值, 再利用记分函数式(8)算出各方案的综合得分。其值越大, 所对应的决策方案越优。

综上所述, 进行多属性群决策的具体流程如图 1 所示。

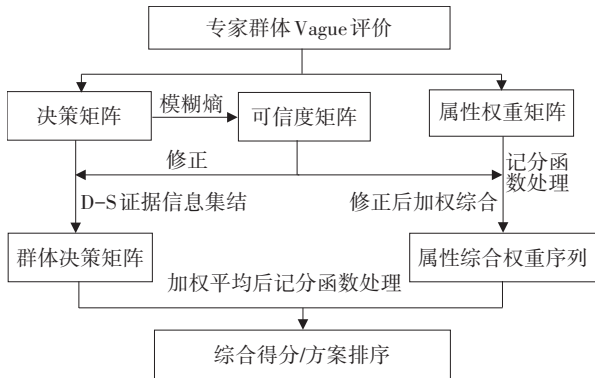


图 1 Vague 值多属性群决策算法流程图

Fig. 1 The algorithm flow chart of Vague valued multi-attribute group decision making

## 4 算例分析

为了解释上述算法, 并与崔春生等<sup>[21]</sup>提出的基于证据理论与 Vague 集的多属性群决策方法进行比较分析, 本文继续沿用崔春生等<sup>[21]</sup>文中的案例, 假设方案集为  $A = \{A_1, A_2, A_3\}$ , 方案评价的标准为属性集  $C = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ , 3 位专家记为  $e_1, e_2, e_3$ , 基于各属性分别对各个方案进行评价。

**步骤 1** 专家  $e_1, e_2, e_3$  考虑各属性后对各决策方案进行 Vague 评价, 构建原始决策矩阵  $D^1, D^2, D^3$  分别为

$$D^1 = \begin{bmatrix} [0.2, 0.3] & [0.2, 0.6] & [0.4, 0.5] & [0.6, 0.8] \\ [0.1, 0.7] & [0.5, 0.6] & [0.2, 0.4] & [0.7, 0.8] \\ [0.4, 0.5] & [0.6, 0.7] & [0.5, 0.6] & [0.3, 0.5] \end{bmatrix}$$

$$D^2 = \begin{bmatrix} [0.7, 0.8] & [0.5, 0.5] & [0.4, 0.7] & [0.5, 0.5] \\ [0.4, 0.6] & [0.4, 0.8] & [0.7, 0.8] & [0.2, 0.6] \\ [0.3, 0.5] & [0.1, 0.3] & [0.5, 0.6] & [0.6, 0.8] \end{bmatrix}$$

$$D^3 = \begin{bmatrix} [0.1, 0.6] & [0.4, 0.6] & [0.5, 0.5] & [0.6, 0.8] \\ [0.6, 0.9] & [0.3, 0.7] & [0.5, 0.8] & [0.2, 0.4] \\ [0.5, 0.5] & [0.7, 0.9] & [0.4, 0.7] & [0.4, 0.8] \end{bmatrix}$$

专家  $e_1, e_2, e_3$  设定各属性的权重, 构建属性权重矩阵  $W$  为

$$W = \begin{bmatrix} [0.5, 0.9] & [0.3, 0.6] & [0.7, 0.8] & [0.3, 0.8] \\ [0.6, 0.7] & [0.5, 0.5] & [0.3, 0.4] & [0.5, 0.7] \\ [0.5, 0.5] & [0.6, 0.8] & [0.5, 0.7] & [0.4, 0.5] \end{bmatrix}$$

**步骤 2** 根据各专家决策矩阵, 运用 Vague 集模糊熵式(3), 计算各专家的评分可信度序列, 得到可信度矩阵  $r$  为

$$r = \begin{bmatrix} 0.5136 & 0.5728 & 0.5879 & 0.3615 \\ 0.5895 & 0.5803 & 0.5580 & 0.6340 \\ 0.5718 & 0.7182 & 0.7278 & 0.4060 \end{bmatrix}$$

经各专家的评分可信度序列修正后, 新的决策矩阵  $\hat{D}^1, \hat{D}^2, \hat{D}^3$  如下:

$$\hat{D}^1 = \begin{bmatrix} [0.10, 0.64] & [0.11, 0.77] & [0.24, 0.71] & [0.22, 0.93] \\ [0.05, 0.85] & [0.29, 0.77] & [0.12, 0.65] & [0.25, 0.93] \\ [0.21, 0.74] & [0.34, 0.83] & [0.29, 0.76] & [0.11, 0.82] \end{bmatrix}$$

$$\hat{D}^2 = \begin{bmatrix} [0.41, 0.88] & [0.29, 0.71] & [0.22, 0.83] & [0.32, 0.68] \\ [0.24, 0.76] & [0.23, 0.88] & [0.39, 0.89] & [0.13, 0.75] \\ [0.18, 0.71] & [0.06, 0.59] & [0.28, 0.78] & [0.38, 0.87] \end{bmatrix}$$

$$\hat{D}^3 = \begin{bmatrix} [0.06, 0.77] & [0.29, 0.71] & [0.36, 0.64] & [0.24, 0.92] \\ [0.34, 0.94] & [0.22, 0.78] & [0.36, 0.85] & [0.08, 0.76] \\ [0.29, 0.71] & [0.50, 0.93] & [0.29, 0.78] & [0.16, 0.92] \end{bmatrix}$$

**步骤 3** 将  $\hat{D}^1, \hat{D}^2, \hat{D}^3$  中的 Vague 评价价值转化为

基本概率分配后,采用式(12)一式(14)进行证据信息

$$D = \begin{bmatrix} [0.320\ 1, 0.676\ 5] & [0.287\ 2, 0.688\ 3] & [0.254\ 4, 0.731\ 5] & [0.256\ 9, 0.757\ 2] \\ [0.448\ 5, 0.567\ 6] & [0.439\ 8, 0.575\ 8] & [0.382\ 2, 0.622\ 2] & [0.380\ 4, 0.607\ 8] \\ [0.231\ 4, 0.755\ 9] & [0.273\ 0, 0.735\ 9] & [0.363\ 4, 0.646\ 3] & [0.362\ 7, 0.635\ 0] \end{bmatrix}$$

步骤 4 使用记分函数式(8)计算属性权重矩阵中各位专家对每个属性给出的权重分数,以此获得属性权重得分矩阵  $\hat{W}$  为

$$\hat{W} = \begin{bmatrix} 1.166\ 7 & 0.354\ 5 & 1.54 & 0.5 \\ 0.942\ 9 & 0.5 & 0.253\ 8 & 0.75 \\ 0.5 & 1.2 & 0.75 & 0.4 \end{bmatrix}$$

对  $\hat{W}$  经过专家评分可信度矩阵调整并归一化后,获得各属性综合权重值及综合权重序列  $W^*$  为

$$W^* = [0.276\ 7 \quad 0.260\ 2 \quad 0.305\ 9 \quad 0.157\ 2]$$

步骤 5 根据专家群体决策矩阵  $D$  与属性综合权重序列  $W^*$ ,算出各个方案的加权平均 Vague 评价价值:

$$\bar{d}_1 = [0.281\ 5, 0.709\ 0], \bar{d}_2 = [0.415\ 2, 0.592\ 8], \bar{d}_3 = [0.303\ 2, 0.698\ 2].$$

再由记分函数式(8)计算各个方案的最终综合得分。分别为  $S(\bar{d}_1) = 0.398\ 1$ ,  $S(\bar{d}_2) = 0.492\ 9$ ,  $S(\bar{d}_3) = 0.423\ 6$ 。由此可知方案  $A_2$  综合得分最高,  $A_3$  次之,最低的是方案  $A_1$ 。

基于方案评价规则和评分结果,待选方案由优至劣的排序为  $A_2 > A_3 > A_1$ ,且  $A_2$  为最优方案,这与崔春生等<sup>[21]</sup>文中给出的结论一致。同理,若采用 Vague 集模糊熵公式(4)并沿用上述决策流程,得出各方案综合得分分别为  $S(\bar{d}_1) = 0.419\ 4$ ,  $S(\bar{d}_2) = 0.477\ 7$ ,  $S(\bar{d}_3) = 0.423\ 5$ ,同样也获得了  $A_2$  是最优方案的结论。崔春生等给出的方法需要事先主观指定各专家评分可信度,评分可信度不同会影响最终评判结果。本文是以各专家在 Vague 决策中的模糊熵值来确定其评分可信度,因而更具客观性、科学性,且决策结果的稳定性与一致性更好。

### 5 结束语

探讨了 Vague 集信息下的多属性群决策问题,提出了一种基于 Vague 集模糊熵和 D-S 证据理论的多属性群决策方法。主要工作及特点包括:根据专家在考虑各属性下对各方案的 Vague 评价,运用模糊熵值确定各专家的评分可信度序列,弥补了传统方法对可信度主观统一设定上的不足,其由具体数据驱动,并随具体决策问题不同而不同,因而更具客观性与灵活性,其

集结,得到专家群体决策矩阵  $D$  为

评价结果也能保持内在一致性;利用专家可信度序列修正原始评价信息,分别运用 Vague 记分函数与专家可信度序列计算出各属性的综合权重值,使之更贴合实际;结合 Vague 集模糊熵在刻画模糊不确定性上的优势以及 D-S 证据理论在信息融合上的优势,运用证据合成公式将各位专家在属性集下每个方案的 Vague 评价价值进行信息集结,并经属性综合权重的加权与记分函数计算得分后,获得各个方案的最终评分。本文提出的多属性群决策方法可以进行程式化设计,具有较强的可操作性,易于实践。

本文是基于崔春生等<sup>[21]</sup>一文基础上的后续研究,所提出的方法在该文基础上有两个改进:一是以 Vague 集模糊熵为依据来获得专家的评分可信度,摒弃了主观设定的传统思路;二是仅对专家评价证据进行信息集结,减少了对属性集证据信息的二次集结,原因在于证据合成次数较多,尤其是存在高冲突的证据时,易造成信息失真,产生与直觉相悖的结果。通过算例验证了提出的多属性群决策方法的合理性和实用性。如何降低 Vague 证据信息合成中可能存在的高冲突性以拓宽应用场景,以及如何在专家的方案评价信息或属性权重信息存在部分缺失情况下进行群决策有待后续进一步的研究。

### 参考文献(References):

- [1] GUPTA P, MEHLAWAT M K, GROVER N, et al. Multi-attribute group decision making based on extended TOPSIS method under interval-valued intuitionistic fuzzy environment[J]. Applied Soft Computing, 2018, 69: 554—567.
- [2] GAU W L, BUEHRER D J. Vague sets[J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, 1993, 23(2): 610—614.
- [3] MISHRA J, GHOSH S. Uncertain query processing using vague set or fuzzy set: which one is better[J]. International Journal of Computers, Communications and Control, 2014, 9(6): 730—740.
- [4] ZHANG D, ZHANG J, LAI K K, et al. An novel approach to supplier selection based on vague sets group decision [J]. Expert Systems with Applications, 2009, 36(5): 9557—9563.

- [5] 陈岩, 张宁, 陈侠. 基于 Vague 集信息的多属性群决策专家水平评判方法[J]. 数学的实践与认识, 2013, 43(1): 167—176.
- CHEN Yan, ZHANG Ning, CHEN Xia. Method to the assessment level of experts in multi-attribute group decision making based on vague set information[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2013, 43(1): 167—176.
- [6] JUE W, WEI X, MA J, et al. A vague set based decision support approach for evaluating research funding programs[J]. European Journal of Operational Research, 2013, 230(3): 656—665.
- [7] LIU P. Multi-attribute decision-making method research based on interval vague sets and TOPSIS method[J]. Technological and Economic Development of Economy, 2009, 3: 453—463.
- [8] ZHOU S H, LIU W, CHANG W B. An improved TOPSIS with weighted hesitant vague information[J]. Chaos Solitons & Fractals, 2016, 89: 47—53.
- [9] GAO M, SUN T, DAI H. A multi-attribute fuzzy decision making with TOPSIS method based on vague set theory[J]. International Journal of Information and Communication Technology, 2017, 11(1): 12—24.
- [10] WANG W, WU X. Analysis on the score function in vague set theory[J]. Transactions of Beijing Institute of Technology, 2008, 28(4): 372—376.
- [11] GUO R, GUO J, SU Y, et al. Ranking limitation and improvement strategy of vague sets based on score function[J]. Systems Engineering and Electronics, 2014, 36(1): 105—110.
- [12] LIN K S. A novel vague set based score function for multi-criteria fuzzy decision making[J]. WSEAS Transactions on Mathematics, 2016(15): 1—12.
- [13] 许昌林, 魏立力. 多准则模糊决策的 Vague 集方法[J]. 系统工程理论与实践, 2010, 30(11): 2019—2025.
- XU Chang-lin, WEI Li-li. Vague set method of multi-criteria fuzzy decision making [J]. System Engineering-Theory & Practice, 2010, 30(11): 2019—2025.
- [14] GUI W. GRA method for multiple attribute decision making with incomplete weight information in intuitionistic fuzzy setting[J]. Knowledge-Based Systems, 2010, 23(3): 243—247.
- [15] ELZARKA H M, YAN H, CHAKRABORTY D. A vague set fuzzy multi-attribute group decision-making model for selecting onsite renewable energy technologies for institutional owners of constructed facilities [J]. Sustainable Cities and Society, 2017, 35: 430—439.
- [16] LIN K S. Efficient and rational multi-criteria group decision making method based on vague set theory [J]. Journal of Computers (Taiwan), 2019, 30(3): 192—203.
- [17] ROBINSON J, AMIRTHARAJ H. Efficient multiple attribute group decision making models with correlation coefficient of vague sets [J]. International Journal of Operations Research and Information Systems, 2014, 5(3): 27—49.
- [18] YU J, SHEN X. Direct clustering method based on vague sets[J]. Computer Engineering and Applications, 2010, 46(31): 143—147.
- [19] WANG H. Considerations on transforming method from vague value to fuzzy value[J]. Computer Engineering and Applications, 2009, 45(19): 43—44.
- [20] WANG J, ZHANG H. Fuzzy multi-criteria decision-making method based on decision maker's vague confidence [J]. Journal of Systems Engineering, 2011, 26(1): 17—22.
- [21] 崔春生, 曹艳丽, 邱闯闯, 等. 基于证据理论和 Vague 集的多属性群决策方法研究[J]. 运筹与管理, 2021, 30(11): 1—5.
- CUI Chun-sheng, CAO Yan-li, QIU Chuang-chuang, et al. Research on multi-attribute group decision-making method based on evidence theory and vague sets [J]. Operations Research and Management Science, 2021, 30(11): 1—5.
- [22] XIAO F. Multi-sensor data fusion based on the belief divergence measure of evidences and the belief entropy [J]. Information Fusion, 2018, 46(3): 23—32.
- [23] 杨永伟, 辛小龙. Vague 集信息熵测量及其应用[J]. 模糊系统与数学, 2012, 26(1): 161—165.
- YANG Yong-wei, XIN Xiao-long. Information entropy measures for vague sets and its application[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2012, 26(1): 161—165.
- [24] 范平. 关于 Vague 集模糊熵的度量分析[J]. 计算机工程与应用, 2012, 48(1): 57—59.
- FAN Ping. Measurement analysis for fuzzy entropy of vague sets [J]. Computer Engineering and Applications, 2012, 48(1): 57—59.