一类双函数系数 ARCH-M 模型的经验似然估计

姜　茜[1],赵培信[1,2]

1. 重庆工商大学 数学与统计学院,重庆 400067
2. 重庆工商大学 经济社会应用统计重庆市重点实验室,重庆 400067

摘　要:针对一类双函数系数自回归条件异方差-均值(ARCH-M)模型的估计问题,提出一种基于经验似然的估计方法;在该估计方法中,所提出的模型允许金融时间序列的风险效应和收益效应同时为某一变量的函数结构,可以有效地刻画金融时间序列的风险和平均收益之间的关系,具有较广的适应性;同时,与经典矩估计法和极大似然估计法相比,基于经验似然的估计方法具有独特的优势,可以充分考虑金融序列的异方差性,并且所构造的置信区间不涉及任何渐近方差的估计,因此具有较好的稳健性和有效性;在一些正则条件下,对所构造的经验对数似然比统计量及函数系数估计量的渐近分布进行了理论分析;结果表明:关于风险效应函数系数和收益效应函数系数的经验对数似然比统计量均渐近收敛于中心卡方分布,同时函数系数估计量渐近收敛于正态分布;进而对风险效应函数系数和收益效应函数系数分别构造了相应函数系数的逐点置信区间。

关键词:函数系数模型;ARCH-M 模型;经验似然;置信区间

中图分类号:O212.7　　**文献标识码**:A　　doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2023.0002.016

Empirical Likelihood Estimation of a Class of Double-function Coefficient ARCH-M Models

JIANG Qian[1], ZHAO Peixin[1,2]

1. School of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China;
2. Chongqing Key Laboratory of Economic and Social Applied Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China

Abstract: An estimation method based on empirical likelihood was proposed for a class of double-function coefficient autoregressive conditional heteroscedasticity-mean (ARCH-M) model. In this method, the proposed model allows the risk effect and return effect of financial time series to be the functional structure of a certain variable at the same time, which can effectively describe the relationship between the risk and average return of financial time series and has a wide range of adaptability. Meanwhile, compared with the classical moment estimation method and maximum likelihood estimation method, the estimation method based on empirical likelihood has unique advantages. This estimation method can fully consider the heteroscedasticity of financial series, and the constructed confidence interval does not involve any estimation of asymptotic variance, so it has better robustness and effectiveness. Under some regularity conditions, the asymptotic distribution of the constructed empirical log-likelihood ratio statistic and the estimator of function coefficients was analyzed theoretically. The results showed that the empirical log-likelihood ratio statistics about the risk effect function coefficient and the income effect function coefficient asymptotically converged to the central chi-square distribution, while the function coefficient estimator asymptotically converged to the normal distribution. Additionally, the point-by-point

收稿日期:2022-03-07　**修回日期**:2022-04-28　**文章编号**:1672-058X(2023)02-0106-07

基金项目:国家社会科学基金一般项目(18BTJ035);重庆市自然科学基金面上项目(CSTC2020JCYJ-MSXMX0006);重庆工商大学研究生科研创新项目(YJSCXX2002-112-190).

作者简介:姜茜(1998—),女,重庆万州人,硕士研究生,从事复杂数据分析及应用研究.

引用格式:姜茜,赵培信.一类双函数系数 ARCH-M 模型的经验似然估计[J].重庆工商大学学报(自然科学版),2023,40(2):106—112.

JIANG Qian, ZHAO Peixin. Empirical likelihood estimation of a class of double-function coefficient ARCH-M models[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition),2023,40(2):106—112.

confidence intervals of the corresponding function coefficients were constructed for the risk effect function coefficient and the income effect function coefficient, respectively.

Keywords: function coefficient model; ARCH-M model; empirical likelihood; confidence interval

1 引　言

自回归条件异方差(ARCH)模型在统计建模中可以有效刻画时间序列的异方差结构,目前已被广泛应用于经济、金融等领域。自回归条件异方差-均值(ARCH-M)模型[1]是 ARCH 模型的一个有效推广形式,该模型假定金融序列的条件方差以线性方式影响其平均收益。近几年来,大量学者对 ARCH-M 模型进行了研究,并提出了一些扩展版本。比如 Hong[2]提出一种 GARCH-M 模型来刻画金融序列的平均收益与对应风险的关系;Backus[3],Harvey 等[4]指出条件方差的线性结构在实际统计建模中往往是不成立的;Linton 等[5]提出了一个半参数 ARCH-M 模型来刻画条件方差和条件均值收益之间的关系;根据 Zhang 等[6],可知函数系数 ARCH-M 模型具有如下形式:

$$\begin{cases} y_t=\delta(x_t)h_t+\varepsilon_t \\ h_t=\beta_0+\beta_1 y_{t-1}^2+\cdots+\beta_p y_{t-p}^2 \end{cases} \tag{1}$$

其中,$\delta(\cdot)$是未知函数系数,$\{y_t,x_t\}$为可观测序列,$\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_p$ 是未知参数,模型的误差序列$\{\varepsilon_t\}$满足:

$$E(\varepsilon_t|x_t,y_1,\cdots,y_{t-1})=0$$

$$Var(\varepsilon_t|x_t,y_1,\cdots,y_{t-1})=h_t$$

式(1)中使用的 h_t 结构可以更容易讨论估计量的渐近性质,这种 h_t 的形式首先由 Ling[7]用于研究双自回归模型;Zhang 等[8]提出了基于局部多项式回归的估计方法。

尽管上述文献假定风险效应$\delta(\cdot)$为函数形式,但是收益效应 $\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_p$ 仍为参数形式。所以在实际问题的统计建模过程中,式(1)仍存在一定的局限性,不能很好地刻画金融序列的风险与收益之间的关系。基于此,本文假定未知参数$\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_p$ 同时也为 x_t 的函数,并记为 $\beta_0(x_t),\beta_1(x_t),\cdots,\beta_p(x_t)$,提出如下双函数系数 ARCH-M 模型:

$$\begin{cases} y_t=\delta(x_t)h_t+\varepsilon_t \\ h_t=\beta_0(x_t)+\beta_1(x_t)y_{t-1}^2+\cdots+\beta_p(x_t)y_{t-p}^2 \end{cases} \tag{2}$$

为确保 h_t 是一个非负平稳的序列,假定 $\beta_k(x_t)\geqslant 0$;$k=0,1,\cdots,p$;$\sum_{k=1}^{p}\beta_k(x_t)<1$。

式(2)允许模型中的风险效应和收益效应同时为某一变量的函数结构,是式(1)的一个推广形式,式(1)只是式(2)的一种特殊情形,因此式(2)在实际问题分析中具有更广的适应性。利用经验似然方法,对模型中的函数系数$\delta(x_t)$和$\beta_0(x_t),\beta_1(x_t),\cdots,\beta_p(x_t)$给出了一种基于经验似然的估计过程。该估计方法充分考虑了金融序列的异方差性,具有较好的稳健性和有效性。进一步,在一些正则条件下,证明了关于函数系数 $\beta_0(x_t),\beta_1(x_t),\cdots,\beta_p(x_t)$和$\delta(x_t)$的经验对数似然比统计量均渐近收敛于中心卡方分布,同时函数系数估计量渐近收敛于正态分布,进而构造了相应函数系数的逐点置信区间。本文把经验似然估计理论应用到时间序列分析模型中,所提出的估计方法是基于经验似然推断方法的一种积极补充。关于经验似然方法的更多研究参见 Zhang[6],Chuang[9]以及 Zhao[10]等。

2 函数$\boldsymbol{\beta}(x)$的初始估计

为讨论方便,记:

$$\boldsymbol{\beta}(x_t)=(\beta_0(x_t),\beta_1(x_t),\cdots,\beta_p(x_t))^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{Y}_{t-1}=(1,y_{t-1}^2,\cdots,y_{t-p}^2)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\theta}(x_t)=(\theta_0(x_t),\theta_1(x_t),\cdots,\theta_p(x_t))^{\mathrm{T}}$$

其中,$\theta_k(x_t)=\delta(x_t)\beta_k(x_t)$,$k=0,1,\cdots,p$。并且假设 x_t 和 y_t 都是平稳时间序列,与式(2)结合,有

$$\begin{aligned} y_t &=\delta(x_t)h_t+\varepsilon_t= \\ &\delta(x_t)\beta_0(x_t)+\delta(x_t)\beta_1(x_t)y_{t-1}^2+\cdots+ \\ &\delta(x_t)\beta_p(x_t)y_{t-p}^2+\varepsilon_t= \\ &\theta_0(x_t)+\theta_1(x_t)y_{t-1}^2+\cdots+\theta_p(x_t)y_{t-p}^2+\varepsilon_t= \\ &\boldsymbol{Y}_{t-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta}(x_t)+\varepsilon_t \end{aligned} \tag{3}$$

从式(3)可知,对于任意给定的 x,都有

$$E\{\boldsymbol{Y}_{t-1}[y_t-\boldsymbol{Y}_{t-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta}(x_t)]\,|\,x_t=x\}=0 \tag{4}$$

基于局部估计方程,引入一个辅助随机向量:

$$\boldsymbol{\eta}_t(\boldsymbol{\theta}(x))=\boldsymbol{Y}_{t-1}[y_t-\boldsymbol{Y}_{t-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta}(x_t)]K_h(x-x_t)$$

其中,$K_h(\cdot)=K(\cdot/h)$,$K(\cdot)$是核函数,h 是带宽。从式(4)可以得到 $E\{\boldsymbol{\eta}_t(\boldsymbol{\theta}(x))\}=0$,因此,可以通过求解以下局部估计方程来给出 $\boldsymbol{\theta}(x)$的估计量 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}(x)$:

$$\sum_{t=1}^{n}\boldsymbol{\eta}_t(\boldsymbol{\theta}(x))=0$$

记 $V_n(x)=(nh)^{-1}\sum_{t=1}^{n}\boldsymbol{Y}_{t-1}\boldsymbol{Y}_{t-1}^{\mathrm{T}}K_h(x-x_t)$,向量的估计值可表示为

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}}(x)=V_n(x)^{-1}\frac{1}{nh}\sum_{t=1}^{n}y_t\boldsymbol{Y}_{t-1}K_h(x-x_t)$$

此外,将 $\tilde{\boldsymbol{\theta}}(x)$代入式(2),可得

$$\tilde{h}_t=\beta_0(x_t)+\beta_1(x_t)y_{t-1}^2+\cdots+\beta_p(x_t)y_{t-p}^2 \tag{5}$$

式(5)为标准函数系数模型,故可利用 B 样条方法,得到 h_t 和 $\boldsymbol{\beta}(x)$ 的估计值。注意到 $\boldsymbol{\beta}(x)$ 可展开为

$$\beta_k(x)=\boldsymbol{B}(x)^{\mathrm{T}}\cdot\gamma_k, k=1,\cdots,p \tag{6}$$

其中,$\boldsymbol{B}(x)=(B_1(x),\cdots,B_L(x))^{\mathrm{T}}$ 是有序的 B 样条基函数,$L=k_n+m$,k_n 是内节点数,γ_k 是未知参数。将式(6)代入式(5)可得:

$$\tilde{h}_t=\boldsymbol{B}(x_t)^{\mathrm{T}}\gamma_0+\boldsymbol{B}(x_t)^{\mathrm{T}}\gamma_1 y_{t-1}^2+\cdots+\boldsymbol{B}(x_t)^{\mathrm{T}}\gamma_p y_{t-p}^2$$

需要注意的是:

$$h_t=\boldsymbol{Y}_{t-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}(x_t)+\varepsilon_t \tag{7}$$

将式(6)代入到式(7)可得:

$$h_t=\boldsymbol{\Pi}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\gamma}+\varepsilon_t$$

其中,$\boldsymbol{\Pi}_t=\boldsymbol{I_p}\otimes\boldsymbol{B}(x_t)\boldsymbol{Y}_{t-1}$,$\otimes$表示 Kronecker 乘积,$\boldsymbol{\gamma}$ 是一个 q 维的未知向量。于是 $\boldsymbol{\gamma}$ 的估计量 $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$ 可以通过最小化目标函数 $\sum_{t=1}^{n}(h_t-\boldsymbol{\Pi}_t^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\gamma})^2$ 得到,其估计量为

$$\tilde{\boldsymbol{\gamma}}=\boldsymbol{\Gamma}_n^{-1}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}h_t\boldsymbol{\Pi}_t$$

其中,$\boldsymbol{\Gamma}_n=n^{-1}\sum_{t=1}^{n}\boldsymbol{\Pi}_t\boldsymbol{\Pi}_t^{\mathrm{T}}$。所以 $\boldsymbol{\beta}(x)$ 的估计量 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}(x)$ 可表示为:

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}}(x)=\boldsymbol{B}(x)^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{\gamma}} \tag{8}$$

需注意在对 $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{x})$ 估计的过程中,忽略了时间序列 y_t 的异方差性,因此估计量 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}(x)$ 就是 $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{x})$ 的初始估计量。后面将调用初始估计量 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{x})$,给出 $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{x})$ 和 $\delta(x)$ 的经验似然估计过程。

3 函数系数 $\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{x})$ 的经验似然估计

式(1)满足条件:

$$E\{h_t[y_t-\delta(x_t)h_t]\mid x_t=x\}=0$$

由于 y_t 是异方差时间序列,为了避免异方差性对估计的影响,可以给 $\delta(x)$ 定义一个经验似然比函数。首先引入辅助随机向量如下:

$$\varphi_t(\delta(x))=h_t[y_t-\delta(x)h_t]K_h(x_t-x), t=1,\cdots,n$$

而 $\varphi_t(\delta(x))$ 中的 h_t 是未知的,故给出 $\varphi_t(\delta(x))$ 的估计版本如下:

$$\hat{\varphi}_t(\delta(x))=\hat{h}_t[y_t-\delta(x)\hat{h}_t]K_h(x_t-x), t=1,\cdots,n$$

其中,$\hat{h}_t=\tilde{\beta}_0(x_t)+\tilde{\beta}_1(x_t)y_{t-1}^2+\cdots+\tilde{\beta}_p(x_t)y_{t-p}^2$,$\tilde{\boldsymbol{\beta}}(x_t)=(\tilde{\beta}_0(x_t),\cdots,\tilde{\beta}_p(x_t))^{\mathrm{T}}$,在式(8)中已被定义。由此,$\delta(x)$ 的经验对数似然比函数可被定义为

$$R(\delta(x))=-2\max\Big\{\sum_{t=1}^{n}\log(np_t)\mid p_t\geqslant 0,\sum_{t=1}^{n}p_t=1,\sum_{t=1}^{n}p_t\hat{\varphi}_t(\delta(x))=0\Big\}$$

与 Xue 等[11]类似,结合拉格朗日乘子法,$R(\delta(x))$ 可以表示为

$$R(\delta(x))=2\sum_{t=1}^{n}\log(1+\boldsymbol{\lambda}\hat{\varphi}_t(\delta(x)))$$

此处的 $\boldsymbol{\lambda}$ 满足:

$$\sum_{t=1}^{n}\frac{\hat{\varphi}_t(\delta(x))}{1+\boldsymbol{\lambda}\hat{\varphi}_t(\delta(x))}=0 \tag{9}$$

接下来,对于任何给定的 x,当 $\delta(x)$ 是真实函数系数时,$R(\delta(x))$ 应该服从渐近 χ^2 分布。为了更清晰地阐述 $R(\delta(x))$ 的渐近性质,下面列出了一些正则性条件。

C1 函数系数 $\delta(x)$、$\boldsymbol{\beta}(x)$ 是有界且具有连续的二阶导数的紧支撑。

C2 x_t 的密度函数 $f(x)$ 是连续有界的,远离零和无穷大。

C3 时间序列 x_t 和 y_t 都是平稳且随机的 α 混合序列,并且对于一些 $c>0$ 和一些足够大的 d,有 $|\alpha(k)|\leqslant ck^{-d}$。

C4 时间序列 y_t 和模型误差 e_t 满足矩条件 $E\{|y_t|^4\}<\infty$,$\sup_x E\{|y_t|^4\mid x_t=x\}<\infty$ 并且 $E\{|e_t|^4\}<\infty$。

C5 令 $\kappa(x)=E(h_t\mid x_t=x)$,并且有 $V(x)=E\{\boldsymbol{Y}_{t-1}\boldsymbol{Y}_{t-1}^{\mathrm{T}}\mid x_t=x\}$,则 $\kappa(x)>0$ 且 $V(x)$ 对所有 x 均可逆。此外,设 $\boldsymbol{\Gamma}=E\{\boldsymbol{Y}_{t-1}\boldsymbol{Y}_{t-1}^{\mathrm{T}}\}$ 和 $\boldsymbol{\Psi}=E\{h_t^{-1}\delta^2(x_t)\boldsymbol{Y}_{t-1}\boldsymbol{Y}_{t-1}^{\mathrm{T}}\}$,则 $\boldsymbol{\Gamma}$ 和 $\boldsymbol{\Psi}$ 都是正定矩阵。

C6 核函数 $K(\cdot)$ 在紧支撑上有界且利普希茨连续,并满足 $\int u^2K(u)\mathrm{d}u<\infty$ 和 $\int K^2(u)\mathrm{d}u<\infty$。此外,带宽 h 满足当 $n\to\infty$ 时,$h\to 0$,$nh\to\infty$ 和 $nh^5\to 0$。

条件 C1 和 C2 是非参数回归模型和局部非参数估计技术的常见假设。条件 C3、C4 和 C5 中的高阶矩条件假设是文献中半参数 ARCH-M 模型的标准假设,与 Zhang[6], Ling[7] 和 Zhang[8] 等假设的条件非常相似。此外,条件 C6 是核函数的常见假设。为了确保所提出的经验对数似然比渐近 χ^2,需要使用不平滑的带宽来消除函数系数的估计偏差。当然,如果使用 Xue 等[11]中的偏差校正机制,最优带宽也可以用于经验似然估计过程。在这些规律性条件下,可以给出以下定理来说明 $\hat{R}(\delta(x))$ 的渐近分布。

定理 1 假设条件 C1—C6 成立,对于给定的 x,如果 $\delta(x)$ 是真实函数系数,有 $R(\delta(x))\xrightarrow{L}\chi_1^2$,其中,$\chi_1^2$ 表示具有一个自由度的中心 χ^2 分布。

基于定理 1,可以构造 $\delta(x)$ 的渐近逐点置信区间如下:

$$C_\alpha(\delta(x))=\{\delta(x)\mid R(\delta(x))\leqslant\chi_1^2(\alpha)\}$$

其中,$\chi_1^2(\alpha)$ 是 χ_1^2 的 $1-\alpha$ 分位数,$0<\alpha<1$。

还可以将 $R(\delta(x))$ 最大化以获得 $\delta(x)$ 的最大经验似然估计量。此外,使用与 Xue 等[11]相同的论点,可以证明 $\delta(x)$ 的最大经验似然估计量是以下估计方程的解:

$$\sum_{t=1}^n\hat{\varphi}_t(\delta(x))=\sum_{t=1}^n[y_t-\delta(x)\hat{h}_t]K_h(x_t-x)=0 \tag{10}$$

令 $\Phi_n(x)=(nh)^{-1}\sum\limits_{t=1}^n\hat{h}_tK_h(x_t-x)$,结合式(10),可以得到估计向量:

$$\hat{\delta}(x)=\Phi_n(x)^{-1}\frac{1}{nh}\sum_{t=1}^n y_tK_h(x_t-x)$$

以下定理表明 $\hat{\delta}(x)$ 具有渐近正态性。

定理 2　假设条件 C1—C6 成立,对于任何给定的 x,有

$$\sqrt{nh}\,[\hat{\delta}(x)-\delta(x)]\xrightarrow{L}N(0,\sigma^2(x))$$

其中,$\sigma^2(x)=f^{-1}(x)\kappa^{-1}(x)\int K^2(u)\,\mathrm{d}u$,$\kappa(x)=E(h_t\mid x_t=x)$。

4　函数系数 $\boldsymbol{\beta}(x)$ 的经验似然估计

式(2)遵循以下等式:

$$E\{\delta(x_t)\boldsymbol{Y}_{t-1}[y_t-\delta(x_t)\boldsymbol{\beta}(x_t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_{t-1}]\mid x_t,\boldsymbol{Y}_{t-1}\}=0 \tag{11}$$

由此,对于 $t=1,\cdots,n$,辅助随机向量为

$$\boldsymbol{\psi}_t(\boldsymbol{\beta}(x))=\delta(x_t)\boldsymbol{Y}_{t-1}[y_t-\delta(x_t)\boldsymbol{\beta}(x)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_{t-1}]K_h(x_t-x)$$

这里将 $\delta(x_t)$ 替换为式(10)中定义的 $\hat{\delta}(x_t)$,就可以得到 $\boldsymbol{\psi}_t(\boldsymbol{\beta}(x))$ 的估计向量:

$$\hat{\boldsymbol{\psi}}_t(\boldsymbol{\beta}(x))=\hat{\delta}(x_t)\boldsymbol{Y}_{t-1}[y_t-\hat{\delta}(x_t)\boldsymbol{\beta}(x)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_{t-1}]K_h(x_t-x) \tag{12}$$

因此,$\boldsymbol{\beta}(x)$ 的经验对数似然比函数可以定义为

$$L(\boldsymbol{\beta}(x))=-2\max\Big\{\sum_{t=1}^n\log(np_t)\mid p_t\geqslant0,\ \sum_{t=1}^n p_t=1,\ \sum_{t=1}^n p_t\hat{\boldsymbol{\psi}}_t(\boldsymbol{\beta}(x))=0\Big\}$$

类似地,结合拉格朗日乘子法,$L(\boldsymbol{\beta}(x))$ 可以表示为

$$L(\boldsymbol{\beta}(x))=2\sum_{t=1}^n\log(1+\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\psi}}_t(\boldsymbol{\beta}(x)))$$

其中,$\boldsymbol{\lambda}$ 满足:

$$\sum_{t=1}^n\frac{\hat{\boldsymbol{\psi}}_t(\boldsymbol{\beta}(x))}{1+\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\psi}}_t(\boldsymbol{\beta}(x))}=0$$

以下定理说明了 $L(\boldsymbol{\beta}(x))$ 的渐近分布。

定理 3　假设条件 C1—C6 成立,有 $L(\boldsymbol{\beta}(x))\xrightarrow{L}\chi_{p+1}^2$,其中 χ_{p+1}^2 表示具有 $(p+1)$ 自由度的标准卡方分布。

基于定理 3,可以构造 $\boldsymbol{\beta}(x)$ 的渐近置信区间如下:

$$C_\alpha(\boldsymbol{\beta}(x))=\{\boldsymbol{\beta}\mid L(\boldsymbol{\beta}(x))\leqslant\chi_{p+1}^2(\alpha)\}$$

其中,$\chi_{p+1}^2(\alpha)$ 是 χ_{p+1}^2 的 $1-\alpha$ 分位数,$0<\alpha<1$。

也可以最大化 $L(\boldsymbol{\beta}(x))$,以获得 $\boldsymbol{\beta}(x)$ 的最大经验似然估计量 $\hat{\boldsymbol{\beta}}(x)$,令

$$\boldsymbol{\Psi}_n=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^n\hat{\delta}^2(x_t)\boldsymbol{Y}_{t-1}\boldsymbol{Y}_{t-1}^{\mathrm{T}}K_h(x_t-x)$$

于是,估计量 $\hat{\boldsymbol{\beta}}(x)$ 为

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}(x)=\boldsymbol{\Psi}_n^{-1}(x)\frac{1}{n}\sum_{t=1}^n\hat{\delta}(x_t)\boldsymbol{Y}_{t-1}y_tK_h(x_t-x)$$

5　定理的证明

本节将给出定理 1—定理 3 的技术证明。为了方便和简单,让 c 表示一个正常数,在整篇论文中每次出现可能是不同的值。

引理 1　假设条件 C1—C6 成立,则有 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}=\boldsymbol{\beta}+O_p(c_n)$,其中,$c_n=\{(nh)^{-1}\log n\}^{1/2}+h^2$,$\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ 由式(5)定义。

证　明　注意 $\boldsymbol{\Gamma}_n=n^{-1}\sum\limits_{t=1}^n\boldsymbol{Y}_{t-1}\boldsymbol{Y}_{t-1}^{\mathrm{T}}$,然后结合 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ 的定义,计算可得

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{\beta}}&=\boldsymbol{\Gamma}_n^{-1}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^n\tilde{h}_t\boldsymbol{Y}_{t-1}=\\&\boldsymbol{\Gamma}_n^{-1}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^n h_t\boldsymbol{Y}_{t-1}+\boldsymbol{\Gamma}_n^{-1}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^n(\tilde{h}_t-h_t)\boldsymbol{Y}_{t-1}=\\&\boldsymbol{\Gamma}_n^{-1}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^n\boldsymbol{Y}_{t-1}\boldsymbol{Y}_{t-1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\Gamma}_n^{-1}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^n(\tilde{\varepsilon}_t^2-h_t)\boldsymbol{Y}_{t-1}=\\&\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\Gamma}_n^{-1}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^n(\varepsilon_t^2-h_t)\boldsymbol{Y}_{t-1}+\\&\boldsymbol{\Gamma}_n^{-1}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^n(\tilde{\varepsilon}_t^2-\varepsilon_t^2)\boldsymbol{Y}_{t-1}\equiv\\&\boldsymbol{\beta}+J_{n1}+J_{n2}\end{aligned} \tag{13}$$

注意 $E\{\varepsilon_t^2-h_t\mid\boldsymbol{Y}_{t-1}\}=0$,结合条件 C4,有 $n^{-1/2}\times\sum\limits_{t=1}^n(\varepsilon_t^2-h_t)\boldsymbol{Y}_{t-1}=O_p(1)$ 和 $\boldsymbol{\Gamma}_n=O_p(1)$。因此,可以得到

$$J_{n1}=\frac{1}{\sqrt{n}}\boldsymbol{\Gamma}_n^{-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^n(\varepsilon_t^2-h_t)\boldsymbol{Y}_{t-1}=O_p(n^{-1/2}) \tag{14}$$

接下来,考虑 J_{n2},计算得到:

$$\tilde{\varepsilon}_t-\varepsilon_t=[\boldsymbol{\theta}(x_t)-\tilde{\boldsymbol{\theta}}(x_t)]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_{t-1}$$

此外,根据 You 和 Zhou[12],有

$$\max_{1\leqslant t\leqslant n}\|\boldsymbol{\theta}(x_t)-\tilde{\boldsymbol{\theta}}(x_t)\|=O_p(c_n)$$

其中,$c_n=\{(nh)^{-1}\log n\}^{1/2}+h^2$。由此可得:

$$J_{n2}=\Gamma_n^{-1}\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(\tilde{\varepsilon}_t^2-\varepsilon_t^2)\boldsymbol{Y}_{t-1}=O_p(c_n) \tag{15}$$

然后,结合式(13)—式(15),有 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}=\boldsymbol{\beta}+O_p(n^{-1/2}+c_n)$,注意 $n^{-1/2}/c_n\to0$,可以得到 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}=\boldsymbol{\beta}+O_p(c_n)$,这就完成了引理 1 的证明。

引理 2 在条件 C1—C6 下,对于任意给定的 x,有

$$\frac{1}{\sqrt{nh}}\sum_{t=1}^{n}\hat{\varphi}_t(\delta(x))\longrightarrow N(0,v^2(x))$$

其中,$v^2(x)=f(x)\kappa(x)\int K^2(u)\mathrm{d}u$ 并且有 $\kappa(x)=E(h_t|x_t=x)$。

证 明 结合式(12)中 $\hat{\varphi}_t(\delta(x))$ 的定义,可得:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{nh}}\sum_{t=1}^{n}\hat{\varphi}_t(\delta(x))=\\
&\quad\frac{1}{\sqrt{nh}}\sum_{t=1}^{n}[y_t-\delta(x)\hat{h}_t]K_h(x_t-x)=\\
&\quad\frac{1}{\sqrt{nh}}\sum_{t=1}^{n}[y_t-\delta(x_t)h_t]K_h(x_t-x)+\\
&\quad\frac{1}{\sqrt{nh}}\sum_{t=1}^{n}[\delta(x)h_t-\delta(x)\hat{h}_t]K_h(x_t-x)+\\
&\quad\frac{1}{\sqrt{nh}}\sum_{t=1}^{n}[\delta(x_t)-\delta(x)]h_tK_h(x_t-x)=\\
&\quad\frac{1}{\sqrt{nh}}\sum_{t=1}^{n}e_t\sqrt{h_t}K_h(x_t-x)+\\
&\quad\frac{1}{\sqrt{nh}}\sum_{t=1}^{n}[\boldsymbol{\beta}-\tilde{\boldsymbol{\beta}}]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_{t-1}\delta(x)K_h(x_t-x)+\\
&\quad\frac{1}{\sqrt{nh}}\sum_{t=1}^{n}[\delta(x_t)-\delta(x)]\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_{t-1}K_h(x_t-x)\equiv\\
&\quad\frac{1}{\sqrt{nh}}\sum_{t=1}^{n}b_{1t}(x)+\frac{1}{\sqrt{nh}}\sum_{t=1}^{n}b_{2t}(x)+\frac{1}{\sqrt{nh}}\sum_{t=1}^{n}b_{3t}(x)
\end{aligned} \tag{16}$$

注意到,$Var\{(nh)^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}b_{1t}(x)\}=v^2(x)$ 和 $E\{(nh)^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}b_{1t}(x)\}=0$,然后由中心极限定理,可得:

$$\frac{1}{\sqrt{nh}}\sum_{t=1}^{n}b_{1t}(x)\longrightarrow N(0,v^2(x)) \tag{17}$$

接下来将说明 $(nh)^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}b_{2t}(x)=o_p(1)$。基于 Burkholder martingale 不等式和条件 C5,可以得到:

$$\begin{aligned}
&E\left\{\left|\frac{1}{\sqrt{nh}}\sum_{t=1}^{n}b_{2t}(x)\right|^2\right\}=\\
&E\left\{\frac{1}{\sqrt{nh}}\sum_{t=1}^{n}[\boldsymbol{\beta}-\tilde{\boldsymbol{\beta}}]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_{t-1}\delta(x)K_h(x_t-x)\right\}^2\leqslant\\
&c\sum_{i=1}^{n}E\left\{\frac{1}{\sqrt{nh}}[\boldsymbol{\beta}-\tilde{\boldsymbol{\beta}}]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_{t-1}\delta(x)K_h(x_t-x)\right\}^2=\\
&\frac{c}{nh}\sum_{i=1}^{n}E\{[\boldsymbol{\beta}-\tilde{\boldsymbol{\beta}}]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_{t-1}\delta(x)K_h(x_t-x)\}^2=\\
&O(h^{-1})E\{\|\boldsymbol{\beta}-\tilde{\boldsymbol{\beta}}\|^2K_h^2(x_t-x)\}=\\
&O(h^{-1}c_n^2)=o(1)
\end{aligned}$$

这意味着 $(nh)^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}b_{2t}(x)=o_p(1)$。类似地,还有 $(nh)^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}b_{3t}(x)=o_p(1)$,最后,结合式(16)和(17),完成了这个引理的证明。

引理 3 在条件 C1-C6 下,对于真实的非参数 $\delta(x)$,有 $\frac{1}{nh}\sum_{t=1}^{n}\hat{\varphi}_t(\delta(x))^2\xrightarrow{P}v^2(x)$。

证 明 同样使用引理 2 的符号,并表示 $B_{ij}(x)=\frac{1}{nh}\times\sum_{t=1}^{n}b_{it}(x)b_{jt}(x)$;$i,j=1,\cdots,3$;可以得到:

$$\frac{1}{nh}\sum_{t=1}^{n}\hat{\varphi}_t(\delta(x))^2=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}B_{ij}(x)$$

结合遍历性和引理 2 的证明,有

$$B_{11}(x)=\frac{1}{nh}\sum_{t=1}^{n}h_te_t^2K_h^2(x_t-x)\xrightarrow{P}v^2(x)$$

待证明的其他项 $B_{ij}(x)$,$i\neq j$ 和 $B_{ii}(x)$,$i=2,3$ 均在概率上收敛为零。这里首先证明 $B_{12}(x)\xrightarrow{P}0$。

$$\begin{aligned}
&|B_{12}(x)|=\\
&\quad\left\|\frac{1}{nh}\sum_{t=1}^{n}e_th_t^{1/2}[\boldsymbol{\beta}-\tilde{\boldsymbol{\beta}}]\boldsymbol{Y}_{t-1}\delta(x)K_h^2(x_t-x)\right\|\leqslant\\
&\quad\frac{c}{nh}\sum_{t=1}^{n}|h_t^{1/2}e_i|\,\|\boldsymbol{\beta}-\tilde{\boldsymbol{\beta}}\|K_h^2(x_t-x)\xrightarrow{P}\\
&\quad O(h^{-1/2})E\{\|\boldsymbol{\beta}-\tilde{\boldsymbol{\beta}}\|K_h^2(x_t-x)\}=\\
&\quad O(h^{-1/2}c_n)=o(1)
\end{aligned}$$

类似地,可以证明其他项都是 $o_p(1)$。这就完成了这个引理的证明。

定理 1 的证明 结合引理 2 的证明,并使用 Xue 等[11]中使用的类似论证,进而可以证明式子 $\max_{1\leqslant t\leqslant n}|\hat{\varphi}_t(\delta(x))|=o_p((nh)^{-1/2})$ 和 $|\boldsymbol{\lambda}|=O_p((nh)^{-1/2})$,其中 $\boldsymbol{\lambda}$ 在式(9)中被定义。因此有

$$\max_{1\leqslant t\leqslant n}|\boldsymbol{\lambda}\hat{\varphi}_t(\delta(x))|=o_p(1) \tag{18}$$

结合式(18)，并将式(11)使用泰勒展开，得到：

$$R(\delta(x))=2\sum_{t=1}^{n}\{\boldsymbol{\lambda}\hat{\varphi}_t(\delta(x))-[\boldsymbol{\lambda}\hat{\varphi}_t(\delta(x))]^2/2\}+o_p(1) \tag{19}$$

此外，从式(9)可以得出：

$$\sum_{t=1}^{n}\hat{\varphi}_t(\delta(x))-\sum_{t=1}^{n}\hat{\varphi}_t^2(\delta(x))\boldsymbol{\lambda}+\sum_{t=1}^{n}\frac{\hat{\varphi}_t(\delta(x))(\boldsymbol{\lambda}\hat{\varphi}_t(\delta(x)))^2}{1+\boldsymbol{\lambda}\hat{\varphi}_t(\delta(x))}=0 \tag{20}$$

因此，由式(18)和(20)，经过计算得出：

$$\sum_{t=1}^{n}[\boldsymbol{\lambda}\hat{\varphi}_t(\delta(x))]^2=\sum_{t=1}^{n}\boldsymbol{\lambda}\hat{\varphi}_t(\delta(x))+o_p(1) \tag{21}$$

$$\boldsymbol{\lambda}=\left\{\sum_{t=1}^{n}\hat{\varphi}_t^2(\delta(x))\right\}^{-1}\sum_{t=1}^{n}\hat{\varphi}_t(\delta(x))+o_p((nh)^{-1/2}) \tag{22}$$

结合式(19)、式(21)及式(22)，有

$$R(\delta(x))=\left\{\frac{1}{\sqrt{nh}}\sum_{t=1}^{n}\hat{\varphi}_t(\delta(x))\right\}\Lambda_n(\delta(x))^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{nh}}\sum_{t=1}^{n}\hat{\varphi}_t(\delta(x))\right\}+o_p(1)$$

其中，$\Lambda_n(\delta(x))=(nh)^{-1}\sum_{t=1}^{n}\hat{\varphi}_t^2(\delta(x))$。证明了定理 1。

定理 2 的证明　注意 $\hat{\delta}(x)$ 是估计方程式(10)的解，则有

$$0=\sum_{t=1}^{n}[y_t-\hat{\delta}(x)\hat{h}_t]K_h(x_t-x)=\sum_{t=1}^{n}[y_t-\delta(x)\hat{h}_t]K_h(x_t-x) \tag{23}$$

根据式(23)计算可得：

$$\sqrt{nh}(\hat{\delta}(x)-\delta(x))=\left(\frac{1}{nh}\sum_{t=1}^{n}\hat{h}_tK_h(x_t-x)\right)^{-1}\frac{1}{\sqrt{nh}}\sum_{t=1}^{n}[y_t-\delta(x)\hat{h}_t]K_h(x_t-x)=\left(\frac{1}{nh}\sum_{t=1}^{n}\hat{h}_tK_h(x_t-x)\right)^{-1}\frac{1}{\sqrt{nh}}\sum_{t=1}^{n}\hat{\varphi}_t(\delta(x)) \tag{24}$$

引用引理 1，由遍历性，可以证明

$$\frac{1}{nh}\sum_{t=1}^{n}\hat{h}_tK_h(x_t-x)=\frac{1}{nh}\sum_{t=1}^{n}h_tK_h(x_t-x)+\frac{1}{nh}\sum_{t=1}^{n}[\tilde{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_{t-1}K_h(x_t-x)=\frac{1}{nh}\sum_{t=1}^{n}h_tK_h(x_t-x)+O_p(c_n)\xrightarrow{P}f(x)\kappa(x) \tag{25}$$

因此，结合式(24)和式(25)及引理 2，并使用 Slutsky 定理可以得到：

$$\sqrt{nh}(\hat{\delta}(x)-\delta(x))\xrightarrow{L}N(0,\sigma^2(x))$$

由此完成定理 2 的证明。

引理 4　在正则性条件 C1—C6 下，如果 $\boldsymbol{\beta}$ 是非参数的真值，有：

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n}\hat{\boldsymbol{\psi}}_t(\boldsymbol{\beta})\longrightarrow N(0,\boldsymbol{\Psi})$$

其中，$\boldsymbol{\Psi}=E\{h_t^{-1}\delta^2(x_t)\boldsymbol{Y}_{t-1}\boldsymbol{Y}_{t-1}^{\mathrm{T}}\}$。

证　明　结合式(12)中 $\hat{\psi}_t(\boldsymbol{\beta})$ 的定义，可以得到：

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n}\hat{\boldsymbol{\psi}}_t(\boldsymbol{\beta}(x_t))&=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n}\hat{h}_t^{-1}\hat{\delta}(x_t)\boldsymbol{Y}_{t-1}[y_t-\hat{\delta}(x_t)\boldsymbol{\beta}(x_t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_{t-1}]=\\&\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n}\hat{h}_t^{-1}\hat{\delta}(x_t)\boldsymbol{Y}_{t-1}[y_t-\delta(x_t)\boldsymbol{\beta}(x_t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_{t-1}]+\\&\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n}\hat{h}_t^{-1}\hat{\delta}(x_t)\boldsymbol{Y}_{t-1}[\delta(x_t)-\hat{\delta}(x_t)\boldsymbol{\beta}(x_t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_{t-1}]=\\&\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n}h_t^{-1/2}\delta(x_t)\boldsymbol{Y}_{t-1}e_t+\\&\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n}[\hat{h}_t^{-1}\hat{\delta}(x_t)-h_t^{-1}\delta(x_t)]\boldsymbol{Y}_{t-1}\sqrt{h_t}e_t+\\&\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n}\hat{h}_t^{-1}\hat{\delta}(x_t)\boldsymbol{Y}_{t-1}[\delta(x_t)-\hat{\delta}(x_t)\boldsymbol{\beta}(x_t)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}_{t-1}]\equiv\\&\frac{1}{\sqrt{nh}}\sum_{t=1}^{n}B_{1t}+\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n}B_{2t}+\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n}B_{3t}\end{aligned} \tag{26}$$

注意到，式(26)中 $Var\{(n)^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}B_{1t}\}=\boldsymbol{\Psi}$ 和 $E\{(n)^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}B_{1t}\}=0$，则根据中心极限定理，有

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n}B_{1t}\longrightarrow N(0,\boldsymbol{\Psi}) \tag{27}$$

接下来将说明 $(n)^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}B_{2t}=o_p(1)$。由 Abel 不等式可知：

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n}B_{2t}\right\|&=\left\|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n}[\hat{h}_t^{-1}\hat{\delta}(x_t)-h_t^{-1}\delta(x_t)]\boldsymbol{Y}_{t-1}\sqrt{h_t}e_t\right\|\leqslant\\&\frac{c}{\sqrt{n}}\max_{1\leqslant t\leqslant n}\|[\hat{h}_t^{-1}\hat{\delta}(x_t)-h_t^{-1}\delta(x_t)]\boldsymbol{Y}_{t-1}\|\max_{1\leqslant k\leqslant n}\left|\sum_{t=1}^{k}\sqrt{h_t}e_t\right|\end{aligned} \tag{28}$$

结合引理 1 和定理 2，满足条件：

$$\max_{1\leq t\leq n}\| [\hat{h}_t^{-1}\hat{\delta}(x_t)-h_t^{-1}\delta(x_t)]\boldsymbol{Y}_{t-1}\| = O_p(c_n) \quad (29)$$

另外,调用 $E(\sqrt{h_t}e_t)=0$,还可以证明:

$$\max_{1\leq k\leq n}\left|\sum_{t=1}^{k}\sqrt{h_t}e_t\right| = O_p(n^{1/2}) \quad (30)$$

因此,从式(28)—式(30)可得:

$$\|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n}B_{2t}\| \leqslant O_p(n^{-1/2}\cdot n^{1/2}c_n) = o_p(1)$$

类似地,可以证明 $(n)^{-1/2}\sum_{t=1}^{n}B_{3t}=o_p(1)$。然后,结合式(26)和式(27),完成了这个引理的证明。

定理 3 的证明 使用与定理 1 证明相同的论证,可以证明:

$$L(\boldsymbol{\beta}(x)) = \left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n}\hat{\boldsymbol{\psi}}_t(\boldsymbol{\beta}(x))\right\}\Omega_n(\boldsymbol{\beta}(x))^{-1}\times \left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{t=1}^{n}\hat{\boldsymbol{\psi}}_t(\boldsymbol{\beta}(x))\right\} + o_p(1) \quad (31)$$

其中,$\Omega_n(\boldsymbol{\beta}(x)) = n^{-1}\sum_{t=1}^{n}\hat{\boldsymbol{\psi}}_t(\boldsymbol{\beta}(x))\hat{\boldsymbol{\psi}}_t^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\beta}(x))$。

结合引理 4,并使用与引理 3 的证明类似的论证,可以证明 $\Omega_n(\beta)\xrightarrow{p}\Psi$。接着引用式(31)和引理 4,就完成了定理 3 的证明。

6 结 论

本文提出一类双函数系数 ARCH-M 模型,该模型允许金融序列风险影响效应和收益影响效应同时为某一变量的函数,是已有半参数函数系数 ARCH-M 模型的一种推广形式,具有较广的适应性和较强的应用价值。基于经验似然方法的估计过程充分考虑了金融序列的异方差性,具有较好的稳健性和有效性。在一些正则条件下,理论证明了关于风险效应函数系数和收益效应函数系数的经验对数似然比统计量均渐近收敛于中心卡方分布,同时函数系数估计量渐近收敛于正态分布,进而构造了相应函数系数的逐点置信区间。所提出的模型及估计方法为经济金融等领域的统计建模及分析提供了一种参考方法。

参考文献(References):

[1] ENGLE R F, LILIEN D M, ROBINS R P. Estimating time varying risk premia in the term structure: the ARCH - M model[J]. Econometrica, 1987, 55(2): 391—407.

[2] HONG E P. The autocorrelation structure for the GARCH-M process[J]. Economics Letters, 1991, 37(2): 129—132.

[3] BACKUS D, GREGORY A. Theoretical relations between risk premiums and conditional variances[J]. Journal of Business and Economic Statistics, 1988, 11(2): 177—185.

[4] HARVEY C R. The specification of conditional expectations[J]. Social Science Electronic Publishing, 2001, 8(5): 573—637.

[5] LINTON O, PERRON B. The shape of the risk premium: evidence from a semiparametric generalized autoregressive conditional heteroscedasticity model[J]. Journal of Business Economic and Statistics, 2003, 21(3): 354—367.

[6] ZHANG X F, XIONG Q. An alternative estimation for functional coefficient ARCH-M model[J]. Theoretical Economics Letters, 2016, 6(4): 647—657.

[7] LING S Q. Estimation and testing stationarity for double-autoregressive models[J]. Journal of the Royal Statistical Society, 2004, 66(1): 63—78.

[8] XUE L G, ZHU L X. Empirical likelihood for a varying coefficient model with longitudinal data[J]. Journal of the American Statistical Association, 2007, 102 (478): 642—654.

[9] CHUANG C S, CHAN N H. Empirical likelihood for autoregressive models with application to unstable time series[J]. Statistica Sinica, 2002, 12(2): 387—407.

[10] ZHANG X F, WONG H, LI Y. A functional coefficient GARCH-M model[J]. Communications in Statistics-Theory and Methods, 2016, 45(13): 3807—3821.

[11] XUE L G, ZHU L X. Empirical likelihood semiparametric regression analysis for longitudinal data[J]. Biometrika, 2007, 94(4): 921—937.

[12] ZHAO P X, YANG Y P, ZHOU X S. Weighted empirical likelihood inferences for a class of varying coefficient ARCH-M models[J]. Journal of Nonparametric Statistics, 2021, 33(1): 1—20.

[13] ZHAO P X, YANG Y P, ZHOU X S. Empirical likelihood based estimation for a class of functional coefficient ARCH-M models[J]. Communications in Statistics-Theory and Methods, 2020, 49(5): 1217—1231.

[14] 赵培信. 半参数变系数部分线性模型的统计推断[D]. 北京: 北京工业大学, 2010.
ZHAO Pei-xin. Statistical inference of the semiparametric variable coefficient partial linear model[D]. Beijing: Beijing University of Technology, 2010.

[15] YOU J H, ZHOU Y. Empirical likelihood for semiparametric varying-coefficient partially linear regression models[J]. Statistics & Probability Letters, 2006, 76(4): 412—422.

责任编辑:李翠薇