

## 可视情形下具有休假策略的流体排队均衡策略研究

蔡思佳, 叶晴晴

南京信息工程大学 数学与统计学院, 南京 210000

**摘要:**现实生活中, 排队系统中离散顾客的输入流越来越接近连续流体, 利用纳什均衡理论提出具有多重休假策略的M/M/1流体排队模型, 该模型基于个体和管理决策者考虑收益和系统故障不会让系统长期处于工作忙期。当系统中流体容量为空, 系统进入休假阶段, 休假期结束, 若系统内流体容量仍为空, 系统进入下一个休假期, 流体根据提供的信息水平和预期收益决定是否加入系统; 研究系统服务状态和流体长度均已知情形下流体的进队阈值策略和最优社会策略, 在此基础上, 考虑系统服务状态不可知的情形; 研究发现: 是否告知流体系统服务状态, 两者的预期流体服务时间和社会收益不同, 但最优社会策略相同; 利用数值实验分析了不同情况下的最优社会收益和不同系统参数对最优社会收益的影响; 通过对具有多重休假策略的流体排队模型的均衡策略分析, 为个人和政策制定者降低资源损耗和实现最优社会收益提供参考。

**关键词:** 多重休假; 流模型; 纳什均衡; 社会收益; 均衡阈值

**中图分类号:** O226 **文献标识码:** A **doi:** 10.16055/j.issn.1672-058X.2023.0002.012

### Study on Fluid Queuing Equilibrium Strategy with Vacation Strategy under Visual Scenarios

CAI Sijia, YE Qingqing

School of Mathematics and Statistics, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210000, China

**Abstract:** In real life, the input flow of discrete customers in queuing systems is getting closer to a continuous fluid. This paper proposed an M/M/1 fluid queuing model with multiple vacation strategies using Nash equilibrium theory, which was based on the fact that individuals and management decision-makers do not leave the system in a long working busy period considering the benefits and system failures. When the fluid capacity in the system was empty, the system entered the holiday phase and the holiday period ended. If the fluid capacity in the system was still empty, the system entered the next holiday period and the fluid decided whether to join the system based on the level of information provided and the expected benefits. The queue threshold strategy and the optimal social strategy of the fluid were studied when the system service state and fluid length were known. On this basis, the situation where the system service state was not known was considered. It was found that whether the fluid system service status was informed or not, the expected fluid service time and social benefits in these two situations were different, but the optimal social strategies in these two situations were the same. Numerical experiments were used to analyze the optimal social gain under different scenarios and the effect of different system parameters on the optimal social gain. The equilibrium strategy analysis of a fluid queuing model with multiple vacation strategies provides a reference for individuals and policymakers to reduce resource depletion and achieve optimal social gain.

**Keywords:** multiple vacations; fluid model; Nash equilibrium; social benefits; equilibrium threshold

**收稿日期:** 2021-12-20 **修回日期:** 2022-01-14 **文章编号:** 1672-058X(2023)02-0079-06

**基金项目:** 国家自然科学基金(1190107); 江苏省自然科学基金(BK20180783)项目资助。

**作者简介:** 蔡思佳(1998—), 女, 江苏盐城人, 硕士研究生, 从事排队博弈理论研究。

**通讯作者:** 叶晴晴(1989—), 男, 江苏南京人, 博士, 硕士生导师, 从事随机模型和排队理论研究. Email: yeqingzero@gmail.com.

**引用格式:** 蔡思佳, 叶晴晴. 可视情形下具有休假策略的流体排队均衡策略研究[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版), 2023, 40(2): 79—84.

CAI Sijia, YE Qingqing. Study on fluid queuing equilibrium strategy with vacation strategy under visual scenarios[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition), 2023, 40(2): 79—84.

## 1 引言

传统排队的本质是离散排队,即顾客的到达和离开都是非连续事件,然而随着顾客到达时间间隔的缩小和服务台服务率的提高,将离散排队当作流体排队处理变得必要。在流体排队模型中,流体按照某个外部环境中的随机过程连续地流入和流出一个被称为缓冲器的存储设备,外部环境的随机过程被称为驱动系统。流体排队模型已被广泛应用到许多领域,如通信网络、金融、计算机等,流体排队模型理论的研究已经基本成熟。EL-paoumy等<sup>[1]</sup>使用矩阵分析法得到了系统容量为 $N$ 时流体排队模型缓冲器流体的稳态分布表达式;徐秀丽等<sup>[2]</sup>通过经典的Laplace变换得出PH/M/1流体排队模型主要性能指标的表达式;Ammar<sup>[3]</sup>将灾难性故障引入到流体排队模型中,通过概率生成函数研究排队系统的性能;Vijayashree等<sup>[4]</sup>利用第一类修正贝塞尔函数研究了具有故障和修复性质的流体排队模型;Xu等<sup>[5]</sup>基于平衡方程推导了M/PH/1流体队列的平稳联合分布所满足的微分方程。

Naor<sup>[6]</sup>最早从经济角度研究排队模型,首先将博弈论的观点引入排队论,并提出了均衡策略和社会最优策略。排队博弈论认为顾客是否加入排队等待服务是基于个人收益的正负,若个人收益为正,则加入排队,否则止步。Levyn等<sup>[7]</sup>首先提出休假策略,当系统处于闲期,为避免资源浪费,服务员可以进入休假期,在休假期内服务员暂停为顾客提供服务。在多重休假策略下,当系统结束休假,系统中的顾客数为0,则系统进入下一个休假期,否则,进入正规忙期。Yue等<sup>[8]</sup>将不耐烦顾客和多重休假策略引入M/M/1排队模型中,推导出服务器在休假和繁忙时段的系统客户数量的概率生成函数;朱少成等<sup>[9]</sup>根据平衡方程和强马尔可夫性质,研究了具有多级适应性休假的M/M/1排队系统中的平均顾客数和顾客逗留时间。休假策略同样可以引入到流体排队模型中,并可对具有休假策略的流体排队模型进行性能分析。Yu等<sup>[10]</sup>将休假策略和休假中断策略引入到一个多服务台队列驱动的流体队列中,得到了平均库存量的显式表达式;李子坤等<sup>[11]</sup>利用拟生灭过程和矩阵几何解分析了同时具有休假和工作休假策略多服务台流体排队模型的稳态分布。但是,对具有休假策略的流体排队模型进行均衡策略分析的研究并不多。Economou等<sup>[12]</sup>分析了可视情形下服务交替的流排队模型的均衡策略,通过线性微分方程得到系统液位的稳态分布,利用线性效用函数求解客户的加入策略。在此基础上,Wang等<sup>[13]</sup>研究了在逗留时

间和平均队列长度指数形式下的流体均衡策略,服务状态分为忙期、空闲期和工作休假期3种状态。出于实际考虑,为了降低系统空闲率,减少资源浪费,提高流体接受服务的积极性,系统管理者可以根据系统内的流体容量调节系统服务率,当系统中流体容量为空,系统进入休假期,直到流体容量不为空时,系统开始为流体提供服务。

本文将多重休假策略引入到M/M/1流排队模型中,从经济角度研究流体的均衡策略和最优社会策略。文章的其余部分结构如下:第一部分描述具有多重休假策略的流排队模型;第二部分分别研究完全可视和几乎可视情形下流体的个体均衡策略和社会收益函数;第三部分通过数值分析研究不同情况下的最优社会策略并分析不同参数对最优社会策略的影响。

## 2 模型描述

(1) 流体的到达时间间隔服从参数为 $\lambda$ 的泊松流,且缓冲器的容量是无限的。

(2) 缓冲器在正规忙期以 $\mu$ 的速率为流体提供服务,在休假期内,缓冲器暂停服务。缓冲器的运行机制:当缓冲器内的流体容量为空时,缓冲器进入休假状态,且休假时间服从参数为 $\theta$ 的指数分布;当缓冲器休假结束,若缓冲器内的流体容量不为空,则缓冲器进入正规忙期,否则,进入下一个休假期,即缓冲器只存在工作忙期和休假期两个状态。

(3) 假设到达间隔、服务时间以及休假时间是相互独立的,服务规则是先到先服务, $X(t)$ 表示 $t$ 时刻缓冲器内的流体容量,则流模型的净流入率为

$$\frac{dX(t)}{dt} = \begin{cases} \lambda - \mu, & X(t) > 0 \\ (\lambda - \mu)^+, & X(t) = 0 \end{cases}$$

其中, $(\lambda - \mu)^+ = \max(\lambda - \mu, 0)$ 。

(4) 假定 $I(t)$ 表示 $t$ 时刻缓冲器的工作状态, $I(t) = 0$ 表示缓冲器处于休假状态, $I(t) = 1$ 表示缓冲器处于正规忙期。对于具有多重休假的流体排队模型,过程 $\{(X(t), I(t)); t \geq 0\}$ 是一个连续时间的马尔科夫过程。

(5) 假定初始缓冲器的流体容量为0,即 $X(0) = 0$ ,流体是否流入缓冲器取决于其获得的预期个人净收益的正负,流体一旦做出选择,不可以中途退出,流体接受完服务获得的收益为 $R$ ,在缓冲器内逗留的单位时间成本为 $C$ 。并假设 $R > C(1/\mu + 1/\theta)$ ,以保证当 $I(t) = 0$ 时,有流体进入缓冲器接受服务。则若预期个人净收益为正,流体选择进入缓冲器,若预期个人净收益为负,流体止步。

### 3 均衡策略研究

#### 3.1 完全可视情形

完全可视是指当流体到达时,缓冲器的工作状态  $I(t)$  和流体容量  $X(t)$  均可视。为计算流体可获得的预期个人净收益,假定  $S_i(x)$  表示当流体到达时缓冲器服务状态为  $i$ ,流体容量为  $x$  时的逗留时间,则流体的预期个人净收益  $G_i(x)$  为

$$G_i(x) = R - CS_i(x)$$

在完全可视情形下的多重休假流体排队模型中,假设流体到达时缓冲器的工作状态为  $i$ ,流体容量为  $x$ ,流体的逗留时间为

$$S_i(x) = (1-i) \frac{1}{\theta} + \frac{x}{\mu} \quad (1)$$

**定理 1** 在完全可视的 M/M/1 休假流体排队中,存在均衡纯阈值进队策略  $(x_e(0), x_e(1))$ , 其中  $x_e(I(t))$  是方程  $R - CS_i(x) = 0$  的唯一根。当流体到达时,  $t$  时刻观察到的缓冲器状态为  $(X(t), I(t))$ , 若  $X(t) < X_e(I(t))$ , 则流体进入缓冲器等待接受服务; 若  $X(t) > X_e(I(t))$ , 则流体止步; 若  $X(t) = X_e(I(t))$ , 则流体可以选择进入缓冲器, 也可以选择不进入。其中,

$$x_e(0) = \frac{R\mu}{C} - \frac{\mu}{\theta}, x_e(1) = \frac{R\mu}{C}, \text{且 } x_e(0) < x_e(1)。$$

**证明** 由式(1)可知,  $S_i(x)$  关于  $x$  单调递增,  $G_i(x)$  关于  $x$  单调递减, 所以  $G_i(x)$  存在唯一的零点。当  $X(t) < X_e(I(t))$ ,  $G_i(x) > 0$ , 流体流入缓冲器; 当  $X(t) > X_e(I(t))$ ,  $G_i(x) < 0$ , 流体止步; 当  $X(t) = X_e(I(t))$ ,  $G_i(x) = 0$ , 流体可以选择进入, 也可以选择不进入。注意到  $0 \leq x_e(0) < x_e(1)$ , 故在相同的流体容量下, 当缓冲器处于正规忙期时, 流体更愿意流入。

根据之前学者对社会效益的定义, 定义本文的社会效益为服务供应商和所有加入系统的流体总效益。因此, 单位时间的预期社会收益函数可以表示为

$$Z^0(x_e(0), x_e(1)) = \lambda_{\text{eff}} R - CE(x)$$

其中,  $\lambda_{\text{eff}}$  表示流体的有效进入率(即实际服务流体容量),  $E(x)$  表示缓冲期内的平均流体容量。

**定理 2** 在完全可视情形下, 当流体遵循阈值策略  $(x_e(0), x_e(1))$ , 单位时间的预期社会收益  $x_e(0)$  如下:

1) 当  $\lambda > \mu$  时, 有

$$Z^0(x_e(0), x_e(1)) = 0 \quad (2)$$

2) 当  $\lambda = \mu$  时, 有

$$Z^0(x_e(0), x_e(1)) = \mu R - \frac{\lambda C}{\theta} (1 - e^{-\theta x_e(0)/\lambda}) \quad (3)$$

3) 当  $\lambda < \mu$  时, 有

$$Z^0(x_e(0), x_e(1)) = (\lambda(1 - e^{-\frac{\theta x_e(0)}{\lambda}}) + \theta x_e(0) \Gamma(0, \frac{\theta x_e(0)}{\lambda}) \times p_0^f(x) + \lambda p_1^f(x)) R - CE_3^f(x) \quad (4)$$

**证明** 1) 当  $\lambda > \mu$  时, 由图 1 所示: 首先流体容量以  $\lambda$  的速率上升, 若在休假期内, 流体容量可以达到阈值  $x_e(0)$ , 在剩余的休假期内, 流体的速率为 0(即不允许顾客进入), 直到休假期结束, 缓冲器进入正规忙期, 此时流体容量以  $\lambda - \mu$  的速率上升, 当流体容量达到  $x_e(1)$ , 之后流体的有效进入率为  $\mu/\lambda$ , 以确保流体容量稳定在  $x_e(1)$ 。由于  $\lambda > \mu$ , 缓冲器一旦进入正规忙期, 不会再进入休假期, 则  $\lambda_{\text{eff}} = \mu$ ,  $E(x) = x_e(1)$ , 故  $Z^0(x_e(0), x_e(1)) = 0$ , 式(2)得证。

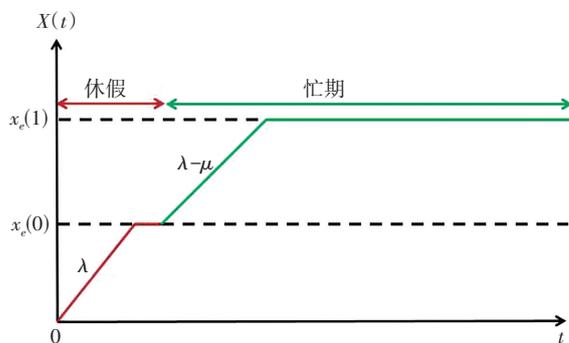


图 1  $\lambda > \mu$  时,  $X(t)$  随时间  $t$  的变化

Fig. 1  $X(t)$  changes with time  $t$  when  $\lambda > \mu$

2) 当  $\lambda = \mu$  时, 若初始缓冲器处于休假期的时间  $t_0 < x_e(0)/\lambda$ , 则休假期结束, 缓冲器内的流体容量为  $\lambda t_0 (< x_e(0))$  (图 2)。反之, 若初始缓冲器处于休假期的时间  $t_0 \geq x_e(0)/\lambda$ , 则休假结束, 缓冲器内的流体容量为  $x_e(0)$  (图 3)。因为  $\lambda = \mu$ , 当缓冲器结束休假进入正规忙期后, 缓冲器内的流体容量将保持不变, 且一直保持忙碌状态, 故  $\lambda_{\text{eff}} = \mu$ , 由于休假时间服从指数分布, 则

$$E(x) = x_e(0) e^{-\theta x_e(0)/\lambda} + \int_0^{x_e(0)/\lambda} \lambda t \cdot \theta e^{-\theta t} dt = \frac{\lambda}{\theta} (1 - e^{-\theta x_e(0)/\lambda})$$

因此式(3)得证。

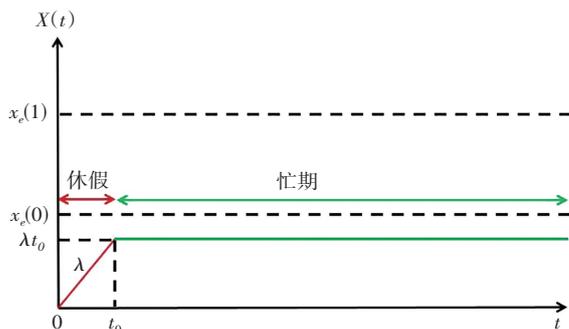


图 2  $\lambda = \mu$  时,  $X(t)$  随时间  $t$  的变化 ( $\lambda t_0 < x_e(0)$ )

Fig. 2  $X(t)$  changes with time  $t$  when  $\lambda = \mu$  ( $\lambda t_0 < x_e(0)$ )

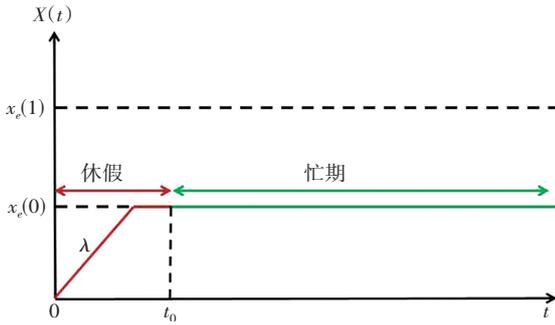


图 3  $\lambda=\mu$  时,  $X(t)$  随时间  $t$  的变化 ( $\lambda t_0=x_e(0)$ )

Fig. 3  $X(t)$  changes with time  $t$  when  $\lambda=\mu$  ( $\lambda t_0=x_e(0)$ )

3) 当  $\lambda < \mu$  时, 如图 4 所示: 流体首先以  $\lambda$  的速率上升, 当缓冲器由休假状态转变为工作状态时, 流体容量以  $\mu - \lambda$  的速率下降, 直到缓冲器内的流体容量为 0, 缓冲器又进入休假状态, 如此循环往复, 故缓冲器的流体容量在  $[0, x_e(0)]$  中振荡。假定  $P_0^{f_0}(x)$  表示在完全可视情况下, 流体容量  $X(t) = x$ , 缓冲器处于休假状态的概率,  $P_1^{f_0}(x)$  表示在完全可视情况下, 流体容量  $X(t) = x$ , 缓冲器处于正规忙期的概率, 则可以得到

$$P_0^{f_0}(x) = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu - \lambda}} (1 - e^{-\theta x_e(0)/\lambda}) + \frac{\int_{x_e(0)/\lambda}^{+\infty} t \theta e^{-\theta t} dt}{\int_{x_e(0)/\lambda}^{+\infty} t \theta e^{-\theta t} dt + \frac{x_e(0)}{\mu - \lambda}} e^{-\theta x_e(0)/\lambda} = \frac{\mu - \lambda}{\mu} (1 - e^{-\theta x_e(0)/\lambda}) + \frac{(\mu - \lambda)(\theta x_e(0) + \lambda) e^{-2\theta x_e(0)/\lambda}}{(\mu - \lambda)(\theta x_e(0) + \lambda) e^{-\theta x_e(0)/\lambda} + \lambda \theta x_e(0)}$$

$$P_1^{f_0}(x) = \frac{\frac{\mu - \lambda}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu - \lambda}} (1 - e^{-\theta x_e(0)/\lambda}) + \frac{\frac{x_e(0)}{\mu - \lambda}}{\int_{x_e(0)/\lambda}^{+\infty} t \theta e^{-\theta t} dt + \frac{x_e(0)}{\mu - \lambda}} e^{-\theta x_e(0)/\lambda} = \frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\theta x_e(0)/\lambda}) + \frac{\lambda \theta x_e(0)}{(\mu - \lambda)(\theta x_e(0) + \lambda) e^{-\theta x_e(0)/\lambda} + \lambda \theta x_e(0)} e^{-\theta x_e(0)/\lambda}$$

$$E_3^{f_0}(x) = \int_0^{x_e(0)/\lambda} \frac{\left(t + \frac{\lambda t}{\mu - \lambda}\right) \lambda t}{2\left(t + \frac{\lambda t}{\mu - \lambda}\right)} \theta e^{-\theta t} dt + \int_{x_e(0)/\lambda}^{+\infty} \frac{\left(t - \frac{x_e(0)}{\lambda} + t + \frac{x_e(0)}{\mu - \lambda}\right) x_e(0)}{2\left(t + \frac{x_e(0)}{\mu - \lambda}\right)} \theta e^{-\theta t} dt = \frac{\theta x_e(0) - \lambda}{2\theta} e^{-\theta x_e(0)/\lambda} + \frac{\lambda}{2\theta} - \frac{\theta \mu x_e(0)^2}{2\lambda(\mu - \lambda)} e^{-\theta x_e(0)/(\mu - \lambda)} \Gamma\left(0, \frac{\mu \theta x_e(0)}{\lambda(\mu - \lambda)}\right)$$

其中,  $\Gamma(s, x) = \int_x^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$ , 由于  $\lambda < \mu$ ,  $\lambda_{\text{eff}} = (\lambda(1 - e^{-\frac{\theta x_e(0)}{\lambda}} + \theta x_e(0) \Gamma(0, \frac{\theta x_e(0)}{\lambda})) P_0^{f_0}(x) + \lambda P_1^{f_0}(x)$ ,  $E(x) = E_3^{f_0}(x)$ , 式 (4) 得证。

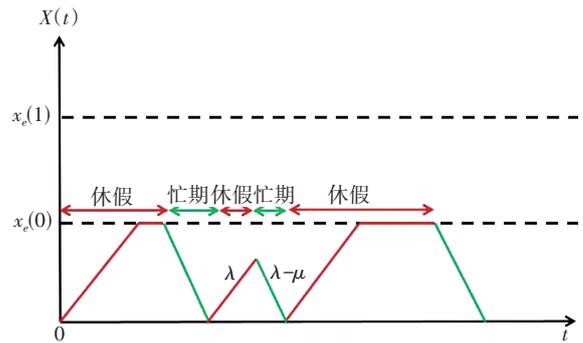


图 4  $\lambda < \mu$  时,  $X(t)$  随时间  $t$  的变化

Fig. 4  $X(t)$  changes with time  $t$  when  $\lambda < \mu$

### 3.2 几乎可视情形

在几乎可视情形下, 流体在  $t$  时刻到达时, 可观察到缓冲器内的流体容量  $X(t)$ , 但对缓冲器的工作状态  $I(t)$  未知。在几乎可视的情况下存在一个阈值  $x_e$ , 即  $x_e = x_e(0) = x_e(1)$ 。当流体到达时, 若观察到流体容量低于阈值  $x_e$ , 则流入缓冲器等待, 若观察到流体容量高于阈值  $x_e$ , 则离开。假定其他流体都遵循给定的阈值策略, 则得到引理 1。

**引理 1** 在几乎可视情形下, 假定  $S_i^{ao}(x)$  表示在流体都遵循给定的阈值策略  $x_e$  下, 流体到达时, 缓冲器内的流体容量为  $x$  时的预期逗留时间, 则有

1) 当  $\lambda \geq \mu$  时,

$$S^{ao}(x, x_e) = \frac{x}{\mu} \tag{5}$$

2) 当  $\lambda < \mu$  时,

$$S^{ao}(x, x_e) = P_0^{ao}(x) \left(\frac{1}{\theta} + \frac{x}{\mu}\right) + P_1^{ao}(x) \frac{x}{\mu} \tag{6}$$

**证 明** 根据全概率公式可得

$$S^{oo}(x, x_e) = \pi_{i|x}(0|x; x_e) S_0(x) + \pi_{i|x}(1|x; x_e) S_1(x)$$

其中,  $\pi_{i|x}(i|x; x_e)$  表示在流体都遵循阈值策略  $x_e$  条件下, 流体到达时观察到缓冲器的流体容量为  $x$ , 缓冲器的工作状态为  $i$  时的概率。

1) 当  $\lambda \geq \mu$  时, 从定理 2 中 1) 和 2) 可知, 缓冲器始终以其最大的服务率来服务流体, 最终缓冲器的工作状态稳定在忙期且不发生变化, 所以  $\pi_{i|x}(1|x; x_e) = 1$ , 式(5)得证。

2) 当  $\lambda < \mu$  时, 同定理 2 中 3) 的证明, 缓冲器的工作状态在休假状态和工作状态交替更新, 假定  $P_0^{oo}(x)$  表示在几乎可视情形下流体容量为  $x$  时, 缓冲器处于休假状态的概率,  $P_1^{oo}(x)$  表示缓冲器处于忙碌状态的概率。因此,  $\pi_{i|x}(0|x; x_e) = P_0^{oo}(x)$ ,  $\pi_{i|x}(1|x; x_e) = P_1^{oo}(x)$ , 式(6)得证。其中,

$$P_0^{oo}(x) = \frac{\mu - \lambda}{\mu} (1 - e^{-\frac{\theta x_e}{\lambda}}) + \frac{(\mu - \lambda)(\theta x_e + \lambda) e^{-\frac{2\theta x_e}{\lambda}}}{(\mu - \lambda)(\theta x_e + \lambda) e^{-\frac{\theta x_e}{\lambda}} + \lambda \theta x_e}$$

$$P_1^{oo}(x) = \frac{\lambda}{\mu} (1 - e^{-\frac{\theta x_e}{\lambda}}) + \frac{\lambda \theta x_e}{(\mu - \lambda)(\theta x_e + \lambda) e^{-\frac{\theta x_e}{\lambda}} + \lambda \theta x_e}$$

**定理 3** 在几乎可视情形下, 同样存在均衡阈值策略  $x_e$ 。当流体到达时, 若  $t$  时刻的流体容量  $X(t) < x_e$ , 则流体的预期个人收益为正, 流体流入缓冲器; 若  $t$  时刻的流体容量  $X(t) > x_e$ , 则流体的预期个人收益为负, 流体止步。

**证 明** 在几乎可视情形下, 流体的预期逗留时间如引理 1 所示, 其关于  $x$  是单调递增的, 则  $G(x)$  也是单调的, 根据单调性和零点存在定理可知, 阈值存在且唯一, 阈值  $x_e$  是方程  $R - CS^{oo}(x, x_e) = 0$  的唯一解。

**定理 4** 在几乎可视的多重休假流体排队模型中, 假定流体都遵循阈值策略  $x_e$ , 单位时间的预期社会效益为

- 1) 当  $\lambda > \mu$  时,  $Z^{oo}(x, x_e) = 0$ ;
- 2) 当  $\lambda = \mu$  时,  $Z^{oo}(x, x_e) = \mu R - \frac{\lambda C}{\theta} (1 - e^{-\frac{\theta x_e(t)}{\lambda}})$ ;
- 3) 当  $\lambda < \mu$  时,  $Z^{oo}(x, x_e) = ((\lambda (1 - \frac{-\theta x_e}{e} + \theta x_e \Gamma(0, \frac{\theta x_e}{\lambda})) p_0^{oo}(x) + \lambda p_1^{oo}(x)) R - CE_3^{oo}(x))$ 。

**证 明** 推理过程同完全可视情形下的定理 2 相似, 故此处省略, 其中,

$$E_3^{oo}(x) = \frac{\theta x_e - \lambda}{2\theta} e^{-\frac{\theta x_e}{\lambda}} + \frac{\lambda}{2\theta}$$

$$\frac{\theta \mu x_e^2}{2\lambda(\mu - \lambda)} e^{\frac{\theta x_e}{\mu - \lambda}} \Gamma\left(0, \frac{\mu \theta x_e}{\lambda(\mu - \lambda)}\right)$$

### 4 数值分析

从上述分析可以得出: 无论是在完全可视情形下还是几乎可视情形下, 两者的最优社会效益都是相等的, 且对应阈值的取值也相同。也就是说, 如果社会管理者只追求最优社会收益, 则在可视情形下, 是否告知流体缓冲器的服务状态并不会产生任何影响。因此, 在此只讨论完全可视情形下的最优社会效益的数值分析。

当  $\lambda > \mu$  时, 在完全可视和几乎可视情形下, 流体的有效进入率  $\lambda_{\text{eff}}$  均为  $\mu$ , 与阈值无关, 且预期社会收益均等于常数 0, 在该情形下, 预期社会收益是一个定值。

当  $\lambda = \mu$  时, 在完全可视和部分可视情形下, 流体的有效进入率  $\lambda_{\text{eff}}$  也与阈值无关,  $\lambda_{\text{eff}} = \mu$ 。在完全可视情形下, 当  $E_3^{oo}(x)$  取最小值时,  $Z^{oo}(x_e(0), x_e(1))$  取最大值, 因此, 单位时间最优社会效益的阈值为  $(x_e(0), x_e(1)) = (0, x)$ , 且  $x > 0$ ; 在几乎可视情形下, 单位时间最优社会效益的阈值为  $x_e = 0$ 。

当  $\lambda < \mu$  时, 在完全可视情形下, 社会效益函数  $Z^{oo}(x_e(0), x_e(1))$  只与阈值  $x_e(0)$  有关, 与阈值  $x_e(1)$  无关, 因此可写成  $Z^{oo}(x_e(0))$ , 由于表达式的复杂性, 通过数值实验来寻找最优社会效益的阈值  $x_e(0)$ , 其中  $R = 15, C = 1, \lambda = 1.5$ 。

图 5、图 6 显示了阈值  $x_e(0)$  对社会收益的影响。单位时间的社会效益呈先增后减的函数关系。这种情况可以解释如下: 流体选择是否进入缓冲器接受服务是基于个人利益, 而流体选择进入缓冲器将对其他流体产生两种影响: 一种效应是它增加了其他流体的逗留时间, 这被称为“负效应”; 另一种作用是减少缓冲器从工作状态变为休假的机会, 即增加缓冲器在正常繁忙时段的时间, 从而减少其他流体逗留的时间, 称为“正效应”。当阈值  $x_e(0)$  较小时, “正效应”将战胜“负效应”, 单位时间内的社会效益函数相对于阈值  $x_e(0)$  单调递增, 直到达到峰值。当阈值足够大时, “负效应”将战胜“正效应”, 单位时间内的社会效益函数相对于阈值  $x_e(0)$  单调递减。此外, 从图 5 中可以看出:  $\theta$  值越大, 说明缓冲器处于休假期的时间越短, 单位时间社会效益峰值越高。由图 6 可以看出:  $\mu$  值越小, 说明正规忙期的服务率越低, 单位时间社会效益峰值越高。

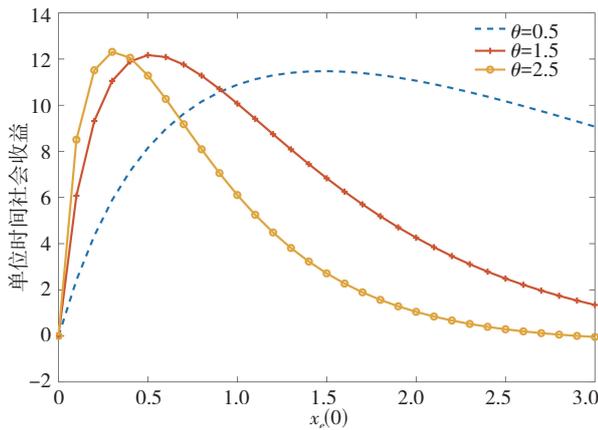


图 5  $\mu=2$  时, 社会收益随  $x_e(0)$  的变化

Fig. 5 Social benefits change with  $x_e(0)$  when  $\mu=2$

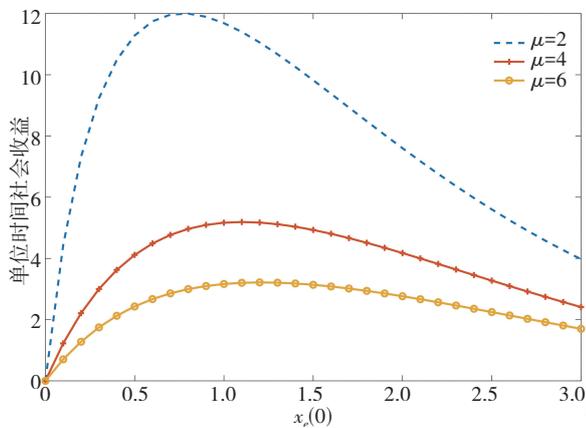


图 6  $\theta=1$  时, 社会收益随  $x_e(0)$  的变化

Fig. 6 Social benefits change with  $x_e(0)$  when  $\theta=1$

## 5 结论

将流体排队模型与多重休假策略相结合, 基于“效用-成本”函数, 研究了完全可视情形和几乎可视情形下的顾客进队策略和个人收益, 并求解出不同情况下单位时间的预期社会收益函数, 最后运用 Matlab 软件进行数值实验计算不同情况下单位时间的最优社会收益和不同系统参数对最优社会收益的影响。研究发现: 流体接收的信息水平不同, 预期社会收益也不同; 在排队长度已知的情形下, 是否告知流体系统的服务状态对最优社会收益无影响。

本研究为个体和管理者降低系统资源损耗和实现最大化收益提供了一定的理论依据, 对通信、计算机等领域的相关决策具有重要意义。本文只研究了完全可视和几乎可视两种情形, 我们将进一步研究几乎不可视和完全不可视。

## 参考文献 (References):

- [1] EL-PAOUMY M S, RADWAN T. A matrix approach for stationary analysis fluid model driven by an M/M/1/N queue with discouraged arrivals[J]. Journal of the Egyptian Mathematical Society, 2020, 28(1): 171—174.
- [2] 徐秀丽, 宋晓凤, 靖欣, 等. PH/M/1 排队系统驱动的流程模型[J]. 系统科学与数学, 2017, 37(3): 838—845.  
XU Xiu-li, SONG Xiao-feng, JING Xin, et al. Fluid model driven by a PH/M/1 queue[J]. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences, 2017, 37(3): 838—845.
- [3] AMMAR S I. Fluid M/M/1 catastrophic queue in random environment[J]. RAIRO Operations Research, 2021, 55: 2677—2690.
- [4] VIJAYASHREE K V, ANJUKA A. Stationary analysis of a fluid queue driven by an M/M/1/N queue with disaster and subsequent repair[J]. International Journal of Operational Research, 2018, 31(4): 461—477.
- [5] XU X L, WANG H N. Analysis of fluid model modulated by an M/PH/1 working vacation queue[J]. Journal of Systems Science and Systems Engineering, 2019, 28(2): 132—140.
- [6] NAOR P. The regulation of queue size by levying tolls[J]. Econometrical, 1969, 37: 15—24.
- [7] LEVYN Y, YECHIALI U. Utilization of idle time in an M/G/1 queueing system[J]. Management Science, 1975, 22: 202—211.
- [8] YUE D Q, YUE W Y, ZHAO G X. Analysis of an M/M/1 queue with vacations and impatience timers which depend on the server's states[J]. Journal of Industrial and Management Optimization, 2016, 12(2): 653—666.
- [9] 朱少成, 刘力维. 带有反馈、启动期、休假中断的多级适应性休假 M/M/1 排队[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版), 2016, 33(5): 1—5.  
ZHU Shao-cheng, LIU Li-wei. M/M/1 queue with feedback, start up, vacation interruption of multi stage adaptive vacation[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University(Natural Science Edition), 2016, 33(5): 1—5.
- [10] YU S L, LIU Z M, WU J B. Fluid queue driven by a multi-server queue with multiple vacations and vacation interruption[J]. RAIRO Operations Research, 2017, 51(4): 931—944.
- [11] 李子坤, 徐秀丽. 两阶段休假 M/M/c 排队驱动的流体模型性能分析[J]. 应用数学, 2021, 34(3): 756—767.  
LI Zi-kun, XU Xiu-li. Performance analysis of the fluid model driven by M/M/c queue with two-stage vacation[J]. Mathematica Applicata, 2017, 51(4): 931—944.
- [12] ECONOMOU A, MANOU A. Strategic behavior in an observable fluid queue with an alternating service process[J]. European Journal of Operational Research, 2016, 254(1): 148—160.
- [13] WANG SH, XU X L. Equilibrium strategies of the fluid queue with working vacation[J]. Operational Research, 2019, 21: 1—18.