多目标博弈加权纳什平衡点集的通用稳定性

杨 林, 丘小玲
贵州大学 数学与统计学院,贵阳 550025

摘 要: 在多目标博弈加权纳什平衡理论基础下,讨论多目标博弈在向量值支付函数伪连续条件下加权纳什平衡点的存在性结果;构建伪连续向量值支付函数的博弈空间,给出加权纳什平衡点的定义,同时定义多目标博弈的集值映射,并证明集值映射是非空的、凸的、usco 映射;应用 Fan-Glicksberg 不动点定理、Fort 定理以及本质平衡点的定义,讨论权向量和支付函数及策略集三者同时扰动下加权纳什平衡点的通有稳定性情况,得出在 Baire 分类意义下,构造的问题是本质的,也即是多目标博弈的加权纳什平衡点具有通有稳定性。
关键词: 多目标博弈;加权纳什平衡点;伪连续;本质解;通有稳定性
中图分类号: O225 **文献标识码:** A doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2023.0001.015

Generic Stability of Weighted Nash Equilibrium Point Sets in Multi-objective Games

YANG Lin, QIU Xiaoling
School of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang 550025, China

Abstract: Based on the theoretical basis of weighted Nash equilibrium in multi-objective games, the existence results of weighted Nash equilibrium points in multi-objective games under the condition that the vector-valued payoff function was pseudo-continuous were discussed. The game space of pseudo continuous vector-valued payment function was constructed, the definition of weighted Nash equilibrium point was given, and the set-valued mapping of multi-objective game was defined, and the set-valued mapping was proved to be non-empty, convex and USCO mapping. By using Fan-Glicksberg fixed point theorem, Fort theorem and the definition of intrinsic equilibrium point, the generic stability of weighted Nash equilibrium point was discussed under simultaneous perturbation of weight vector, payment function and strategy set. It is concluded that in the sense of Baire' s classification, the problem we construct is essential, that is, the weighted Nash equilibrium points in multi-objective games have generic stability.
Keywords: multi-objective game; weighted Nash equilibrium point; pseudo continuity; essential solution; generic stability

1 引 言

Von Neumann 和 Morgenstern 在 1944 年完成的论文《博弈论与经济行为》,把博弈论研究推向系统化和公理化;1950 年,Nash 在论文《Equilibrium Points In n-Person Games》中提出 Nash 平衡的概念,内涵是在其他局中人不改变当前策略时,局中人独自改变自己的策略并不能获得比当前更大的收益,Nash 平衡的研究逐渐成为博弈论研究的核心;多人多目标非合作博弈模型的建立和 Pareto-Nash 平衡策略的提出扩展了博弈论研究领域,多目标博弈也更好地应用于现实生活中,引起很多学者的关注和研究,并取得很多显著成果。

文献[1]利用不动点方法研究 n 人多目标博弈的

收稿日期: 2021-11-05 **修回日期:** 2022-01-14 **文章编号:** 1672-058X(2023)01-0091-06
基金项目: 国家自然科学基金项目(12061020); 贵州省教育厅科学基金(黔科合 KY 字[2021]088 号); 贵州省科技厅科学基金(黔科合基础[2019]1123 号:黔科合-ZK[2021]一般 331); 贵州大学引进人才基金(201811).
作者简介: 杨林(1995—),男,贵州毕节人,硕士研究生,从事博弈论研究.
通讯作者: 丘小玲 (1977—) ,女,广西玉林人,博士,教授,从事博弈论、非线性分析和优化理论研究. Email: xlqiu@gzu.edu.cn.
引用格式: 杨林, 丘小玲. 多目标博弈加权纳什平衡点集的通用稳定性[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版),2023,40(1):91—96.
YANG Lin, QIU Xiaoling. Generic stability of weighted Nash equilibrium point sets in multi-objective games[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition), 2023, 40(1): 91—96.

Pareto-Nash 平衡点和加权纳什平衡点的存在性,并给出了 Pareto-Nash 平衡点存在的几个充分条件,同时阐明了 Pareto-Nash 平衡点与加权纳什平衡点的关系,为以后学者的研究提供了理论依据和方法的实现;文献[2]受文献[1]启发,从不动点理论(Fan-Glicksberg 不动点和 Fan-Browder 不动点)和 Ky Fan 不等式两种途径研究多目标博弈的 Pareto-Nash 平衡点和加权纳什平衡点的存在性,建立了在加权后支付函数连续性和凹性条件下多目标博弈的 Pareto-Nash 平衡点和加权纳什平衡点的存在性结果。关于平衡点的稳定性,许多研究学者已经取得一些成果,文献[3]利用集值分析工具建立了非线性问题解集的通有稳定性框架,讨论了多目标博弈弱 Pareto-Nash 平衡点的通有稳定性;文献[4,5]研究了多目标博弈弱 Pareto-Nash 平衡点的本质连通区及向量拟平衡问题本质解和本质连通区;文献[6-13]得到了一些关于通有稳定性的研究成果。

本文的工作是构建伪连续向量值支付函数的博弈问题空间,给出加权 Nash 平衡点的定义,建立伪连续向量值支付函数下多目标博弈的问题空间,并讨论博弈加权纳什平衡点的存在性,通过定义博弈的集值映射,应用相关定理和引理证明集值映射是非空的、凸的、usco 映射;应用 Fan-Glicksberg 不动点定理、Fort 定理以及本质平衡点定义,讨论权向量和支付函数及策略集三者同时扰动下加权纳什平衡点集的通有稳定性情况。

2 预备知识

本节先回忆一些定义和定理,给出文中需要的若干引理。

定义 1[3] 设 X,Y 是两个拓扑空间,集值映射 $F:X\to P_0(Y)$,其中 $P_0(Y)$ 表示 Y 的所有子集的集合,对 $x\in X$,有

1) 如果对 Y 中的任意开集 G,$G\supset F(x)$(或 $G\cap F(x)\neq\varnothing$),存在 x 的开邻域 $O(x)$,使得 $\forall x'\in O(x)$,有 $G\supset F(x')$(或 $G\cap F(x')\neq\varnothing$),则称集值映射 F 在 x 处是上半连续的(或下半连续的);

2) 如果 F 在 x 处既是上半连续的又是下半连续的,则称集值映射 F 在 x 上是连续的;

3) 如果 $\forall x\in X$,集值映射 F 在 x 上是连续的(或上半连续的,或下半连续的),则 F 在 X 上是连续的(或上半连续的,或下半连续的);

4) 如果 $\forall x\in X$,集值映射 F 是上半连续的,并且 $F(x)$ 是非空紧集,则称集值映射 F 是 usco 映射。

设 Y 是 Hausdorff 拓扑空间,$Q\subset Y$,如果 Q 包含一列在 Y 中稠密开集的交,称 Q 是 Y 中的一个剩余集(residual set)。

定义 2[5] 设 X 是一个拓扑空间,$f:X\to\mathbf{R}$ 是一个实值函数,有

1) 称 f 在 $x_0\in X$ 处是上(弱)伪连续的,如果对所有的 $x\in X$,使得 $f(x_0)<f(x)$,有 $\limsup\limits_{y\to x_0}f(y)<f(x)$ ($\limsup\limits_{y\to x_0}f(y)\leqslant f(x)$);

2) 称 f 在 X 上是上(弱)伪连续的,如果 f 对每一个 $x\in X$ 都是上(弱)伪连续的;

3) 称 f 在 $x_0\in X$ 处是下(弱)伪连续的,如果对所有的 $x\in X$,使得 $f(x)<f(x_0)$,有 $f(x)<\liminf\limits_{y\to x_0}f(y)$ ($f(x)\leqslant\liminf\limits_{y\to x_0}f(y)$);

4) 称 f 在 X 上是下(弱)伪连续的,如果 f 对每一个 $x\in X$ 都是下(弱)伪连续的;

5) 称 f 在 $x\in X$ 处是(弱)伪连续的,如果 f 在 $x\in X$ 处既是上(弱)伪连续的又是下(弱)伪连续的;称 f 在 X 上是(弱)伪连续的,如果 f 在 X 中的每一点 $x\in X$ 处都是(弱)伪连续的。

引理 1 如果 X 是紧 Hausdorff 拓扑空间,函数 $f:X\to\mathbf{R}$ 是上(下)伪连续的,那么函数 f 在 X 上可取到最大(小)值。

引理 2 设 X 和 Y 是两个 Hausdorff 拓扑空间,而 Y 是紧空间,如果集值映射 $F:X\to P_0(Y)$ 是闭的,则 F 在 X 上必是上半连续的。

定理 1(Fan-Glicksberg 不动点定理)[3] 设 X 是一个 Hausdorff 局部凸空间 E 中的非空凸紧集,集值映射 $F:X\to P_0(X)$ 在 X 上是上半连续的,$\forall x\in X$,$F(x)$ 是 X 中的非空闭凸集,则存在 $x^*\in X$,使得 $x^*\in F(x^*)$。

定理 2(Fort 定理)[3] 设 X 是一个 Hausdorff 拓扑空间,Y 是一个度量空间,集值映射 $F:X\to P_0(Y)$ 是一个 usco 映射,则存在 X 中的一个剩余集 Q,使得 $\forall x\in Q$,F 在 x 处是下半连续的,从而是连续的。

定理 3[3] 设 X 是一个 Baire 空间,Y 是一个度量空间,集值映射 $F:X\to P_0(Y)$ 是一个 usco 映射,则存在 X 中的一个稠密剩余集 Q,使得 $\forall x\in Q$,F 在 x 处是下半连续的,从而是连续的。

本文假设 $E_i(\|\ \|_i)$ 是赋范线性空间,$E=E_1\times\cdots\times E_n$,$X_i$ 是 E_i 中的非空凸集,$\forall\boldsymbol{x}=(x^1,\cdots,x^n)\in E$,定义

$\|\boldsymbol{x}\| = (\sum_{i=1}^{n} \|x^i\|^2)^{1/2}$。

接下来考虑多目标博弈模型:

$$G = \{X_i, \boldsymbol{F}^i\}_{i\in N}$$

其中,$N=\{1,2,\cdots,n\}$是局中人集合,$\forall i\in N$,X_i 表示局中人 i 的策略集,$X=\prod_{i=1}^{n} X_i$ 表示博弈的策略组合空间,$\boldsymbol{F}^i=(f_1^i,\cdots,f_{k_i}^i):X\to R^{k_i}$ 称为局中人 i 的向量值支付函数,其中 k_i 为正整数。

在整篇文章中,给定 $m\in N_+$,记

$$R_+^m=\{\boldsymbol{u}=(u^1,\cdots,u^m)\in R^m:u^j\geqslant 0,j=1,\cdots,m\}$$

其拓扑结构是由欧氏距离诱导得到的,内部记为

$$\mathrm{int}\ R_+^m=\{\boldsymbol{u}=(u^1,\cdots,u^m)\in R^m:u^j>0,j=1,\cdots,m\}$$

再记 R_+^m 的单纯形为 T_+^m:

$$T_+^m=\{\boldsymbol{u}=(u^1,\cdots,u^m)\in R_+^m:\sum_{j=1}^{m}u^j=1\}$$

对每个局中人 $i\in N$,记 $X_{\hat{i}}=\prod_{j\in N,j\neq i}X_i$,有

$$\boldsymbol{x}_{\hat{i}}=(x_1,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n)\in X_{\hat{i}}$$

定义 3　称 $\boldsymbol{x}^*=(x_1^*,\cdots,x_n^*)\in X$ 为博弈 $G=\{X_i,\boldsymbol{F}^i\}_{i\in N}$ 的关于权向量 $\boldsymbol{W}=(\boldsymbol{W}^1,\cdots,\boldsymbol{W}^n)$ 的加权 Nash 平衡点,如果对 $\forall i\in N$,有

(1) $\boldsymbol{W}^i\in R_+^{k_i}\setminus\{0\}$;

(2) $\forall y_i\in X_i$,$\boldsymbol{W}^i\cdot\boldsymbol{F}^i(\boldsymbol{x}^*)\geqslant\boldsymbol{W}^i\cdot\boldsymbol{F}^i(y_i,\boldsymbol{x}_{\hat{i}}^*)$,其中符号"·"表示内积运算。

对每个 $i\in N$,$\boldsymbol{W}^i\in R_+^{k_i}\setminus\{0\}$,$\forall\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x}^1,\cdots,\boldsymbol{x}^n)$,$\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{y}^1,\cdots,\boldsymbol{y}^n)\in X$,定义映射 $S^W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}):X\times X\to\mathbf{R}$ 和 $M^W(\boldsymbol{x}):X\to P_0(X)$ 如下:

$$S^W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{W}^i\cdot\boldsymbol{F}^i(y_i,\boldsymbol{x}_{\hat{i}})$$

$$M^W(\boldsymbol{x})=\{\boldsymbol{y}^*\in X:S^W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}^*)=\max_{\boldsymbol{y}\in X}S^W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}$$

引理 3[1]　给定多目标博弈 $G=\{X_i,\boldsymbol{F}^i\}_{i\in N}$,对每个 $i\in N$,$\boldsymbol{W}^i\in R_+^{k_i}\setminus\{0\}$,$\boldsymbol{W}=(\boldsymbol{W}^1,\cdots,\boldsymbol{W}^n)$,则 $\boldsymbol{x}\in X$ 为博弈 G 的关于权 $\boldsymbol{W}$ 的加权 Nash 平衡点的充要条件是 $\boldsymbol{x}$ 为映射 $M^W(\boldsymbol{x})$ 的不动点。

文献[1]的定理 3 考虑了 $S^W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 在 $X\times X$ 上连续和 $S^W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 关于 $\boldsymbol{y}$ 拟凹的条件下博弈 G 的关于权向量 $\boldsymbol{W}$ 的加权 Nash 平衡点,现在,考虑更一般的情况。

定理 4　设 $i\in N$,X_i 是线性赋范空间 E_i 中的非空凸紧集,$X=\prod_{i=1}^{n}X_i$,权向量 $\boldsymbol{W}=(\boldsymbol{W}^1,\cdots,\boldsymbol{W}^n)$,$\boldsymbol{W}^i\in R_+^{k_i}\setminus\{0\}$,如果博弈 G 满足:

(1) $S^W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{W}^i\cdot\boldsymbol{F}^i(y_i,\boldsymbol{x}_{\hat{i}})$ 在 $X\times X$ 上是伪连续的;

(2) $\forall\boldsymbol{x}\in X$,$\boldsymbol{y}\to\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{W}^i\cdot\boldsymbol{F}^i(y_i,\boldsymbol{x}_{\hat{i}})$ 在 X 上是拟凹的,

则博弈 G 至少存在一个关于权 $\boldsymbol{W}$ 的加权 Nash 平衡点。

证明　定义映射

$$M^W(\boldsymbol{x})=\{\boldsymbol{y}^*\in X:S^W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}^*)=\max_{\boldsymbol{y}\in X}S^W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}$$

由定理 1 和引理 3,只需要证明集值映射 $M^W(\boldsymbol{x})$ 是上半连续的紧映射。

既然 $S^W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 在 $X\times X$ 上是伪连续的,根据引理 1,可知 $M^W(\boldsymbol{x})$ 非空,首先证其是闭集,设 $\{\boldsymbol{y}_n\}\subset M^W(\boldsymbol{x})$,$\boldsymbol{y}_n\to\boldsymbol{y}_0$,需证明 $\boldsymbol{y}_0\in M^W(\boldsymbol{x})$。如若 $\boldsymbol{y}_0\notin M^W(\boldsymbol{x})$,则存在 $\boldsymbol{y}_1\in X$,使得 $S^W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1)>S^W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_0)$,由于 $S^W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 在 $X\times X$ 上是上伪连续的,有

$$S^W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1)>\limsup_{y\to y_0}S^W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_n)=\max_{\boldsymbol{y}\in X}S^W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

矛盾。因此 $\boldsymbol{y}_0\in M^W(\boldsymbol{x})$,即 $M^W(\boldsymbol{x})$ 为 X 中的闭子集,又由于 X 为紧集,所以 $M^W(\boldsymbol{x})$ 为紧集。

接着证明 $M^W(\boldsymbol{x})$ 为凸集,设 $\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2\in M^W(\boldsymbol{x})$,$\forall\lambda\in(0,1)$,由定理 4 条件(2),有 $S^W(\boldsymbol{x},\lambda\boldsymbol{y}_1+(1-\lambda)\boldsymbol{y}_2)\geqslant\min\{S^W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1),S^W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_2)\}=\max_{\boldsymbol{y}\in X}\{S^W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}$,因此 $S^W(\boldsymbol{x},\lambda\boldsymbol{y}_1+(1-\lambda)\boldsymbol{y}_2)=\max_{\boldsymbol{y}\in X}\{S^W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\}$,所以 $(\lambda\boldsymbol{y}_1+(1-\lambda)\boldsymbol{y}_2)\in M^W(\boldsymbol{x})$,$M^W(\boldsymbol{x})$ 为凸集。

最后证 $M^W(\boldsymbol{x}):X\to P_0(X)$ 是上半连续的,即证 $\forall\boldsymbol{x}_n\in X$,$\boldsymbol{x}_n\to\boldsymbol{x}$,有 $\forall\boldsymbol{y}_n\in M^W(\boldsymbol{x}_n)$,$\boldsymbol{y}_n\to\boldsymbol{y}$。需要证明 $\boldsymbol{y}\in M^W(\boldsymbol{x})$。反证:假设 $\boldsymbol{y}\notin M^W(\boldsymbol{x})$,则存在 $\boldsymbol{y}_1\in X$,使得 $S^W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1)>S^W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$,由于 $\boldsymbol{y}_k\in M^W(\boldsymbol{x}_k)$,$\forall k\in N_+$,有 $S^W(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{y}_k)\geqslant S^W(\boldsymbol{x}_k,\boldsymbol{y}_1)$,由于 $S^W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 在 $X\times X$ 上是下伪连续的,令 $k\to\infty$,有 $S^W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\geqslant S^W(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1)$,矛盾。因此 $M^W(\boldsymbol{x})$ 是上半连续的。

根据 Fan-Glicksberg 不动点定理,存在点 $\boldsymbol{x}^*$ 使得 $\boldsymbol{x}^*\in M^W(\boldsymbol{x}^*)$,再由引理 3,$\boldsymbol{x}^*$ 为博弈 G 的关于权向量 $\boldsymbol{W}$ 的加权 Nash 平衡点。

3　通有稳定性分析

如前所述,多目标博弈的平衡点存在但是未必是稳定的,并且多目标博弈的稳定性与研究条件有关,不同的条件下会有不同的结论。现在,分别构建多目标博弈在权向量扰动、权向量和支付函数同时扰动、权向量和支付函数以及策略集三者同时扰动情况下的博弈问题空间,定义相应的集值映射,并讨论加权 Nash 平衡点集在权向量和支付函数及策略集三者同时扰动情

况下的稳定性情况。

首先在只考虑权向量扰动情况下构造问题空间：

$Y_1=\{\boldsymbol{W}=(\boldsymbol{W}^1,\cdots,\boldsymbol{W}^n):\boldsymbol{W}^i\in R_+^{k_i}\setminus\{0\},i=1,\cdots,n;\forall i\in N,X_i$ 是 E_i 中的凸紧集；$\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in X,\sum_{i=1}^n\boldsymbol{W}^i\cdot\boldsymbol{F}^i(y_i,\boldsymbol{x}_{\hat{i}})$ 在 $X\times X$ 上是伪连续的；$\forall\boldsymbol{x}\in X,\boldsymbol{y}\to\sum_{i=1}^n\boldsymbol{W}^i\cdot\boldsymbol{F}^i(y_i,\boldsymbol{x}_{\hat{i}})$ 在 X 上是拟凹的。$\}$ (1)

对于 $\forall\boldsymbol{W}_1,\boldsymbol{W}_2\in Y_1$，定义距离 $\rho_1(\boldsymbol{W}_1,\boldsymbol{W}_2)=\sum_{i=1}^n\|\boldsymbol{W}_1^i-\boldsymbol{W}_2^i\|$，则易知 (Y_1,ρ_1) 是完备空间。

再考虑权向量和支付函数同时扰动情况下构造问题空间：

$Y_2=\{\boldsymbol{\varphi}=(\boldsymbol{W},\boldsymbol{F}):\boldsymbol{W}=(\boldsymbol{W}^1,\cdots,\boldsymbol{W}^n):\boldsymbol{W}^i\in R_+^{k_i}\setminus\{0\},i=1,\cdots,n;\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{F}^1,\cdots,\boldsymbol{F}^n):\boldsymbol{F}^i=(f_1^i,\cdots,f_{k_i}^i)$ 在 X 上连续；$\forall i\in N,X_i$ 是 E_i 中的凸紧集；$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in X,\sum_{i=1}^n\boldsymbol{W}^i\cdot\boldsymbol{F}^i(y_i,\boldsymbol{x}_{\hat{i}})$ 在 $X\times X$ 上是伪连续的；$\forall\boldsymbol{x}\in X,\boldsymbol{y}\to\sum_{i=1}^n\boldsymbol{W}^i\cdot\boldsymbol{F}^i(y_i,\boldsymbol{x}_{\hat{i}})$ 在 X 上是拟凹的。$\}$ (2)

对于 $\forall\boldsymbol{\varphi}_1,\boldsymbol{\varphi}_2\in Y_2,\boldsymbol{\varphi}_1=(\boldsymbol{W}_1,\boldsymbol{F}_1),\boldsymbol{\varphi}_2=(\boldsymbol{W}_2,\boldsymbol{F}_2)$，定义距离 $\rho_2(\boldsymbol{\varphi}_1,\boldsymbol{\varphi}_2)=\sum_{i=1}^n\|\boldsymbol{W}_1^i-\boldsymbol{W}_2^i\|+\sup_{x\in X}\sum_{i=1}^n\|\boldsymbol{F}_1^i-\boldsymbol{F}_2^i\|$，显然 (Y_2,ρ_2) 是一个度量空间。

引理 4 考虑权向量和支付函数同时扰动时，(Y_2,ρ_2) 空间是完备度量空间。

证明 设 $\{\boldsymbol{\varphi}_n\}$ 是 Y_2 中的柯西点列，$\{\boldsymbol{\varphi}_n\}=(\boldsymbol{W}_n,\boldsymbol{F}_n)$，即 $\forall\varepsilon>0$，存在正整数 $N(\varepsilon)$，使得 $\forall m,n\geqslant N(\varepsilon)$，使得

$$\rho_2(\boldsymbol{\varphi}_n,\boldsymbol{\varphi}_m)=\sum_{i=1}^n\|\boldsymbol{W}_n^i-\boldsymbol{W}_m^i\|+\sup_{x\in X}\sum_{i=1}^n\|\boldsymbol{F}_n^i-\boldsymbol{F}_m^i\|<\varepsilon$$

因为 $T_+^{k_i}$ 是 Banach 空间，存在 $\boldsymbol{W}^i\in T_+^{k_i},\boldsymbol{W}=(\boldsymbol{W}^1,\cdots,\boldsymbol{W}^n)$，使得 $n\to\infty$ 时，$\boldsymbol{W}_n^i\to\boldsymbol{W}^i$，且有 $\sum_{i=1}^n\|\boldsymbol{W}_m^i-\boldsymbol{W}^i\|<\varepsilon$；又因为 $\boldsymbol{F}_n^i=(f_{n1}^i,\cdots,f_{nk_i}^i)$ 连续，存在 $\boldsymbol{F}^i=(f_1^i,\cdots,f_{k_i}^i)$ 连续，使得当 $n\to\infty$ 时，有 $\boldsymbol{F}_n^i\to\boldsymbol{F}^i$，同时有 $\sup_{x\in X}\sum_{i=1}^n\|\boldsymbol{F}_m^i-\boldsymbol{F}^i\|<\varepsilon$，记 $\boldsymbol{\varphi}=(\boldsymbol{W},\boldsymbol{F})$，现在证明 $\boldsymbol{\varphi}\in Y_2$。

由于 $\{\boldsymbol{\varphi}_n\}\subset Y_2$，即 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in X,\sum_{i=1}^n\boldsymbol{W}_m^i\cdot\boldsymbol{F}_m^i(y_i,\boldsymbol{x}_{\hat{i}})$ 在 $X\times X$ 上连续，令 $m\to\infty$，则有 $\sum_{i=1}^n\boldsymbol{W}^i\cdot\boldsymbol{F}^i(y_i,\boldsymbol{x}_{\hat{i}})$ 在 $X\times X$ 上是连续的。

又有 $\forall\boldsymbol{x}\in X,\boldsymbol{y}\to\sum_{i=1}^n\boldsymbol{W}_m^i\cdot\boldsymbol{F}_m^i(y_i,\boldsymbol{x}_{\hat{i}})$ 在 X 上是拟凹的，即 $\forall\lambda\in(0,1),\forall\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2\in X$，有

$$\sum_{i=1}^n\boldsymbol{W}_m^i\cdot\boldsymbol{F}_m^i(\lambda y_1^i+(1-\lambda)y_2^i,\boldsymbol{x}_{\hat{i}})\geqslant$$
$$\min\{\sum_{i=1}^n\boldsymbol{W}_m^i\cdot\boldsymbol{F}_m^i(y_1^i,\boldsymbol{x}_{\hat{i}}),\sum_{i=1}^n\boldsymbol{W}_m^i\cdot\boldsymbol{F}_m^i(y_2^i,\boldsymbol{x}_{\hat{i}})\}$$

令 $m\to\infty$，$\boldsymbol{W}_m^i\to\boldsymbol{W}^i,\boldsymbol{F}_m^i\to\boldsymbol{F}^i$，可得

$$\sum_{i=1}^n\boldsymbol{W}^i\cdot\boldsymbol{F}^i(\lambda y_1^i+(1-\lambda)y_2^i,\boldsymbol{x}_{\hat{i}})\geqslant$$
$$\min\{\sum_{i=1}^n\boldsymbol{W}^i\cdot\boldsymbol{F}^i(y_1^i,\boldsymbol{x}_{\hat{i}}),\sum_{i=1}^n\boldsymbol{W}^i\cdot\boldsymbol{F}^i(y_2^i,\boldsymbol{x}_{\hat{i}})\}$$

即 $\forall\boldsymbol{x}\in X,\boldsymbol{y}\to\sum_{i=1}^n\boldsymbol{W}^i\cdot\boldsymbol{F}^i(y_i,\boldsymbol{x}_{\hat{i}})$ 在 X 上是拟凹的，于是 $\boldsymbol{\varphi}\in Y_2$，因此 (Y_2,ρ_2) 是完备度量空间。

最后在考虑权向量和支付函数以及策略集三者同时扰动的情况下，构造问题空间：

$Y_3=\{\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{W},\boldsymbol{F},A):\}\boldsymbol{W}=(\boldsymbol{W}^1,\cdots,\boldsymbol{W}^n):\boldsymbol{W}^i\in R_+^{k_i}\setminus\{0\},i=1,\cdots,n;\boldsymbol{F}=(\boldsymbol{F}^1,\cdots,\boldsymbol{F}^n):\boldsymbol{F}^i=(f_1^i,\cdots,f_{k_i}^i)$ 在 X 上连续；$\forall i\in N,A$ 是 X 中的非空凸紧集；$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in X,\sum_{i=1}^n\boldsymbol{W}^i\cdot\boldsymbol{F}^i(y_i,\boldsymbol{x}_{\hat{i}})$ 在 $X\times X$ 上是伪连续的；$\forall\boldsymbol{x}\in X,\boldsymbol{y}\to\sum_{i=1}^n\boldsymbol{W}^i\cdot\boldsymbol{F}^i(y_i,\boldsymbol{x}_{\hat{i}})$ 在 X 上是拟凹的。$\}$ (3)

对于 $\forall\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2\in Y_3$，定义距离 $\rho_3(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)=\sum_{i=1}^n\|\boldsymbol{W}_1^i-\boldsymbol{W}_2^i\|+\sup_{x\in X}\sum_{i=1}^n\|\boldsymbol{F}_1^i-\boldsymbol{F}_2^i\|+H(A_1,A_2)$，其中，$\boldsymbol{u}_1=(\boldsymbol{W}_1,\boldsymbol{F}_1,A_1),\boldsymbol{u}_2=(\boldsymbol{W}_2,\boldsymbol{F}_2,A_2)$。并且 H 是 X 上的 Hausdorff 距离，显然 (Y_3,ρ_3) 是一个度量空间。

引理 5 在权向量和支付函数以及策略集三者同时扰动情况下，(Y_3,ρ_3) 空间是一个完备度量空间。

证明 显然 (Y_3,ρ_3) 是一个度量空间，只需证明 (Y_3,ρ_3) 是完备的。记 $K(X)$ 表示 X 中所有非空紧子集组成的集合，其拓扑是由 E 中范数诱导的 Hausdorff 距离，则 $(K(X),H)$ 是一个完备度量空间。

对于 $\forall A\in K(X)$，记 $Y_0=\{\boldsymbol{\varphi}=(\boldsymbol{W},\boldsymbol{F}):(\boldsymbol{W},\boldsymbol{F},A)\in Y_3\}$，显然 Y_0 是只考虑权向量与支付函数同时扰动时空间 Y_2 中的子集，下面证 Y_0 是闭集。实际上，$\forall\boldsymbol{\varphi}_m\in Y_0$，$\boldsymbol{\varphi}_m=(\boldsymbol{W}_m,\boldsymbol{F}_m),\boldsymbol{\varphi}_m\to\boldsymbol{\varphi}=(\boldsymbol{W},\boldsymbol{F})$，即有 $\boldsymbol{W}_m\to\boldsymbol{W},\boldsymbol{F}_m\to\boldsymbol{F}$，需证 $\boldsymbol{\varphi}\in Y_0$。由 $(\boldsymbol{W}_m,\boldsymbol{F}_m,A)\in Y_3$，$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in X$，$\sum_{i=1}^n\boldsymbol{W}^i\cdot\boldsymbol{F}^i(y_i,\boldsymbol{x}_{\hat{i}})$ 在 $X\times X$ 上连续且对于 $\forall\boldsymbol{x}\in X$，$\boldsymbol{y}\to\sum_{i=1}^n\boldsymbol{W}^i\cdot\boldsymbol{F}^i(y_i,\boldsymbol{x}_{\hat{i}})$ 在 X 上是拟凹的同引理 4 相似的证明，可得 $\varphi=(\boldsymbol{W},\boldsymbol{F})\in Y_0$，即 Y_0 是闭集。再由只考虑权向量和支付函数扰动情况下的空间 Y_2 是完备的，则得 Y_0 是完备的。

记 $Y_3=Y_0\times K(X)$，且 ρ_3 是由权向量和支付函数同时扰动情况下定义的距离和 Hausdorff 距离诱导得到的，既然权向量和支付函数同时扰动情况下的空间和 $(K(X),H)$ 都是完备的，因此 (Y_3,ρ_3) 也是完备的。

引理 6 设 A 和 $A_n(n=1,2,\cdots)$ 是 Hausdorff 拓扑空间 X 的所有非空紧子集，$A_n\to A$，则

(1) $\cup_{n=1}^{+\infty}A_n\cup A$ 也是 X 的非空紧子集;

(2) 如果 $\boldsymbol{x}_n\in A_n,\boldsymbol{x}_n\to\boldsymbol{x}$,那么 $\boldsymbol{x}\in A$。

对于 $\forall\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{W},\boldsymbol{F},A)\in Y$,由 $\boldsymbol{u}$ 可以确定一个权向量为 $\boldsymbol{W}$、支付向量为 $\boldsymbol{F}$、策略集为 A 的多目标博弈,其中,$\forall i\in N$,第 i 个局中人的向量值支付函数为 $\boldsymbol{F}^i$。这样,Y_3 可看作是由权向量和向量值支付函数以及策略集所确定的多目标博弈的集合,是一个博弈空间。$\forall\boldsymbol{u}\in Y_3$,用 $N(\boldsymbol{u})$ 表示权向量为 $\boldsymbol{W}$、支付函数向量为 $\boldsymbol{F}$、策略集为 A 的多目标博弈的所有加权 Nash 平衡点,根据定理 4,$N(\boldsymbol{u})\neq\varnothing$,这样,定义了一个集值映射 N:$Y_3\to P_0(X)$。

定理 5　N 在 Y_3 上是一个 usco 映射。

证明　先证 $N(\boldsymbol{u})$ 是紧集,由于 $N(\boldsymbol{u})$ 表示权向量为 $\boldsymbol{W}$、支付向量为 $\boldsymbol{F}$、策略集为 A 的多目标博弈的所有加权 Nash 平衡点,对于 $\forall\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{W},\boldsymbol{F},A)\in Y_3$,有

$$
\begin{aligned}
N(\boldsymbol{u})&=\{\boldsymbol{x}\in A:\boldsymbol{W}^i\cdot\boldsymbol{F}^i(x_i,\boldsymbol{x}_{\hat{i}})\geqslant\\
&\quad\boldsymbol{W}^i\cdot\boldsymbol{F}^i(y_i,\boldsymbol{x}_{\hat{i}}),\forall\boldsymbol{y}\in A,i=1,\cdots,N\}=\\
&\bigcap_{\boldsymbol{y}\in A}\{\boldsymbol{x}\in A:\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{W}^i\cdot\boldsymbol{F}^i(x_i,\boldsymbol{x}_{\hat{i}})\geqslant\\
&\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{W}^i\cdot\boldsymbol{F}^i(y_i,\boldsymbol{x}_{\hat{i}}),i=1,\cdots,N\}
\end{aligned}
$$

由于 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in X,\boldsymbol{W}^i\cdot\boldsymbol{F}^i(y_i,\boldsymbol{x}_{\hat{i}})$ 在 $X\times X$ 上是上半连续的,因此 $\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in X,\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{W}^i\cdot\boldsymbol{F}^i(y_i,\boldsymbol{x}_{\hat{i}})$ 在 $A\times A$ 上是连续的,所以 $\forall\boldsymbol{y}\in A$,集合 $\{\boldsymbol{x}\in A:\boldsymbol{W}^i\cdot\boldsymbol{F}^i(x_i,\boldsymbol{x}_{\hat{i}})\geqslant\boldsymbol{W}^i\cdot\boldsymbol{F}^i(y_i,\boldsymbol{x}_{\hat{i}})\}$ 是 A 中的闭集,因此 $N(\boldsymbol{u})$ 是 A 中的闭集,由于 A 是紧集,所以 $N(\boldsymbol{u})$ 是紧集。

接着证明 $N(\boldsymbol{u})$ 在 Y_3 上是一个上半连续的映射。反证:假设存在 $\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{W},\boldsymbol{F},A)\in Y_3$,使得 N 在 $\boldsymbol{u}$ 处不是上半连续的,则存在 X 中的一个开集 $G\supset N(\boldsymbol{u})$,使得对 $m=1,2,\cdots,\boldsymbol{u}$ 的每个开邻域 $U_m(\boldsymbol{u})=\{\boldsymbol{u}'=(\boldsymbol{W}',\boldsymbol{F}',A')\in Y_3,\rho_3(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u}')<\frac{1}{m}\}$,存在 $\boldsymbol{u}_m=(\boldsymbol{W}_m,\boldsymbol{F}_m,A_m)\in U_m(\boldsymbol{u})$,$\boldsymbol{x}_m\in N(\boldsymbol{u}_m)$,但 $\boldsymbol{x}_m\notin G$。既然 $\boldsymbol{u}_m=(\boldsymbol{W}_m,\boldsymbol{F}_m,A_m)$ 对每个 $m=1,2,\cdots$ 都成立,有 $\rho_3(\boldsymbol{u}_m,\boldsymbol{u})\to0(m\to\infty)$,即 $\boldsymbol{W}_m\to\boldsymbol{W},\boldsymbol{F}_m\to\boldsymbol{F},A_m\to A$。由于 $\boldsymbol{x}_m\in N(\boldsymbol{u}_m)$,即 $\boldsymbol{x}_m\in A_m$,且 $\forall\boldsymbol{y}\in A_m,\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{W}_m^i\cdot\boldsymbol{F}_m^i(x_i^m,\boldsymbol{x}_{\hat{i}}^m)\geqslant\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{W}_m^i\cdot\boldsymbol{F}_m^i(y_i,\boldsymbol{x}_{\hat{i}}^m)$。

由引理 6,$\cup_{n=1}^{+\infty}A_n\cup A$ 是紧集,$\{\boldsymbol{x}_m\}_{m=1}^{+\infty}\subset\cup_{n=1}^{+\infty}A_n\cup A$,不失一般性,设 $\boldsymbol{x}_m\to\boldsymbol{x}^*\in A$,然而,$\boldsymbol{x}_m\notin G$,因此 $\boldsymbol{x}^*\notin G$。

对于 $\forall\boldsymbol{y}\in A$,既然 $A_n\to A$,存在序列 $\{_m\}_{m=1}^{+\infty}$,使得 $\boldsymbol{y}_m\in A_m,\boldsymbol{y}_m\to\boldsymbol{y}$。又由于 $\forall\boldsymbol{y}_m\in A_m$,因此 $\forall\boldsymbol{y}\in A_m$,有

$$
\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{W}_m^i\cdot\boldsymbol{F}_m^i(x_i^m,\boldsymbol{x}_{\hat{i}}^m)\geqslant\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{W}_m^i\cdot\boldsymbol{F}_m^i(y_i^m,\boldsymbol{x}_{\hat{i}}^m)
$$

由于 $\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{W}_m^i\cdot\boldsymbol{F}_m^i(y_i^m,\boldsymbol{x}_{\hat{i}}^m)$ 在 $X\times X$ 连续,$\boldsymbol{x}_m\to\boldsymbol{x}^*$,$\boldsymbol{y}_m\to\boldsymbol{y}$,且 $\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{W}_m^i\cdot\boldsymbol{F}_m^i(y_i^m,\boldsymbol{x}_{\hat{i}}^m)\to\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{W}^i\cdot\boldsymbol{F}^i(y_i,\boldsymbol{x}_{\hat{i}})$ 有 $\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{W}^i\cdot\boldsymbol{F}^i(x_i^*,\boldsymbol{x}_{\hat{i}}^*)\geqslant\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{W}^i\cdot\boldsymbol{F}^i(y_i,\boldsymbol{x}_{\hat{i}}^*)$,于是得出 $\boldsymbol{x}^*\in N(\boldsymbol{u})\subset G$。矛盾,因此 N 在 Y_3 上是上半连续的。由定义 1 可得 N 在 Y_3 上是一个 usco 映射。

定义 4[3]　$\forall\boldsymbol{u}\in Y_3,\boldsymbol{x}\in N(\boldsymbol{u})$,如果对 $\boldsymbol{x}$ 的任意开邻域 $U(\boldsymbol{x})$,存在 $\boldsymbol{u}$ 的开邻域 $O(\boldsymbol{u})$,使得 $\forall\boldsymbol{u}'\in O(\boldsymbol{u})$,$\exists\boldsymbol{x}'\in N(\boldsymbol{u}')$,而 $\boldsymbol{x}'\in U(\boldsymbol{x})$,则称 $\boldsymbol{x}$ 为多目标问题 $\boldsymbol{u}$ 的本质解。如果 $\forall\boldsymbol{x}\in N(\boldsymbol{u})$,$\boldsymbol{x}$ 都是多目标问题 $\boldsymbol{u}$ 的本质解,则称多目标问题 $\boldsymbol{u}$ 是本质的;如果 $\exists\boldsymbol{x}\in N(\boldsymbol{u})$,而 $\boldsymbol{x}$ 是本质的,则称多目标问题 $\boldsymbol{u}$ 是弱本质的。

定理 6　(1) 多目标问题 $\boldsymbol{u}$ 是本质的当且仅当集值映射 N:$Y_3\to P_0(X)$ 在 $\boldsymbol{u}$ 上是下半连续的;

(2) 多目标问题 $\boldsymbol{u}$ 是弱本质的当且仅当集值映射 N:$Y_3\to P_0(X)$ 在 $\boldsymbol{u}$ 上是弱下半连续的。

证明　只证(1)。必要性:由于 $\boldsymbol{u}\in Y_3$,对任何 X 中的开集 G,$G\cap N(\boldsymbol{u})\neq\varnothing$,在集合 G 中取 $\boldsymbol{x}\in G\cap N(\boldsymbol{u})$,则 G 是 $\boldsymbol{x}$ 的开邻域,因问题 $\boldsymbol{u}$ 是本质的,故 $\boldsymbol{x}\in N(\boldsymbol{u})$ 必是本质的,存在 $\boldsymbol{u}$ 的开邻域 $O(\boldsymbol{u})$,使得 $\forall\boldsymbol{u}'\in O(\boldsymbol{u})$,$\exists\boldsymbol{x}'\in N(\boldsymbol{u}')$,而 $\boldsymbol{x}'\in G$。这样 $G\cap N(\boldsymbol{u})\neq\varnothing$,集值映射 N:$Y_3\to P_0(X)$ 在 $\boldsymbol{u}$ 下是下半连续的。

充分性:$\forall\boldsymbol{u}\in Y_3$,$\forall\boldsymbol{x}\in N(\boldsymbol{u})$,对 $\boldsymbol{x}$ 的任意开邻域 $U(\boldsymbol{x})$,有 $N(\boldsymbol{u})\cap U(\boldsymbol{x})\neq\varnothing$。因集值映射 N:$Y_3\to P_0(X)$ 在 $\boldsymbol{u}$ 下是下半连续的,存在 $\boldsymbol{u}$ 的开邻域 $O(\boldsymbol{u})$,$\forall\boldsymbol{u}'\in O(\boldsymbol{u})$,$N(\boldsymbol{u}')\cap U(\boldsymbol{x})\neq\varnothing$,取 $\boldsymbol{x}'\in N(\boldsymbol{u}')\cap U(\boldsymbol{x})$,则 $\boldsymbol{x}'\in N(\boldsymbol{u})$,而 $\boldsymbol{x}'\in U(\boldsymbol{x})$,且 $\boldsymbol{x}$ 是本质的,从而问题 $\boldsymbol{u}$ 是本质的。

定理 7　$\forall i\in N$,存在 Y_3 的一个稠密剩余集 Q,使得 $\forall\boldsymbol{u}\in Q$,多目标博弈的问题 $\boldsymbol{u}$ 都是本质的。

证明　因 Y_3 是一个完备度量空间,因而是一个 Baire 空间,而 X 是一个度量空间,根据定理 5,集值映射 N:$Y_3\to P_0(X)$ 是一个 usco 映射,于是由 Fort 定理,存在 Y_3 的一个稠密剩余集 Q,使得 $\forall\boldsymbol{u}\in Q$,集值映射 N 在 $\boldsymbol{u}$ 处是下半连续的。再由定理 6,$\forall\boldsymbol{u}\in Q$,多目标博弈的问题 $\boldsymbol{u}$ 都是本质的。

定理 8　$\forall\boldsymbol{u}\in Y_3$,如果 $N(\boldsymbol{u})=\{\boldsymbol{x}\}$,多目标博弈的问题 $\boldsymbol{u}$ 必是本质的。

证明 对任何 X 中的开集 $G,G\cap N(\boldsymbol{u})\neq\varnothing$,因 $N(\boldsymbol{u})=\{\boldsymbol{x}\}$,则 $\boldsymbol{x}\in G$,从而 $G\supset N(\boldsymbol{u})$。由定理5,集值映射 N 在 $\boldsymbol{u}$ 上是一个上半连续映射,存在 $\boldsymbol{u}$ 的开邻域 $O(\boldsymbol{u})$,使得 $\forall \boldsymbol{u}'\in O(\boldsymbol{u})$,有 $G\supset N(\boldsymbol{u}')$,于是 $G\cap N(\boldsymbol{u}')\neq\varnothing$,集值映射 N 在 $\boldsymbol{u}$ 上是一个下半连续映射。再由定理6,多目标博弈的问题 $\boldsymbol{u}$ 必是本质的。

注1 $\forall \boldsymbol{u}\in Y_3$,因 Q 在 Y_3 中是稠密的,则 $\boldsymbol{u}$ 可以由多目标博弈的本质问题做任意的逼近。也即在 Baire 分类意义下,对大多数的多目标博弈问题 $\boldsymbol{u}\in Y_3$,其问题 $\boldsymbol{u}$ 都是本质的,或者说多目标博弈问题 $\boldsymbol{u}$ 是本质的,是 Y_3 上通有的性质。

推论1 $\forall i\in N$,存在 Y_3 的一个稠密剩余集 Q,使得 $\forall \boldsymbol{u}\in Q$,其多目标博弈的弱 Pareto-Nash 平衡点都是本质的。

4 结 论

根据文献[3]提出的通有稳定性思想框架,在多目标博弈加权纳什平衡点在向量值支付函数连续条件下具有通有稳定性的基础上,提出向量值支付函数伪连续的情况,构建了问题空间,讨论了多目标博弈加权纳什平衡点的存在性结果,并应用定理与引理推导权向量和支付函数以及策略集三者同时扰动情况下加权纳什平衡点的通有稳定性情况,得出在 Baire 分类意义下,所构造的问题都是本质的,即多目标博弈加权纳什平衡点具有通有稳定性的结论。

参考文献(References):

[1] WANG S Y. Existence of a Pareto equilibrium[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1993, 79(2): 373—384.

[2] YU J, YUAN X Z. The study of Pareto equilibria for multi-objective games by fixed point and Ky Fan minimax inequality methods[J]. Computers & Mathematics with Applications, 1998, 35(9): 17—24.

[3] 俞建. 博弈论与非线性分析[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
YU Jian. Game theory and nonlinear analysis[M]. Beijing: Science Press, 2008.

[4] YANG H. Essential components of the set of weakly Pareto-Nash equilibrium points[J]. Applied Mathematics Letters, 2002, 15(5): 553—560.

[5] MORGAN J, SCALZO V. Pseudo-continuity functions and existence of Nash equilibria[J]. Journal of Mathematical Economics, 2007, 43(2): 174—183.

[6] 杨辉, 俞建. 向量拟平衡问题的本质解及解集的本质连通区[J]. 系统科学与数学, 2004, 24(1): 76—86.
YANG Hui, YU Jian. Essential solutions and essential components of solutions set of vector quasi-equilibrium problems[J]. System Science and Mathematics, 2004, 24(1): 76—86.

[7] 向淑文, 杨辉. 集值映象的图象拓扑与不动点的通有稳定性[J]. 应用数学学报, 2001, 24(2): 221—226.
XIANG Shu-wen, YANG Hui. The graph topology of set-valued mappings and the generic stability of fixed points[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2001, 24(2): 221—226.

[8] 彭定涛, 曹素元. 上图像拓扑与多目标优化问题加权解的通有稳定性[J]. 运筹学学报, 2006, 10(4): 81—88.
PENG Ding-tao, CAO Su-yuan. Generic stability of solutions in weighted multi-objective optimization problems in epigraph topology case[J]. Operations Research Transactions, 2006, 10(4): 81—88.

[9] 王美强, 向淑文. 多目标最优化问题加权解的通有稳定性[J]. 广西师范大学学报(自然科学版), 2000, 18(3): 31—34.
WANG Mei-qiang, XIANG Shu-wen. Universal stability of weighted solutions for multi-objective optimization problems[J]. Journal of Guangxi Normal University (Natural Science Edition), 2000, 18(3): 31—34.

[10] 罗群. 集值映射的 Nash 平衡点集的通有稳定性[J]. 数学学报, 2003, 46(5): 925—930.
LUO Qun. Generic stability of Nash equilibria for set-valued mappings[J]. Acta Mathematica, 2003, 46(5): 925—930.

[11] 俞建. 博弈论选讲[M]. 北京: 科学出版社, 2014.
YU Jian. Game theory[M]. Beijing: Science Press, 2014.

[12] 闫爱玲, 向淑文. 半连续函数的通有连续性[J]. 贵州大学学报(自然科学版), 2005, 22(1): 7—9.
YAN Ai-ling, XIANG Shu-wen. Generic continuity of semicontinuous function[J]. Journal of Guizhou University (Natural Science Edition), 2005, 22(1): 7—9.

[13] 杨辉. 非线性问题: 良定性、通有稳定性及本质连通区[D]. 杭州: 浙江大学, 2002.
YANG Hui. Nonlinear problems: well-posedness, generic stability and essential components[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2002.

责任编辑:李翠薇