

doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2022.0006.010

# 一种带有灾难和伯努利机制的 M/M/1 队列

陈 潜<sup>1</sup>, 刘力维<sup>1</sup>, 闫俊娜<sup>2</sup>

(1. 南京理工大学 理学院, 南京 210094; 2. 安阳学院 数理学院, 河南 安阳 455000)

**摘 要:**针对带有灾难和伯努利机制的模型在实际生活中的应用问题,提出了一种伯努利机制下具有灾难、延迟维修、反馈和休息的单工作台队列。当工作台运行时,灾难才会影响系统,此时,系统需要被维修,在场的所有顾客从系统中永远离开;工作人员对顾客完成一次服务后,可以选择休假或者继续服务;而接受这次服务的顾客,离开系统或者回到队首等待下次服务。利用马氏链方法,对稳态下系统进行分析,得到平衡方程;对平衡方程求解,导出稳态下队列中顾客人数的 PGF,工作人员分别处于休假期、忙期、延迟期、维修期和空闲期的概率;根据强马尔可夫性求出稳态下逗留时间的分布;最后利用数值实验解释一些参数对系统中平均顾客人数的影响,验证了模型与方法的正确性。

**关键词:**灾难;伯努利机制;延迟维修;强马尔可夫性

中图分类号:O226

文献标志码:A

文章编号:1672-058X(2022)06-0079-08

## 0 引 言

日常生活中到处都可看见队列的身影,小到面包店,大到火车站、飞机场,排队模型都发挥着不可或缺的作用。现今,工业、互联网、通讯、高新科技等发展迅速,灾难类排队模型的应用也越发普及。系统的运行不是一帆风顺的,灾难发生会使系统失去工作能力,所有顾客从系统中永远离开。Yang 等<sup>[1]</sup>考虑一个带有清除机制的系统,首次将清除机制命名为“灾难”,求出系统队长分布;Sudhesh 等<sup>[2]</sup>在文献[1]的基础上研究了一类具有系统灾难的离散时间 G/G/1 队列,导出系统中顾客人数的瞬态概率

和稳态概率。文献[1,2]对于灾难类排队模型的发展和作用起到了重要作用,但是对于系统发生灾难后需要维修的情况考虑不全面。

灾难的发生意味着系统需要被维修。Economou 等<sup>[3]</sup>研究了一个可修的 M/M/1 队列,文中工作台发生故障无需等待就会得到维修,维修后会恢复其工作能力,使得维修在排队模型中被广泛研究。实际情况下,修理工到达后才可维修系统,即延迟维修;Yu 等<sup>[4]</sup>在文献[3]的基础上考虑带有延迟维修的 M/M/1 队列,证明了稳态存在的充要条件,使得维修状态更加贴合实际;Rao 等<sup>[5]</sup>研究两阶段马尔可夫延迟维修排队模型,服务器在服务的任何阶段均可能出现故障,求出系统不同状态下队列

收稿日期:2021-11-10;修回日期:2021-12-24.

基金项目:国家自然科学基金(61773014);河南省高等学校重点科研项目(20B110002).

作者简介:陈潜(1996—),男,安徽滁州人,学生,硕士研究生,从事排队论研究.

通讯作者:刘力维(1960—),男,南京人,教授,博士,从事排队论研究. Email:lwliu@njust.edu.cn.

长度的均值和损失率,扩充故障和延迟维修在系统中的范围。但上述文献对于工作人员休假情况研究不深入。

系统的工作必须由人指挥,注定需要安排工作人员休息。Keilson 等<sup>[6]</sup>引入 Bernoulli GI/G/1 休假模型,证明穷举服务的分解结果可扩展到伯努利休假模型中;Arivudainambi 等<sup>[7]</sup>研究了带有伯努利休假的重试队列,给出稳态的充要条件,在模型求解过程中借用辅助变量法,使得模型求解更加便捷;徐金萍等<sup>[8]</sup>研究了带有伯努利休假的 M/M/1 队列,借助拟生灭理论,得出相关的概率表达式,为休假模型中拟生灭理论的应用作出了推广。

工作人员出错或系统卡顿会使当前的服务出现问题,这时就需要反馈机制发挥作用。反馈指顾客经过一次服务后没有离去,而是回到队首等待下次服务。潘致锋等<sup>[9]</sup>分析一个带有伯努利反馈机制的队列,借助马氏链方法,求解了稳态下系统中顾客数的表达式,给出了逗留时间的 LST(拉普拉斯变换),推广了马氏链的应用;Bouchentouf 等<sup>[10]</sup>分析一个伯努利反馈队列,导出了工作台处于忙期时系统队长的显式表达式;Shweta<sup>[11]</sup>研究离散时间下带有反馈的队列,使用生成函数法求出了系统和重试轨道的队列长度;Ye 等<sup>[12]</sup>在文献[1,3,6]的基础上研究了伯努利休假下具有灾难和维修的单服务台队列,求出了稳态队长的分布和一些性能指标,但模型仍然不够完善,还需补充。

综上所述,为了使带有灾难的排队模型更加完善贴合现实;本文在带有灾难和伯努利机制的队列中加入了延迟维修和反馈状态;利用马氏链方法和强马尔可夫性,求出相应的性能指标,使其具有更广泛的意义和应用价值。

### 1 模型描述

研究一个伯努利机制下具有灾难、延迟维修、反馈和休假的 M/M/1 队列。顾客按强度为  $\lambda$  的泊松流到达,工作人员对系统最前端的顾客完成一次服

务时,休假的概率为  $q(0 < q < 1)$ ,继续服务的概率为  $p(p = 1 - q)$ ;系统中顾客全部离去后,工作人员转为空闲状态,顾客按先到先服务的原则接受服务,经过服务后,按照概率  $k(0 < k < 1)$  回到队首,按照概率  $m(m = 1 - k)$  离开系统;后到的顾客排在队伍的后端等待前面的顾客离去才可接受服务。灾难可以在系统忙期时爆发,此时所有顾客必须永远离开。如果灾难发生,工作台必须接受维修,但是需要等待修理工的到来(延迟时间)。服务时间、休假时间、灾难到达间隔、延迟时间和维修时间是独立随机变量,均服从指数分布,其参数分别为  $\mu, \eta, \alpha, \beta$  和  $\gamma$ 。维修完成后系统队列中若不为空,则工作人员转为忙期,反之工作人员转为空闲状态。

$t$  时刻系统工作人员的状态和人数分别用  $I(t)$  和  $N(t)$  表示,对上述排队系统可构建二维连续时间的马尔可夫链  $\{(I(t), N(t), t \geq 0)\}$ 。状态空间  $\Omega = \{(i, n) \mid i = 0, 2, 3; j = 1, 2, 3, \dots; n = 0, 1, 2, \dots\}$ , 其中

$$I(t) = \begin{cases} 0, & \text{休假期} \\ 1, & \text{忙期} \\ 2, & \text{延迟期} \\ 3, & \text{维修期} \end{cases}$$

状态转移率图如图 1 所示,(4,0)对应空闲状态。

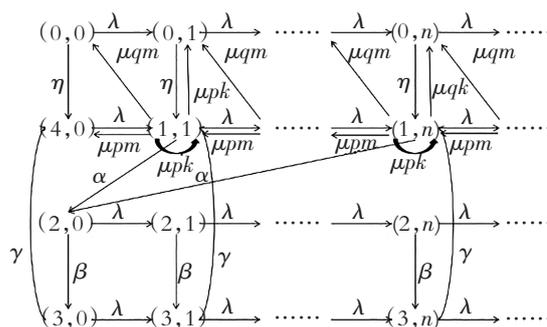


图 1 状态转移率图

Fig. 1 The diagram of state transfer rate

### 2 稳态分布与系统队长

系统稳态存在可由灾难的性质分析得出,故定义稳态概率:

$$\begin{aligned} \pi_{0,n} &= \lim_{t \rightarrow \infty} P\{I(t) = 0, N(t) = n\}, n \geq 0 \\ \pi_{1,n} &= \lim_{t \rightarrow \infty} P\{I(t) = 1, N(t) = n\}, n \geq 1 \\ \pi_{2,n} &= \lim_{t \rightarrow \infty} P\{I(t) = 2, N(t) = n\}, n \geq 0 \\ \pi_{3,n} &= \lim_{t \rightarrow \infty} P\{I(t) = 3, N(t) = n\}, n \geq 0 \\ \pi_{4,0} &= \lim_{t \rightarrow \infty} P\{I(t) = 4, N(t) = 0\} \end{aligned}$$

可得出平衡方程,如式(1)一式(9)所示。

$$(\lambda + \eta) \pi_{0,0} = \mu q m \pi_{1,1} \quad (1)$$

$$(\lambda + \eta) \pi_{0,n} = \mu q m \pi_{1,n+1} + \mu q k \pi_{1,n} + \lambda \pi_{0,n-1}, n \geq 1 \quad (2)$$

$$\lambda \pi_{4,0} = \mu p m \pi_{1,1} + \eta \pi_{0,0} + \gamma \pi_{3,0} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu + \alpha) \pi_{1,1} &= \\ \mu p m \pi_{1,2} + \mu p k \pi_{1,1} + \eta \pi_{0,1} + \gamma \pi_{3,1} + \lambda \pi_{4,0} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu + \alpha) \pi_{1,n} &= \\ \mu p m \pi_{1,n+1} + \mu p k \pi_{1,n} + \eta \pi_{0,n} + \gamma \pi_{3,n} + \lambda \pi_{1,n-1}, n \geq 2 \end{aligned} \quad (5)$$

$$(\lambda + \beta) \pi_{2,0} = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \pi_{1,n} \quad (6)$$

$$(\lambda + \beta) \pi_{2,n} = \lambda \pi_{2,n-1}, n \geq 1 \quad (7)$$

$$(\lambda + \gamma) \pi_{3,0} = \beta \pi_{2,0} \quad (8)$$

$$(\lambda + \gamma) \pi_{3,n} = \lambda \pi_{3,n-1} + \beta \pi_{2,n}, n \geq 1 \quad (9)$$

由正则化条件式(10):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_{0,n} + \sum_{n=1}^{\infty} \pi_{1,n} + \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{2,n} + \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{3,n} + \pi_{4,0} = 1 \quad (10)$$

定义一些母函数:

$$G_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{0,n} z^n, G_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi_{1,n} z^n$$

$$G_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{2,n} z^n, G_3(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{3,n} z^n$$

故式(10)可表示为式(11):

$$G_0(1) + G_1(1) + G_2(1) + G_3(1) + \pi_{4,0} = 1 \quad (11)$$

将式(2)乘以  $z^n$ , 并对  $n$  从 1 到  $\infty$  求和, 再加上式(1)可得式(12):

$$G_0(z) = \frac{\mu q(m+kz) G_1(z)}{\eta z + \lambda z(1-z)} \quad (12)$$

由式(6)、式(7)可得式(13):

$$G_2(z) = \frac{\alpha G_1(1)}{\beta + \lambda(1-z)} \quad (13)$$

由式(8)、式(9)可得式(14):

$$G_3(z) = \frac{\beta G_2(z)}{\gamma + \lambda(1-z)} = \frac{\alpha \beta G_1(1)}{[\gamma + \lambda(1-z)] [\beta + \lambda(1-z)]} \quad (14)$$

对式(5)乘以  $z^n$ , 并对  $n$  从 2 到  $\infty$  求和, 再加上式(2)、式(4)、式(12)和  $z \times$  式(3), 可得式(15):

$$G_1(z) = \frac{\gamma z G_3(z) - \lambda z(1-z) \pi_{4,0}}{\alpha z + \mu(z - pm - pkz) + \lambda z(1-z) - \frac{\mu q \eta(m+kz)}{\eta + \lambda(1-z)}} \quad (15)$$

定理 1 函数  $f(z) = \alpha z + \mu(z - pm - pkz) + \lambda z(1-z) -$

$\frac{\mu q \eta(m+kz)}{\eta + \lambda(1-z)}$  在  $0 < z < 1$  内有且只有一个根  $z^*$ 。

证明 取  $z=0, z=1$  代入函数  $f(z)$  中, 得  $f(0) =$

$$-\mu p m - \frac{\mu q \eta m}{\eta + \lambda} < 0, f(1) = \alpha + \mu(1-p) - \frac{\mu q \eta}{\eta} = \alpha > 0, \text{ 可知}$$

$f(z)$  在  $0 < z < 1$  内有根。对  $f(z)$  求导可得:

$$f'(z) = \alpha + \mu(1-pk) + \lambda - 2\lambda z - \frac{\mu q \eta(\lambda + k\eta)}{[\eta + \lambda(1-z)]^2}$$

$$f''(z) = -2\lambda - \frac{2\mu q \eta \lambda(\lambda + k\eta)}{[\eta + \lambda(1-z)]^3}$$

由  $f''(z)$  在  $0 < z < 1$  内小于 0, 可知  $f'(z)$  在该区域单调递减。当  $z=0$  时, 有

$$f'(0) = \alpha + \mu(1-pk) + \lambda - \frac{\mu q \eta(\lambda + k\eta)}{(\eta + \lambda)^2}$$

$$f'(0)(\eta + \lambda)^2 =$$

$$\begin{aligned} & [\alpha + \mu(1-pk) + \lambda](\eta + \lambda)^2 - \mu q \eta(\lambda + k\eta) = \\ & (\alpha + \mu p - \mu p k + \lambda)(\eta + \lambda)^2 + \mu q(\eta^2 + \lambda^2 + \eta \lambda) - \mu q k \eta^2 = \\ & (\alpha + \mu p m + \lambda)(\eta + \lambda)^2 + \mu q(m\eta^2 + \lambda^2 + \eta \lambda) \end{aligned}$$

可知  $f'(0) > 0$ ; 当  $z=1, f'(1) = \alpha + \mu(1-pk) - \lambda -$

$$\frac{\mu q(\lambda + k\eta)}{\eta}, f'(1)\eta = (\alpha + \mu m)\eta - \lambda(\eta + \mu q)。当 \lambda \leq$$

$$\frac{(\alpha + \mu m)\eta}{\eta + \mu q} \text{ 时, } f'(1) \geq 0; \text{ 当 } \lambda > \frac{(\alpha + \mu m)\eta}{\eta + \mu q} \text{ 时, } f'(1) <$$

0。综合本证明求解结果可知: 函数  $f(z)$  在  $0 < z < 1$  内只有  $z^*$  一个根。证毕。

因系统稳态存在, 在  $0 < z < 1$  内, 式(15)中的幂级数  $G_1(z)$  具有收敛性, 可得

$$\gamma z^* G_3(z^*) - \lambda z^* (1-z^*) \pi_{4,0} = 0$$

即如式(16)所示:

$$\pi_{4,0} = \frac{\alpha\beta\gamma G_1(1)}{\lambda(1-z^*) [\gamma + \lambda(1-z^*)] [\beta + \lambda(1-z^*)]} \quad (16)$$

结合式(12)、式(13)、式(14)和式(16),代入式(11)可得式(17):

$$G_1(1) = \frac{\beta\eta\gamma A}{\alpha\eta\beta^2\gamma^2 + (\mu q\beta\gamma + \beta\eta\gamma + \alpha\eta\gamma + \alpha\beta\eta) A} \quad (17)$$

式(17)中:

$$A = \lambda(1-z^*) [\gamma + \lambda(1-z^*)] [\beta + \lambda(1-z^*)]$$

由式(17)代入式(16)可得式(18):

$$\pi_{4,0} = \frac{\alpha\eta\beta^2\gamma^2}{\alpha\eta\beta^2\gamma^2 + (\mu q\beta\gamma + \beta\eta\gamma + \alpha\eta\gamma + \alpha\beta\eta) A} \quad (18)$$

由式(17)代入式(13)可得式(19):

$$G_2(z) = \frac{1}{\beta + \lambda(1-z)} \times \frac{\alpha\beta\eta\gamma A}{\alpha\eta\beta^2\gamma^2 + (\mu q\beta\gamma + \beta\eta\gamma + \alpha\eta\gamma + \alpha\beta\eta) A} \quad (19)$$

由式(17)代入式(14)可得式(20):

$$G_3(z) = \frac{\alpha\beta^2\eta\gamma A}{y(z) [\alpha\eta\beta^2\gamma^2 + (\mu q\beta\gamma + \beta\eta\gamma + \alpha\eta\gamma + \alpha\beta\eta) A]} \quad (20)$$

式(20)中:  $y(z) = [\gamma + \lambda(1-z)] [\beta + \lambda(1-z)]$ 。结合式(18)和式(20),代入式(15)可得式(21):

$$G_1(z) = \frac{1}{f(z)y(z)} \times \frac{\alpha\beta^2\eta\gamma^2 z [A - \lambda(1-z)y(z)]}{[\alpha\eta\beta^2\gamma^2 + (\mu q\beta\gamma + \beta\eta\gamma + \alpha\eta\gamma + \alpha\beta\eta) A]} \quad (21)$$

由式(21)代入式(12)可得式(22):

$$G_0(z) = \frac{1}{f(z) [\eta + \lambda(1-z)] y(z)} \times \frac{\mu q(m+kz) \alpha\beta^2\eta\gamma^2 [A - \lambda(1-z)y(z)]}{[\alpha\eta\beta^2\gamma^2 + (\mu q\beta\gamma + \beta\eta\gamma + \alpha\eta\gamma + \alpha\beta\eta) A]} \quad (22)$$

**定理 2** 该队列中,系统中顾客数的 PGF(概率生成函数):

$$G(z) = G_0(z) + G_1(z) + G_2(z) + G_3(z) + \pi_{4,0}$$

该式中各值已由式(18)一式(22)给出。

### 3 性能指标分析

令系统中的队列长度为  $L$ , 则系统的平均队长为

$$E[L] = G'_0(1) + G'_1(1) + G'_2(1) + G'_3(1) =$$

$$\begin{aligned} & \frac{\mu q \alpha \beta^2 \eta \gamma^2}{\alpha \eta \beta^2 \gamma^2 + (\mu q \beta \gamma + \beta \eta \gamma + \alpha \eta \gamma + \alpha \beta \eta) A} \times \left( \frac{kA + \beta \gamma \lambda}{\alpha \beta \gamma \eta} - A \times \right. \\ & \left. \left\{ \frac{\alpha \eta + \mu(1 - \rho k) \eta - \eta \lambda - \mu q(\lambda + k \eta) - \alpha \lambda}{\beta \gamma (\alpha \eta)^2} - \frac{\lambda(\beta + \gamma)}{\alpha \eta (\beta \gamma)^2} \right\} \right) + \\ & \frac{\alpha \beta^2 \eta \gamma^2}{\alpha \eta \beta^2 \gamma^2 + (\mu q \beta \gamma + \beta \eta \gamma + \alpha \eta \gamma + \alpha \beta \eta) A} \times \\ & \left\{ \frac{A + \lambda \beta \gamma}{\alpha \beta \gamma} - \frac{A [\alpha \eta + \mu(1 - \rho k) \eta - \eta \lambda - \mu q(\lambda + k \eta)]}{\alpha^2 \beta \eta \gamma} - \frac{A \lambda (\beta + \gamma)}{\alpha \beta^2 \gamma^2} \right\} + \\ & \frac{\lambda \alpha \eta \gamma A}{\beta [\alpha \eta \beta^2 \gamma^2 + (\mu q \beta \gamma + \beta \eta \gamma + \alpha \eta \gamma + \alpha \beta \eta) A]} + \\ & \frac{\lambda (\beta + \gamma) \alpha \eta A}{\gamma [\alpha \eta \beta^2 \gamma^2 + (\mu q \beta \gamma + \beta \eta \gamma + \alpha \eta \gamma + \alpha \beta \eta) A]} \end{aligned}$$

工作人员处于休假期的概率:

$$P_v = G_0(1) = \frac{\mu q \beta \gamma A}{\alpha \beta^2 \eta \gamma^2 + (\mu q \beta \gamma + \eta \beta \gamma + \alpha \eta \gamma + \alpha \beta \eta) A}$$

工作人员处于忙期的概率:

$$P_w = G_1(1) = \frac{\beta \eta \gamma A}{\alpha \beta^2 \eta \gamma^2 + (\mu q \beta \gamma + \eta \beta \gamma + \alpha \eta \gamma + \alpha \beta \eta) A}$$

工作人员处于延迟期的概率:

$$P_d = G_2(1) = \frac{\alpha \eta \gamma A}{\alpha \beta^2 \eta \gamma^2 + (\mu q \beta \gamma + \eta \beta \gamma + \alpha \eta \gamma + \alpha \beta \eta) A}$$

工作人员处于维修期的概率:

$$P_m = G_3(1) = \frac{\alpha \beta \eta A}{\alpha \beta^2 \eta \gamma^2 + (\mu q \beta \gamma + \eta \beta \gamma + \alpha \eta \gamma + \alpha \beta \eta) A}$$

工作人员处于空闲状态的概率:

$$P_i = \pi_{4,0} = \frac{\alpha \beta^2 \gamma^2 \eta}{\alpha \beta^2 \eta \gamma^2 + (\mu q \beta \gamma + \eta \beta \gamma + \alpha \eta \gamma + \alpha \beta \eta) A}$$

### 4 稳态逗留时间的 LST

假设系统原来队长为  $n$ , 标记顾客到来为队伍中的第  $n+1$  个顾客, 标记顾客在系统中消耗的时长即为顾客在系统中的逗留时间, 用  $W$  来表示,  $W^*(s)$  就是  $W$  的拉普拉斯变换(LST)。

**定理 3** 队列中顾客逗留时间的 LST:

$$W^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{0,n} \frac{\eta}{\eta+s} \left( G^n \frac{\mu+\alpha}{\mu m+\alpha+s} + H \frac{1-G^n}{1-G} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \pi_{1,n} \frac{\eta}{\eta+s} \left( G^n \frac{\mu+\alpha}{\mu m+\alpha+s} + H \frac{1-G^n}{1-G} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{2,n} \frac{\beta\gamma}{(\beta+s)(\gamma+s)} \left( G^n \frac{\mu+\alpha}{\mu m+\alpha+s} + H \frac{1-G^n}{1-G} \right) + \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{3,n} \frac{\gamma}{\gamma+s} \left( G^n \frac{\mu+\alpha}{\mu m+\alpha+s} + H \frac{1-G^n}{1-G} \right) + \pi_{4,n} \frac{\mu+\alpha}{\mu m+\alpha+s}$$

其中:

$$G = \frac{\mu m \eta + \mu p m s}{(\eta+s)(\mu+\alpha+s-\mu p k) - \mu q k \eta}$$

$$H = \frac{\alpha(\eta+s)}{(\eta+s)(\mu+\alpha+s-\mu p k) - \mu q k \eta}$$

**证明** 由强马尔可夫性对 5 种状态下的标记顾客进行分析。

**状态 1** 休假期  $(0, n), n=0, 1, 2, \dots$ 。标记顾客需等待假期结束以及队列前  $n$  个顾客离开, 此时标记顾客逗留时间的拉普拉斯变换表示为  $W_{0,n}^*(s), n=0, 1, 2, \dots$ 。由强马尔可夫性可得式(23)、式(24):

$$W_{0,0}^*(s) = \frac{\lambda}{\lambda+\eta+s} W_{0,0}^*(s) + \frac{\eta}{\lambda+\eta+s} W_{4,0}^*(s) \quad (23)$$

$$W_{0,n}^*(s) = \frac{\lambda}{\lambda+\eta+s} W_{0,n}^*(s) + \frac{\eta}{\lambda+\eta+s} W_{1,n}^*(s), n \geq 1 \quad (24)$$

**状态 2** 忙期  $(1, n), n=0, 1, 2, \dots$ 。标记顾客只需等待队列前  $n$  个顾客离开, 此时标记顾客逗留时间的拉普拉斯变换表示为  $W_{1,n}^*(s), n=1, 2, \dots$ 。由强马尔可夫性可得式(25)、式(26):

$$W_{1,1}^*(s) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu+\alpha+s} W_{1,1}^*(s) + \frac{\mu p k}{\lambda+\mu+\alpha+s} W_{1,1}^*(s) + \frac{\mu p m}{\lambda+\mu+\alpha+s} W_{4,0}^*(s) + \frac{\mu q k}{\lambda+\mu+\alpha+s} W_{0,1}^*(s) + \frac{\mu q m}{\lambda+\mu+\alpha+s} W_{0,0}^*(s) + \frac{\alpha}{\lambda+\mu+\alpha+s} \quad (25)$$

$$W_{1,n}^*(s) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu+\alpha+s} W_{1,n}^*(s) + \frac{\mu p k}{\lambda+\mu+\alpha+s} W_{1,n}^*(s) + \frac{\mu p m}{\lambda+\mu+\alpha+s} W_{1,n-1}^*(s) + \frac{\mu q k}{\lambda+\mu+\alpha+s} W_{0,n}^*(s) + \frac{\mu q m}{\lambda+\mu+\alpha+s} W_{0,n-1}^*(s) + \frac{\alpha}{\lambda+\mu+\alpha+s}, n \geq 2 \quad (26)$$

**状态 3** 延迟期  $(2, n), n=0, 1, 2, \dots$ 。该情况为系统处于延迟等待状态, 标记顾客接受服务需等待忙期的到来和前面  $n$  个顾客的离开, 此时标记顾客逗留时间的拉普拉斯变换表示为  $W_{2,n}^*(s), n=0, 1, 2, \dots$ 。由强马尔可夫性可得式(27)、式(28):

$$W_{2,0}^*(s) = \frac{\lambda}{\lambda+\beta+s} W_{2,0}^*(s) + \frac{\beta}{\lambda+\beta+s} W_{3,0}^*(s) \quad (27)$$

$$W_{2,n}^*(s) = \frac{\lambda}{\lambda+\beta+s} W_{2,n}^*(s) + \frac{\beta}{\lambda+\beta+s} W_{3,n}^*(s), n \geq 1 \quad (28)$$

**状态 4** 维修期  $(3, n), n=0, 1, 2, \dots$ 。标记顾客需等待系统维修完成以及队列前  $n$  个顾客离开, 此时标记顾客逗留时间的拉普拉斯变换表示为  $W_{3,n}^*(s), n=0, 1, 2, \dots$ 。由强马尔可夫性可得式(29)、式(30):

$$W_{3,0}^*(s) = \frac{\lambda}{\lambda+\gamma+s} W_{3,0}^*(s) + \frac{\gamma}{\lambda+\gamma+s} W_{4,0}^*(s) \quad (29)$$

$$W_{3,n}^*(s) = \frac{\lambda}{\lambda+\gamma+s} W_{3,n}^*(s) + \frac{\gamma}{\lambda+\gamma+s} W_{1,n}^*(s), n \geq 1 \quad (30)$$

**状态 5** 闲期  $(4, 0)$ 。标记顾客一到达就接受工作人员的服务, 标记顾客离开只是因为服务结束和灾难到达, 此时标记顾客逗留时间的拉普拉斯变换表示为  $W_{4,0}^*(s)$ , 由强马尔可夫性可得式(31):

$$W_{4,0}^*(s) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu+\alpha+s} W_{4,0}^*(s) + \frac{\mu k}{\lambda+\mu+\alpha+s} W_{4,0}^*(s) + \frac{\mu m}{\lambda+\mu+\alpha+s}$$

$$\frac{\alpha}{\lambda + \mu + \alpha + s} = \frac{\mu m + \alpha}{\mu m + \alpha + s} \quad (31)$$

对式(23)—式(31)求解,可得式(32)—式(39):

$$W_{0,0}^*(s) = \frac{\eta}{\eta + s} W_{4,0}^*(s) = \frac{\eta(\mu m + \alpha)}{(\eta + s)(\mu m + \alpha + s)} \quad (32)$$

$$W_{0,n}^*(s) = \frac{\eta}{\eta + s} W_{1,n}^*(s), n \geq 1 \quad (33)$$

$$W_{1,1}^*(s) = \frac{\mu p m}{\mu + \alpha + s - \mu p k} W_{4,0}^*(s) + \frac{\mu q m}{\mu + \alpha + s - \mu p k} W_{0,0}^*(s) + \frac{\mu q k}{\mu + \alpha + s - \mu p k} W_{0,1}^*(s) + \frac{\alpha}{\mu + \alpha + s - \mu p k} \quad (34)$$

$$W_{1,n}^*(s) = \frac{\mu p m}{\mu + \alpha + s - \mu p k} W_{1,n-1}^*(s) + \frac{\mu q k}{\mu + \alpha + s - \mu p k} W_{0,n}^*(s) + \frac{\mu q m}{\mu + \alpha + s - \mu p k} W_{0,n-1}^*(s) + \frac{\alpha}{\mu + \alpha + s - \mu p k}, n \geq 2 \quad (35)$$

$$W_{2,0}^*(s) = \frac{\beta}{\beta + s} W_{3,0}^*(s) = \frac{\beta \gamma (\mu m + \alpha)}{(\beta + s)(\gamma + s)(\mu m + \alpha + s)} \quad (36)$$

$$W_{2,n}^*(s) = \frac{\beta}{\beta + s} W_{3,n}^*(s), n \geq 1 \quad (37)$$

$$W_{3,0}^*(s) = \frac{\gamma}{\gamma + s} W_{4,0}^*(s) = \frac{\gamma(\mu m + \alpha)}{(\gamma + s)(\mu m + \alpha + s)} \quad (38)$$

$$W_{3,n}^*(s) = \frac{\gamma}{\gamma + s} W_{1,n}^*(s), n \geq 1 \quad (39)$$

由式(31)—式(34)得式(40):

$$W_{1,1}^*(s) = G \frac{\mu m + \alpha}{\mu m + \alpha + s} + H \quad (40)$$

由式(33)、式(35)和式(40)可得式(41):

$$W_{1,n}^*(s) = G^n \frac{\mu m + \alpha}{\mu m + \alpha + s} + H \frac{1 - G^n}{1 - G}, n \geq 1 \quad (41)$$

由式(32)、式(33)和式(41)可得式(42):

$$W_{0,n}^*(s) = \frac{\eta}{\eta + s} \left( G^n \frac{\mu m + \alpha}{\mu m + \alpha + s} + H \frac{1 - G^n}{1 - G} \right), n \geq 0 \quad (42)$$

由式(38)、式(39)和式(41)可得式(43):

$$W_{3,n}^*(s) = \frac{\gamma}{\gamma + s} \left( G^n \frac{\mu m + \alpha}{\mu m + \alpha + s} + H \frac{1 - G^n}{1 - G} \right), n \geq 0 \quad (43)$$

由式(36)、式(37)和式(43)可得式(44):

$$W_{2,n}^*(s) = \frac{\beta \gamma}{(\beta + s)(\gamma + s)} \left( G^n \frac{\mu m + \alpha}{\mu m + \alpha + s} + H \frac{1 - G^n}{1 - G} \right), n \geq 0 \quad (44)$$

队列中顾客逗留时间的 LST 即为

$$W^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{0,n} W_{0,n}^*(s) + \sum_{n=1}^{\infty} \pi_{1,n} W_{1,n}^*(s) + \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{2,n} W_{2,n}^*(s) + \sum_{n=0}^{\infty} \pi_{3,n} W_{3,n}^*(s) + \pi_{4,0} W_{4,0}^*(s) \quad (45)$$

将式(31)、式(41)—式(44)代入式(45)。证毕。

## 5 数值模拟

本部分通过数值实验解释各参数对系统中平均顾客人数的影响。

令  $\lambda = 1, \eta = 1.2, \beta = 1.3, r = 1.4, q = 0.4, p = 0.6, k = 0.3, m = 0.7$ , 得到  $\alpha$  和  $\mu$  对于平均顾客人数  $E[L]$  的影响。如图 2 所示,  $E[L]$  随着  $\mu$  的增长而降低; 当保持  $\mu$  为定值时,  $\alpha$  的增长会导致  $E[L]$  的降低。由曲线的倾斜程度可知,  $\alpha$  的增大会导致  $\mu$  对  $E[L]$  的影响越来越小。这是符合客观实际的, 灾难的暴发, 会导致所有顾客离开。

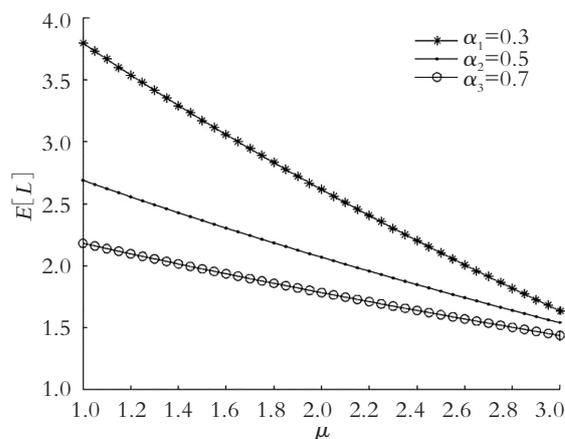


图 2  $\alpha$  和  $\mu$  对  $E[L]$  的影响

Fig. 2 The influence of  $\alpha$  and  $\mu$  on  $E[L]$

令  $\lambda = 1, \mu = 1.6, \eta = 1.2, r = 1.4, q = 0.4, p = 0.6, k = 0.3, m = 0.7$ , 得到  $\alpha$  和  $\beta$  对于平均顾客人数  $E[L]$  的影响。如图 3 所示,  $E[L]$  随着  $\beta$  的增长而降低; 当保持  $\beta$  为定值时,  $\alpha$  的增长会导致  $E[L]$  的降低。由曲线的倾斜程度可知,  $\alpha$  的增大会导致  $\beta$  对  $E[L]$  的影响越来越大。故当灾难暴发的概率较高时, 需要提高理工的到达速度, 以加快系统的维修。

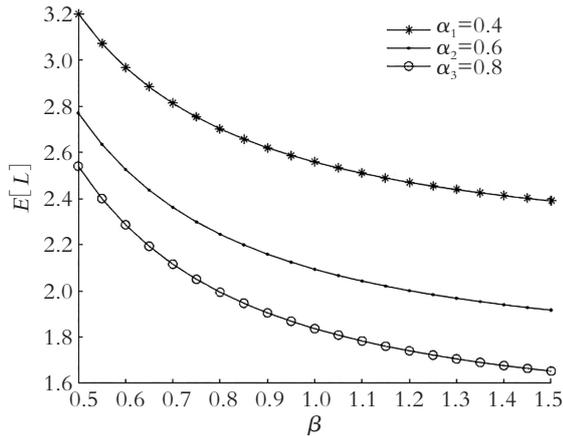


图 3  $\alpha$  和  $\beta$  对  $E[L]$  的影响

Fig. 3 The influence of  $\alpha$  and  $\beta$  on  $E[L]$

令  $\lambda = 1, \eta = 1.2, \beta = 1.3, r = 1.4, \alpha = 0.1, q = 0.4, p = 0.6$ , 得到  $k$  和  $\mu$  对于平均顾客人数  $E[L]$  的影响。如图 4 所示,  $k$  趋于 0 时, 服务速率越低,  $E[L]$  越大;  $k$  趋于 1 时, 服务速率越低,  $E[L]$  越小。故当反馈发生频率已知时, 需合理选择服务速率, 以达到最大的效益。

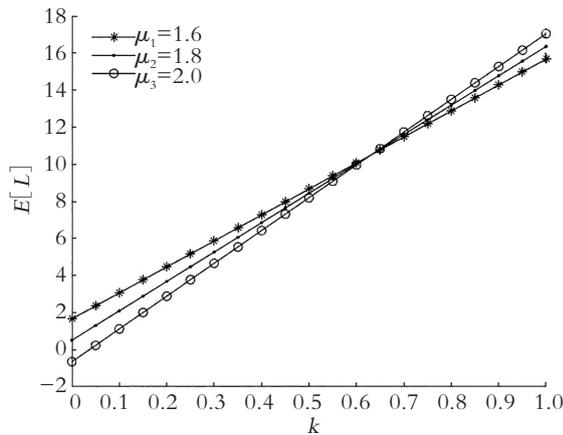


图 4  $k$  和  $\mu$  对  $E[L]$  的影响

Fig. 4 The influence of  $k$  and  $\mu$  on  $E[L]$

本部分对其他带有灾难和伯努利机制的队列中已有的服务效率、灾难发生频率、维修效率进行模拟实验, 表明本模型的有效性, 在此基础上对反馈部分进行模拟实验, 得出相应建议。若社会管理者想要利益最大化, 在保证工作台质量和维修效率的基础上还应当根据反馈频率合理选择服务效率。

### 6 结 论

本文研究了伯努利机制下具有灾难、延迟维修、

反馈和休假单工作台队列, 利用马氏链方法和概率母函数技术对系统中顾客人数的稳态概率分布进行分析, 给出若干稳态指标, 最后利用数值模拟得出建议。在工业、互联网、通讯和高科技应用中意义重大。本模型还可推广到多服务台、多阶段服务等继续进行研究。

### 参考文献 (References) :

[1] YANG W S, KIM J D, CHAE K C. Analysis of M/G/1 stochastic clearing systems [J]. Stochastic Analysis and Applications, 2002, 20(5): 1083—1100.

[2] SUDHESH R, PRIYA R S, LENIN R B. Transient analysis of a single server discrete-time queue with system disaster [J]. Rairo Operations Research, 2017, 51(1): 123—134.

[3] ECONOMOU A, KANTA S. Equilibrium balking strategies in the observable single-server queue with breakdowns and repairs [J]. Operations Research Letters, 2008, 36(6): 696—699.

[4] YU S L, LIU Z M, WU J B. Equilibrium strategies of the unobservable M/M/1 queue with balking and delayed repairs [J]. Applied Mathematics and Computation, 2016, 290(1): 56—65.

[5] RAO S H, KUMAR V V, KUMAR B S, et al. Analysis of two-phase queuing system with impatient customers, server breakdowns and delayed repair [J]. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 2017, 115(4): 651—663.

[6] KEILSON J, SERVI L D. Oscillating random walk models for GI/G/1 vacation systems with Bernoulli schedules [J]. Journal of Applied Probability, 1986, 23(3): 790—802.

[7] ARIVUDAINAMBI D, GOWSALYA M. Analysis of an M/G/1 retrial queue with Bernoulli vacation, two types of service and starting failure [J]. International Journal of Artificial Intelligence and Soft Computing, 2017, 6(3): 222—249.

[8] 徐金萍, 李俊潼, 李涛, 等. Bernoulli 机制下的带有负顾客, 反馈和 N 策略的 M/M/1 休假排队 [J]. 统计学与应用, 2019, 8(1): 165—175.

XU Jin-ping, LI Jun-tong, LI Tao, et al. M/M/1 vacation queue with negative customer, feedback and N policy under Bernoulli mechanism [J]. Statistics and

- Application, 2019, 8(1): 165—175.
- [9] 潘致锋, 孙荣恒. 具有 Bernoulli 反馈的 G/G/1 排队系统[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2004, 21(2): 8—11.
- PAN Zhi-feng, SUN Rong-heng. G/G/1 queuing system with Bernoulli feedback[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science Edition), 2004, 21(2): 8—11
- [10] BOUCHENTOUF A A, YAHIAOUI L. On feedback queueing system with reneging and retention of reneged customers, multiple working vacations and Bernoulli schedule vacation interruption [J]. Arabian Journal of Mathematics, 2017, 6(1): 1—11.
- [11] SHWETA, UPADHYAYA. Performance prediction of a discrete-time batch arrival retrial queue with Bernoulli feedback [J]. Applied Mathematics & Computation, 2016, 283(1): 108—119.
- [12] YE J J, LIU L W, JIANG T. Analysis of a single-server queue with disasters and repairs under Bernoulli vacation schedule[J]. Journal of Systems Science & Information, 2016, 4(6): 547—559.

## A M/M/1 Queue with Disasters and Bernoulli Mechanism

CHEN Qian<sup>1</sup>, LIU Li-wei<sup>1</sup>, YAN Jun-na<sup>2</sup>

(1. School of Science, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China;

2. School of Mathematics and Science, Anyang University, Henan Anyang 455000, China)

**Abstract:** Aiming at the application of the model with disasters and Bernoulli mechanism in real life, a single workbench queue with disasters, delayed maintenance, feedback and vacation under Bernoulli mechanism is proposed. The disaster affects the system only when the workbench is running, and the system needs to be repaired and all the customers on the site leave the system forever. After completing a service, the staff can choose to take a vacation or continue to serve; the customer who accepts this service will leave the system or go back to the head of the queue to wait for the next service. By using the Markov Chain method, the steady-state system is analyzed and the equilibrium equation is obtained. The PGF of the number of customers in the system under steady-state are derived by solving the balance equations. The probability of the waiter being on vacation, busy period, delay period, maintenance period and idle period are obtained respectively. The distribution of stay time in steady-state is obtained according to the strong Markov property. Finally, numerical simulation is used to explain the influence of some parameters on the average number of customers in the system, and the correctness of the model and method is verified.

**Key words:** disasters; Bernoulli mechanism; delayed maintenance; strong Markov property

责任编辑:李翠薇

引用本文/Cite this paper:

陈潜, 刘力维, 闫俊娜. 一种带有灾难和伯努利机制的 M/M/1 队列[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版), 2022, 39(6): 79—86.

CHEN Qian, LIU Li-wei, YAN Jun-na. A M/M/1 queue with disasters and Bernoulli mechanism [J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition), 2022, 39(6): 79—86.