

doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2022.0004.012

# 折纸机构折叠过程不共点折痕的位置分析

王 锋, 张 帆

(上海工程技术大学 机械与汽车工程学院, 上海 201620)

**摘 要:**针对多顶点折纸中不共点折痕这一种典型折痕分布在折叠过程中空间位置的复杂变化,以及对折纸机构刚性折叠特性所产生的影响,提出了一种通过分解折痕运动确定折痕空间位置并判断折纸机构刚性折叠特性的方法。该方法首先通过构造原折痕的平行折痕把各不共点折痕汇交于同一顶点,根据共点折痕的旋转运动确定平行折痕位置变化;然后根据中心多边形确定旋转后平行折痕的平移方向和距离;最后确定不共点折痕变换后的空间位置,并根据折叠平面的变形确定折纸机构的刚性折叠特性。通过具体参数对三顶点折纸折痕空间位置变化进行验证分析,结果表明:这种分析方法不仅简化了多顶点折纸中不共点折痕位置的计算过程,也为确定折纸机构不可折叠时折叠平面的变形形式做了铺垫。

**关键词:**折纸机构;不共点折痕;运动分解;刚性折叠特性

**中图分类号:**TH112

**文献标志码:**A

**文章编号:**1672-058X(2022)04-0091-07

## 0 引 言

折纸是根据其折痕分布折叠,不需要剪切和粘贴就可以把完整纸张折叠为所需形状的一种特殊的艺术活动。从折纸衍生出的折纸机构,因为具有节省空间、便于存储运输的优点而在实际中应用广泛。在日常生活中,便携式折叠餐具<sup>[1]</sup>、易于搭建的折叠庇护所<sup>[2]</sup>等设计都为人们的生活提供了极大的便利。在航天领域,基于折纸原理的太阳能帆板<sup>[3]</sup>和空间天线反射面<sup>[4]</sup>等设计不仅提供了更高的空间利用率,而且也为航天事业的顺利进行提供了保障。在医疗方面,折纸的应用使得微创手术抓取器<sup>[5]</sup>和心脏支架<sup>[6]</sup>等手术器械能够更好地在人体内的狭小腔道工作,从而提高了手术的成功率。

折纸能否实现刚性折叠一直是学者们研究的重点之一。在过去的研究中,有学者提出了四元数和对偶四元数法来判断折叠过程的自相交能力<sup>[7]</sup>,利用非线性迭代算法来预测折纸机构的折叠行为<sup>[8]</sup>,也有利用折纸机构自由度分析<sup>[9]</sup>或利用折角乘数根据扇面角分布<sup>[10]</sup>等方式来判断折纸机构的刚性可折叠性。然而,折叠平面是否发生变形仍然是判断折纸机构刚性折叠特性的最直接显著的方法。若折叠平面发生变形,则该平面内相邻折痕之间的相对距离发生变化。因此,计算折叠过程中折痕的空间位置对判断折纸机构刚性折叠特性具有重要意义。

单顶点折纸是最简单的折纸单元,同时也是多顶点折纸的重要组成部分<sup>[11]</sup>。由多个单顶点折纸所围成的中心平面的存在不会影响多顶点折纸的折叠效果<sup>[12]</sup>,但是多个顶点的存在产生了不共点折痕这一多顶点折纸中的典型折痕分布形式。汇交于同一个

收稿日期:2021-05-31;修回日期:2021-07-10.

基金项目:上海市科委生物医药领域科技支撑计划资助(17441901200).

作者简介:王锋(1995—),男,山东淄博人,硕士研究生,从事折纸机构与手术机器人的设计与研究.

通讯作者:张帆(1980—),女,河南平顶山人,副教授,博士,从事并联机器人、医疗机器人和先进制造技术等研究. Email:

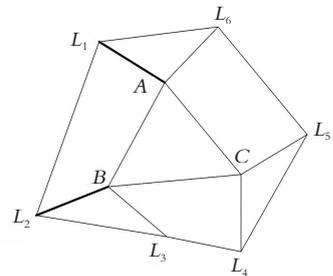
pdszhangfan@sues.edu.cn.

顶点的折痕之间位置变换只有相对折痕的旋转,而若要确定不共点折痕的空间位置不仅有旋转运动还有平移运动,因此不共点折痕增加了折叠过程中折痕空间位置的计算难度。现有的绕任意轴的旋转变换矩阵为坐标系变换,坐标系原点空间位置始终保持不变,变化的只是  $X$ 、 $Y$  和  $Z$  轴的方向<sup>[13]</sup>。然而,在确定全局坐标系后,折纸机构折叠过程中折痕上点的空间位置不断变化,现有方法使用时并不简便。为简化折叠过程中折痕空间位置的计算分析过程,本文通过构造原折痕的平行折痕把各不共点折痕汇交于同一顶点,将不共点折痕的空间运动分解为旋转运动和平移运动两部分,使得在分析多顶点折纸时计算不共点折痕的空间位置更加简便,也为确定折纸机构不可折叠时折叠平面的变形形式做了铺垫。

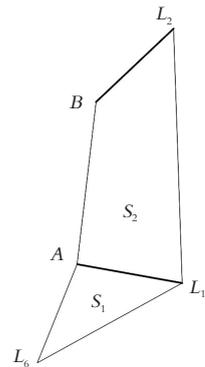
## 1 一对不共点折痕折叠过程位置分析

大多数折纸使用软质纸或其他柔性材料制成,但是在实际应用中的某些特殊环境要求折纸机构既具有折纸便于折叠提高空间利用率的特点,又不允许折叠平面发生变形。折纸的刚性折叠特性是指在折叠过程中折纸平面始终保持刚性,而不可发生拉伸弯曲和扭转变形。若折纸不能实现刚性折叠,则折叠平面必然发生某种变形。又因为相邻折痕所夹折叠平面在折叠过程中的位置变化可以根据平面内两条折痕的相对位置确定,若折叠平面变形说明该平面不满足刚性条件<sup>[14]</sup>,平面内相邻折痕的相对位置发生变化。因此,可以通过相邻折痕在折叠过程中相对位置变换判断折纸机构的刚性折叠特性。由于多折痕折纸中相邻折痕的空间位置变化较为复杂,将位置变化分解计算对确定折痕空间位置有着重要意义。通过三顶点折纸机构中一对相邻不共点折痕的简单位置变化说明不共点折痕运动分解的过程如下:

将折痕视作旋转关节,把折叠平面视作绕旋转关节转动的连杆<sup>[15]</sup>。取折痕  $L_{i\text{th}}$  长度相等,令  $S_{i\text{th}}$  为折痕  $L_{i\text{th}}$  和  $L_{(i+1)\text{th}}$  所夹折叠平面,  $\theta_{i\text{th}}$  为折叠平面  $S_{(i+1)\text{th}}$  绕折痕  $L_{i\text{th}}$  相对  $S_{i\text{th}}$  旋转的旋转角。若不汇交于同一顶点的折痕  $L_1$  和  $L_2$  分别交直线  $AB$  于点  $A$  和点  $B$ ,在旋转角  $\theta_{i\text{th}}=0$  的初始状态下,折痕位置如图 1(a) 所示。令  $s=\sin, c=\cos$ ,下文不再描述。



(a) 三顶点折纸



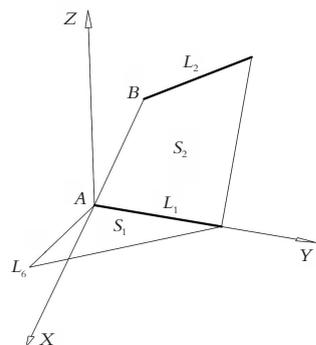
(b) 相邻的不共点折痕

图 1 不共点折痕初始状态位置分布

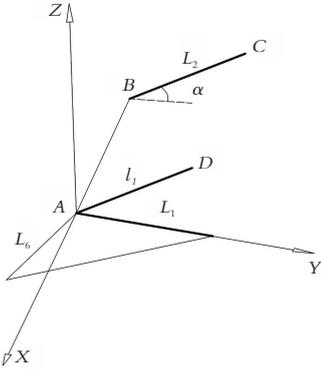
Fig. 1 Initial position distribution of non-intersect creases

以点  $A$  为原点,沿折痕  $L_1$  远离  $A$  点方向为  $Y$  轴正方向,向量  $BA$  方向为  $X$  轴正方向,建立全局坐标系  $\{A\}$  如图 2(a) 所示,其中  $Z$  轴正方向满足右手定则。将折叠平面  $S_1$  固定为基座,  $L_1$  作为旋转轴,因为折痕  $L_1$  和  $L_2$  不汇交于同一点,为确定折痕  $L_2$  在绕折痕  $L_1$  旋转  $\theta_1$  后的空间位置,过点  $A$  作折痕  $L_2$  的平行线段  $l_2$ ,其中点  $D$  是折痕  $l_2$  上一点,点  $B$ 、 $C$  是折痕  $L_2$  上两点,则  $L_1$ 、 $L_2$  和  $l_2$  在初始状态下如图 2(b) 所示。令折痕长度  $l_{AB}=l_{L_1}=l_{L_2}=l$ ,折痕  $L_2$  与  $Y$  轴夹角为  $\alpha$ ,则点  $B$ 、 $C$  和  $D$  相对于全局坐标系  $\{A\}$  的位置向量分别如式(1)所示:

$$\begin{aligned} \omega_B^0 &= (-l \ 0 \ 0)^T \\ \omega_C^0 &= (-l \cdot (1+c\alpha) \ l \cdot s\alpha \ 0)^T \\ \omega_D^0 &= (-l \cdot c\alpha \ l \cdot s\alpha \ 0)^T \end{aligned} \quad (1)$$



(a) 以点  $A$  为原点对该不共点折痕初始状态建立坐标系



(b) 在初始状态下构造折痕  $L_2$  的平行折痕  $l_2$   
图2 一对不共点折痕位置分析

Fig. 2 Analysis of the position of a pair of non-intersect creases

1.1 直接旋转

折痕的位置变化可通过折痕上两个点的位置变化来判断,所以可以通过点  $B$ 、 $C$  的位置变化来确定折痕  $L_2$  在绕折痕  $L_1$  旋转  $\theta_1$  之后的位置。且折痕  $L_1$  与  $Y$  轴重合,将折痕  $L_2$  直接绕折痕  $L_1$  旋转  $\theta_1$  得  $L_{2'}$ ,其旋转矩阵如下:

$$R_{L_1}(\theta_1) = \begin{pmatrix} c\theta_1 & 0 & s\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_1 & 0 & c\theta_1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

所以折痕  $L_2$  在绕折痕  $L_1$  旋转  $\theta_1$  后点  $B'$ 、 $C'$  相对全局坐标系的位置向量如下:

$$\begin{aligned} \omega'_{B'} &= R_{L_1}(\theta_1) \cdot \omega_B^0 = (-l \cdot c\theta_1 \quad 0 \quad l \cdot s\theta_1)^T \\ \omega'_{C'} &= R_{L_1}(\theta_1) \cdot \omega_C^0 = \\ &(-l \cdot (1+c\alpha) \cdot c\theta_1 \quad l \cdot s\alpha \cdot l \cdot (1+c\alpha) \cdot s\theta_1)^T \end{aligned} \quad (3)$$

1.2 先旋转后平移

将  $l_2$  绕折痕  $L_1$  旋转  $\theta_1$  得  $l_{2'}$ ,如图3(a)所示。此时  $l_{2'}$  绕折痕  $L_1$  旋转的旋转矩阵如下:

$$R'_{L_1}(\theta_1) = \begin{pmatrix} c\theta_1 & 0 & s\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_1 & 0 & c\theta_1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

则  $l_{2'}$  上点  $D'$  的位置向量如下:

$$\begin{aligned} \omega'_{D'} &= R'_{L_1}(\theta_1) \cdot \omega_D^0 = \\ &(-l \cdot c\alpha \cdot c\theta_1 \quad l \cdot s\alpha \cdot l \cdot c\alpha \cdot s\theta_1)^T \end{aligned} \quad (5)$$

由于点  $B$  是  $L_2$  与线段  $AB$  的交点,所以线段  $AB$  绕  $L_1$  旋转  $\theta_1$  后得到的点  $B''$  同时也是  $L_{2'}$  上的点。如图3(b)所示,线段  $AB$  绕  $L_1$  旋转  $\theta_1$  后得  $AB''$ ,此时点  $B''$  的位置向量如下:

$$\omega'_{B''} = R_{L_2}(\theta_1) \cdot \omega_B^0 = (-l \cdot c\theta_1 \quad 0 \quad l \cdot s\theta_1)^T \quad (6)$$

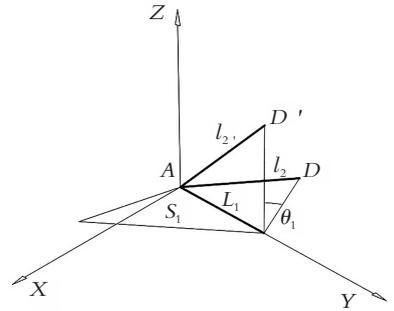
根据点  $A$  和点  $D'$  相对全局坐标系的位置向量,可以得到  $l_{2'}$  在全局坐标系的位置。

如图3(c)所示,将  $l_{2'}$  沿向量  $AB''$  方向平移  $|AB''|$  得  $l_{2''}$ ,其平移矩阵如下:

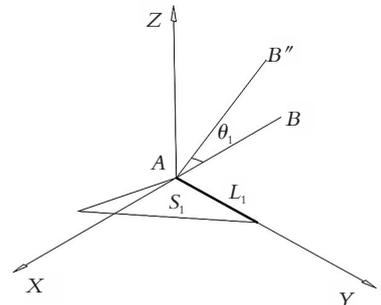
$$P_{AB''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -l \cdot c\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l \cdot s\theta_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

因此  $l_{2''}$  上点  $A''$  和  $D''$  相对全局坐标系的位置向量如下:

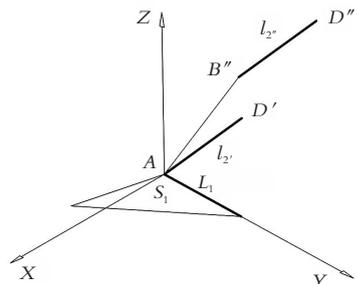
$$\begin{aligned} \omega'_{A''} &= P_{AB''} \cdot \omega_A^0 = (-l \cdot c\theta_1 \quad 0 \quad l \cdot s\theta_1)^T \\ \omega'_{D''} &= P_{AB''} \cdot \omega_{D'}^0 = \\ &(-l \cdot (1+c\alpha) \cdot c\theta_1 \quad l \cdot s\alpha \cdot l \cdot (1+c\alpha) \cdot s\theta_1)^T \end{aligned} \quad (8)$$



(a) 平行折痕  $l_2$  绕折痕  $L_1$  旋转  $\theta_1$



(b) 线段  $AB$  绕折痕  $L_1$  旋转  $\theta_1$



(c)  $l_{2'}$  沿向量  $AB''$  平移

图3 不共点折痕运动分解

Fig. 3 The motion decomposition of non-intersect creases

通过点  $A''$  和  $D''$  相对全局坐标系的位置向量,可以得到  $l_2'$  在全局坐标系的位置,且根据式(3)和式(8)可知  $l_2'$  与  $L_2'$  重合。综上所述,折痕  $L_2'$  直接绕折痕  $L_1$  旋转  $\theta_1$  所得折痕空间位置与  $l_2'$  先绕折痕  $L_1$  旋转  $\theta_1$  再沿向量  $AB''$  方向平移  $|AB''|$  所得折痕空间位置一致。因此,在计算不共点折痕折叠过程空间位置时,可以将折痕运动分解为旋转和平移两部分。

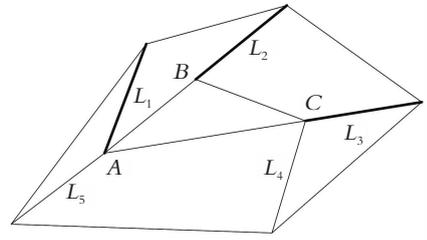
## 2 多条不共点折痕位置分析

### 2.1 3 条不共点折痕折叠过程位置变换

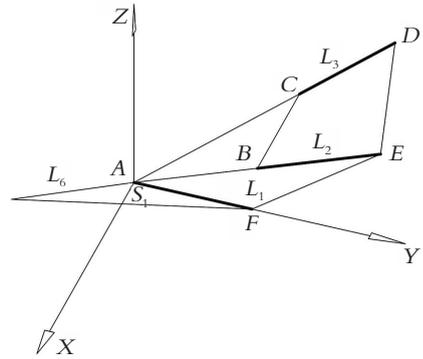
前文中叙述了折纸机构的一对不共点折痕在折叠过程中的位置分析,但是对于一个完整的首尾相连的多顶点折纸机构需要判断的是给定折叠平面绕折痕旋转一定角度后各条折痕的空间位置变化。这一节利用前文不共点折痕的运动分析方法,通过给定几何参数验证 3 条不共点折痕中末端折痕的位置变化,并利用 AutoCAD 软件进行空间坐标验证。

如图 4(a) 所示,三顶点折纸的 3 条相邻折痕  $L_1$ 、 $L_2$  和  $L_3$  分别交于中心三角形的 3 个顶点  $A$ 、 $B$  和  $C$ 。在折叠过程折痕  $L_3$  的空间位置由绕折痕  $L_1$  转动的旋转角  $\theta_1$  和绕折痕  $L_2$  转动的旋转角  $\theta_2$  共同决定。以点  $A$  为原点,向量  $AF$  方向为  $Y$  轴正方向, $Y$  轴正方向顺时针旋转  $90^\circ$  为  $X$  轴正方向,建立全局坐标系  $\{A\}$ ,如图 4(b) 所示,其中  $Z$  轴正方向满足右手定则。点  $A$  和  $F$  为折痕  $L_1$  上两点,点  $B$  和  $E$  为折痕  $L_2$  上两点,而点  $C$  和  $D$  则为折痕  $L_3$  上两个点。将折叠平面  $S_1$  在  $XY$  平面上固定为基座,取  $l_{AF}=l_{BE}=l_{CD}=l_{AB}=l_{CD}=100$ , $AB$  和折痕  $L_2$  与  $Y$  轴正方向夹角都为  $30^\circ$ , $AC$  和折痕  $L_3$  与  $Y$  轴正方向夹角都为  $60^\circ$ 。点  $B$ 、 $C$ 、 $D$  和  $E$  在旋转角为 0 的初始状态下相对全局坐标系的位置向量如下:

$$\begin{cases} \omega_B^0 = (-50 \quad 50\sqrt{3} \quad 0)^T \\ \omega_C^0 = (-150 \quad 50\sqrt{3} \quad 0)^T \\ \omega_D^0 = (-150-50\sqrt{3} \quad 50+50\sqrt{3} \quad 0)^T \\ \omega_E^0 = (-100 \quad 100\sqrt{3} \quad 0)^T \end{cases} \quad (9)$$



(a) 三顶点折纸初始状态各折痕分布



(b) 以点  $A$  为原点对该 3 条不共点折痕初始状态建立坐标系

图 4 3 条不共点折痕位置分析

Fig. 4 Analysis of the position of three non-intersect creases

过点  $A$  分别作折痕  $L_2$  和  $L_3$  的平行折痕  $l_2$  和  $l_3$ ,如图 5(a) 所示。此时  $l_3$  上点  $D$  相对全局坐标系的位置向量为  $\omega_D^0 = (-50\sqrt{3} \quad 50 \quad 0)^T$ 。且  $l_2$  绕折痕  $L_1$  旋转  $\theta_1$  的旋转矩阵如下:

$$R''_{L_1}(\theta_1) = \begin{pmatrix} c\theta_1 & 0 & s\theta_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_1 & 0 & c\theta_1 \end{pmatrix} \quad (10)$$

$l_3$  绕  $l_2$  旋转  $\theta_2$  的旋转矩阵如下:

$$R'_{l_2}(\theta_2) = \begin{pmatrix} a_1 \cdot (1-c\theta_2) + c\theta_2 & -b_1 \cdot (1-c\theta_2) & d_1 \cdot s\theta_2 \\ -b_1 \cdot (1-c\theta_2) & e_1 \cdot (1-c\theta_2) + c\theta_2 & c_1 \cdot s\theta_2 \\ -d_1 \cdot s\theta_2 & -c_1 \cdot s\theta_2 & c\theta_2 \end{pmatrix} \quad (11)$$

其中,  $a_1 = 0.25$ ,  $b_1 = 0.25\sqrt{3}$ ,  $c_1 = 0.5$ ,  $d_1 = 0.5\sqrt{3}$ ,  $e_1 = 0.75$ 。此时  $l_3$  上的点  $D''$  相对全局坐标系的位置向量如下:

$$\omega_{D''} = R''_{L_1}(\theta_1) \cdot R'_{l_2}(\theta_2) \cdot \omega_D^0 \quad (12)$$

又因为点  $B$  是  $L_2$  与线段  $AB$  的交点,所以线段  $AB$  绕  $L_1$  旋转  $\theta_1$  后得到的点  $B'$  同时也是  $L_2$  上的点,同理可得点  $C'$  同时也是  $L_3$  上的点。线段  $AC$  绕  $AB$  旋转  $\theta_2$  后得到的点  $C'$  同时也是  $L_3$  上的点。线段  $AC$  绕  $AB$  旋转  $\theta_2$  的旋转矩阵如下:

$$\mathbf{R}'_{AB}(\theta_2) = \begin{pmatrix} a_1 \cdot (1 - c\theta_2) + c\theta_2 & -b_1 \cdot (1 - c\theta_2) & d_1 \cdot s\theta_2 \\ -b_1 \cdot (1 - c\theta_2) & e_1 \cdot (1 - c\theta_2) + c\theta_2 & c_1 \cdot s\theta_2 \\ -d_1 \cdot s\theta_2 & -c_1 \cdot s\theta_2 & c\theta_2 \end{pmatrix} \quad (13)$$

将线段  $AB$  绕  $L_1$  旋转  $\theta_1$ , 且线段  $AC$  绕  $AB$  旋转  $\theta_2$  后得  $AC'$ , 此时点  $C'$  的位置向量如下:

$$\boldsymbol{\omega}_{C'} = \mathbf{R}''_{L_1}(\theta_1) \cdot \mathbf{R}'_{AB}(\theta_2) \cdot \boldsymbol{\omega}_C^0 \quad (14)$$

如图 5(b) 所示, 将  $l_3$  沿向量  $AC'$  方向平移  $|AC'|$  得  $l_{3''}$ , 其平移矩阵如下:

$$\mathbf{P}_{AC'} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \boldsymbol{\omega}_{C'} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

因此  $l_{3''}$  上点  $A''$  和  $D''$  相对全局坐标系的位置向量如下:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}'_{A''} &= \mathbf{P}_{AC'} \cdot \boldsymbol{\omega}_A^0 \\ \boldsymbol{\omega}'_{D''} &= \mathbf{P}_{AC'} \cdot \boldsymbol{\omega}_{D'} \end{aligned} \quad (16)$$

当  $\theta_1 = \theta_2 = 30^\circ$  时, 根据式 (9) — 式 (16) 可得此时点  $A''$  和  $D''$  在全局坐标系下的位置向量为

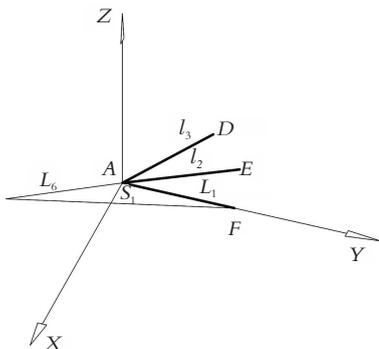
$$\boldsymbol{\omega}'_{A''} = (-99.5513 \quad 92.4038 \quad 107.4760 \quad 1)^T$$

$$\boldsymbol{\omega}'_{D''} = (-157.0272 \quad 145.7532 \quad 169.5272 \quad 1)^T$$

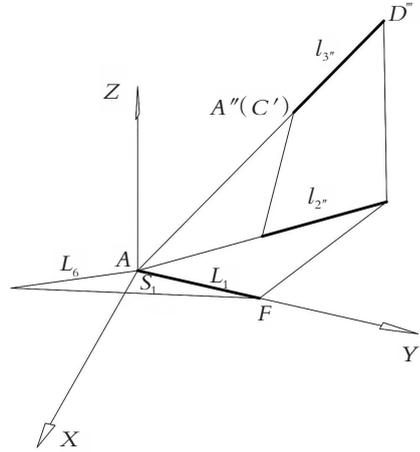
通过点  $A''$  和  $D''$  在全局坐标系下的位置向量, 可以得到点  $A''$  和  $D''$  在全局坐标系下的三维坐标为  $A''(-99.5513 \quad 92.4038 \quad 107.4760)$  和  $D''(-157.0272 \quad 145.7532 \quad 169.5272)$ , 所以确定了  $l_{3''}$  在全局坐标系的位置。

因为折痕  $L_3$  在折叠平面  $S_3$  内, 折痕  $L_2$  在折叠平面  $S_2$  内。若折叠平面  $S_3$  直接绕折痕  $L_2$  旋转  $\theta_2$ , 然后折叠平面  $S_2$  直接绕折痕  $L_1$  旋转  $\theta_1$ 。当  $\theta_1 = \theta_2 = 30^\circ$  时, 利用 AutoCAD 测得旋转之后  $L_3$  上点  $C'''_{L_3}$  和点  $D'''_{L_3}$  三维坐标为  $C'''_{L_3}(-99.5513 \quad 92.4038 \quad 107.4760)$  和  $D'''_{L_3}(-157.0272 \quad 145.7532 \quad 169.5272)$ 。

综上所述, 折叠平面  $S_3$  直接绕折痕  $L_2$  旋转  $\theta_2$ , 然后折叠平面  $S_2$  直接绕折痕  $L_1$  旋转  $\theta_1$  所得折痕  $L_3$  的空间位置, 与  $l_2$  绕折痕  $L_1$  旋转  $\theta_1$  且  $l_3$  绕  $l_2$  旋转  $\theta_2$  再沿向量  $AC'$  方向平移  $|AC'|$  所得折痕空间位置一致。



(a) 构造折痕  $L_2$  和  $L_3$  的平行折痕  $l_2$  和  $l_3$



(b) 平行折痕  $l_3$  旋转后沿向量  $AC'$  平移

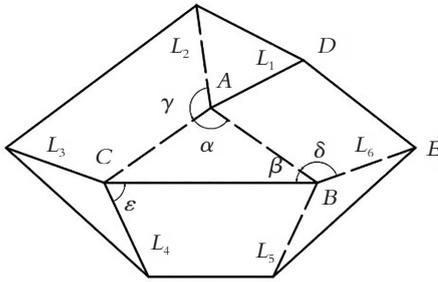
图 5 3 条不共点折痕运动分解

Fig. 5 The motion decomposition of three non-intersect creases

## 2.2 三顶点折纸不共点折痕位置分析及刚性折叠特性判断

分析不共点折痕位置的主要目的是为了更方便判定并确定折纸机构是否具有刚性折叠特性, 下文以具有一对平行折痕的三顶点六折痕折纸机构进行分析。如图 6(a) 所示, 令 6 条折痕为等长折痕, 顶点  $A, B$  和  $C$  处各扇形角均满足对角互补条件, 且折痕  $L_1$  与  $L_6$  平行, 机构逆时针运动。

固定折痕  $L_1$  为  $X$  轴, 取  $L_{AB} = L_{AC} = L_{ih} = 1, i = 1, 2, \dots, 6$ , 且  $\alpha = 110^\circ, \beta = 35^\circ, \gamma = 90^\circ, \varepsilon = 55^\circ, \gamma = \delta = 125^\circ$ 。各折叠平面厚度取为 10, 折痕在折叠平面边缘中心线处。利用前文所述方法计算在旋转角  $\theta_{ih}$  从 0 到  $\pi$  之间变化的折叠过程中折痕  $L_6$  的空间位置变化, 其中相邻折痕  $L_1$  与  $L_6$  之间相对位置变化如图 6(b) 所示。在旋转角  $\theta_{ih}$  从 0 到  $\pi$  之间变化的折叠过程中  $BD$  长度始终保持不变, 然而  $DE$  和  $AE$  长度先增大后减小。利用 ADAMS 刚柔耦合模块进行运动仿真和有限元分析, 折痕  $L_6$  与  $L_1$  所夹折叠平面  $S_6$  变形情况如图 7 所示, 其结果与图 6(b) 分析相符合, 所以折叠平面发生变形, 该折纸机构不具有刚性折叠特性。



(a) 三顶点六折痕折纸机构

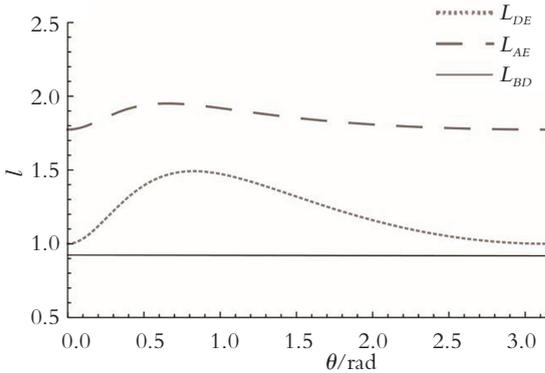
(b) 折痕  $L_1$  与  $L_6$  之间相对位置变化

图 6 折纸机构刚性可折叠性判断

Fig. 6 Judgment of the rigid foldability of the origami mechanism

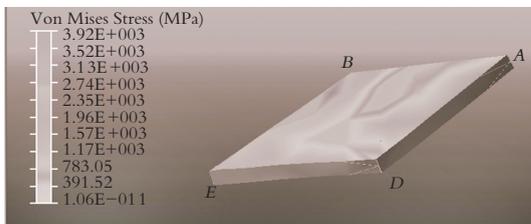
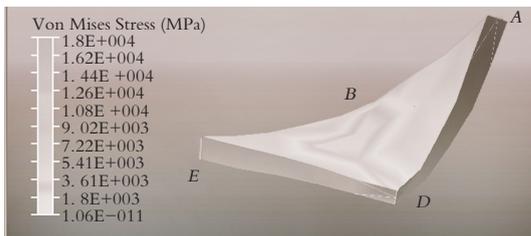
(a) 旋转角为  $30^\circ$  时折叠平面  $S_6$  变形情况(b) 旋转角为  $90^\circ$  时折叠平面  $S_6$  变形情况

图 7 ADAMS 刚柔耦合分析

Fig. 7 ADAMS rigid-flexible coupling analysis

### 3 结论

为研究折纸机构在折叠过程中不共点折痕的空间位置变化,提出通过构造不共点折痕的平行折痕将各不共点折痕汇交于同一顶点的方法将不共点折

痕的空间位置变化分解进行分析,并根据折痕空间位置变化对折叠平面变形的影响确定折纸机构的刚性折叠特性。

通过对一对不共点折痕和 3 条不共点折痕的运动分解和具体参数下的验证分析,结果表明:将不共点折痕的空间运动分解为旋转运动和平移运动两部分进行计算,这种方法简化了折叠过程中多条不共点空间位置的计算过程,并且计算所得折痕位置与折痕绕既定折痕直接旋转所得折痕的空间位置一致。通过判断相邻不共点折痕之间相对空间位置变化可以更直观地确定折叠平面是否发生变形以及该折纸机构是否具有刚性折叠特性。

### 参考文献 (References):

- [1] FITE I F, MING N H, HO T L. Foldable plastic bowl[P]. USD567592, 2008.
- [2] QUAGLIA C P, DASCANIO A J, THRALL A P. Bascule shelters: a novel erection strategy for origami inspired deployable structures[J]. Engineering Structures, 2014, 75(1): 276—287.
- [3] O'ROURKE J. How to fold it: the mathematics of linkage, origami, and polyhedra[M]. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2011.
- [4] MIURA K. Method of packaging and deployment of large membranes in space[J]. Institute of Space & Astronautical Science Report, 1985, 618(1): 1—9.
- [5] SALERNO M, ZHANG K, MENCIASSI A, et al. A novel 4-DOF origami grasper with an SMA actuation system for minimally invasive surgery[J]. IEEE Transactions on Robotics, 2016, 32(3): 484—498.
- [6] KURIBAYASHI K, TSUCHIYA K, YOU Z, et al. Self-deployable origami stentgrafts as a biomedical application of Nitinol shape memory alloy foil[J]. Materials Science and Engineering: A, 2006, 419(1-2): 131—137.
- [7] WU W, YOU Z. Modelling rigid origami with quaternions and dual quaternions[J]. Proceedings of Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2010, 466(2119): 2155—2174.
- [8] CHEN Y, FENG J. Folding of a type of deployable origami structures[J]. International Journal of Structural Stability and Dynamics, 2012, 12(6): 54—66.
- [9] YU H, GUO Z, WANG J. A method of calculating the degree of freedom of foldable plate rigid origami with adjacency matrix[J]. Advances in Mechanical Engineering, 2018, 10(6): 1—20.
- [10] EVANS T A, LANG R J, MAGLEBY S P, et al. Rigidly

- foldable origami twists [C]//Origami 6: Proceedings of the 6th International Meeting of Origami Mathematics. USA: American Mathematical Society, 2015.
- [11] WEI G W, DAI J S. Origami-inspired integrated planar-spherical overconstrained mechanisms [J]. *Journal of Mechanical Design*, 2014, 136(5): 1—13.
- [12] HE Z, GUEST, SIMON D. On rigid origami I: piecewise-planar paper with straightline creases[J]. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2019, 475(2232): 1—25.
- [13] 熊有伦,李文龙,陈文斌,等. 机器人学:建模、控制与视觉[M]. 武汉:华中科技大学出版社, 2018.
- XIONG You-lun, LI Wen-long, CHEN Wen-bin, et al. *Robotics: modeling, control and vision*[M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 2018.
- [14] CAI J, QIAN Z, JIANG C, et al. Mobility and kinematic analysis of foldable plate structures based on rigid origami [J]. *Journal of Mechanisms and Robotics*, 2016, 8(6): 1—6.
- [15] DAI J S, JONES J R. Kinematics and mobility analysis of carton folds in packing manipulation based on the mechanism equivalent[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 2002, 216(10): 959—970.

## Analysis of the Position of Non-intersect Creases During the Folding Process of the Origami Mechanism

WANG Feng, ZHANG Fan

(School of Mechanical and Automobile Engineering, Shanghai University of Engineering Science, Shanghai 201620, China)

**Abstract:** Aiming at the complex changes in the spatial position of the typical crease distribution in the folding process of the non-intersect creases in multi-vertex origami and the influence on the rigid folding characteristics of the origami mechanism, a motion through the decomposition of creases is proposed, a method to determine the position of the crease space and determine the rigid folding characteristics of the origami mechanism. This method first converges the different creases at the same vertex by constructing the parallel creases of the original creases, and determines the position change of the parallel creases according to the rotational movement of the intersect creases, then determines the translation direction and distance of the parallel creases after rotation according to the central polygon, determines the spatial position of the non-intersect creases after transformation, and determines the rigid folding characteristics of the origami mechanism according to the deformation of the folding plane. Through specific parameters, the three-vertex origami crease space position change is verified and analyzed. The results show that this analysis method not only simplifies the calculation process of the non-intersect point crease position in multi-vertex origami, but also paves the way for determining the deformation form of the folding plane when the origami mechanism cannot be folded.

**Key words:** origami mechanism; non-intersect creases; movement decomposition; rigid folding property

责任编辑:罗姗姗

引用本文/Cite this paper:

王锋,张帆. 折纸机构折叠过程不共点折痕的位置分析[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版), 2022, 39(4): 91—97.

WANG Feng, ZHANG Fan. Analysis of the position of non-intersect creases during the folding process of the origami mechanism [J]. *Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition)*, 2022, 39(4): 91—97.