doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2022.0004.009

带有 logistic 源的三维趋化系统弱解的最终光滑性

姜永峰
(电子科技大学 数学科学学院, 成都 611731)

摘 要:基于三维趋化系统弱解的整体存在性的结果,进一步考虑了一类带有 logistic 源抛物-抛物型趋化方程组在三维情形时对应的齐次诺依曼初边值条件下弱解的最终光滑性;通过构造能量泛函并利用 Sobolev 最大正则性理论、Sobolev 嵌入定理、Gagliardo-Nirenberg 不等式、Young 不等式、Hölder 不等式、Poincaré 不等式、紧嵌入定理以及 Gronwall 不等式得到解的高阶正则性估计;结果表明:对于任意非负且适当的初始值,可以证明到系统的弱解在一定的等待时间后变成经典解。

关键词:logistic 源;趋化系统;能量泛函;最终光滑性

中图分类号:O175.2 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-058X(2022)04-0072-05

0 引 言

生物学、物理学和医学等自然科学中存在着大量的非线性现象,这些非线性现象在数学上可利用非线性偏微分方程组来进行模拟和刻画,特别地,对于生物趋化方程组的研究是当前数学领域中一个具有意义与价值的研究方向。其中,趋化性是指细胞朝着有利于自身生长的环境移动的一个特征。一般地,如果细胞朝着化学信号浓度高的方向移动称为化学吸引,反之称为化学排斥。对于趋化现象,最早是由 Keller 和 Segel[1] 在 20 世纪 70 年代提出的一个开创性的描述趋化性的数学模型:

$$\begin{cases} u_t = \triangle u - \nabla \cdot (u \nabla v),\ x \in \Omega,\ t>0 \\ v_t = \triangle v - v + u,\ x \in \Omega,\ t>0 \end{cases} \tag{1}$$

其中,$u=u(x,t)$,$v=v(x,t)$ 分别表示细胞密度和化学信号浓度,$\Omega \subset R^d (d \geqslant 1)$ 表示具有光滑边界的有界区域。在式(1)中,由于交叉扩散项 $-\nabla \cdot (u\nabla v)$ 的存在,导致了式(1)的解可能会发生爆破。由此,吸引了大量的学者结合偏微分方程理论对式(1)进行了一系列的数学分析与研究。比如,Nagai 等[2] 证明了当空间维数 $d=1$ 或 $d=2$ 并且总质量 $\int_\Omega u_0$ 很小时式(1)对应的齐次 Neumann 初边值问题的解都是有界的;随后,Winkler[3] 证明了当空间维数更高时,式(1)的解会在有限时间内发生爆破。更进一步,若初值满足以下小性假设:

$$\| u_0 \|_{L^q(\Omega)} < \varepsilon、\| v_0 \|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon$$

其中,$\varepsilon>0$、$q>\dfrac{d}{2}$、$p>d$、$d \geqslant 3$,此时 Cao 等[4-5] 证明了式(1)的解是全局存在的。

一般地,由于经典的 Keller-Segel 系统式(1)只考虑了细胞的趋化性和扩散。但是,在实际的生物学背景下,大多数情况下都是需要考虑细胞的产生和死亡,在数学模型上体现出来就是 logistic 增长项的出现,因此便得到如下系统:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \nabla \cdot (u \nabla v) + \kappa u - \mu u^\alpha, & x \in \Omega, t>0 \\ v_t = \Delta v - v + u, & x \in \Omega, t>0 \end{cases}$$

这里,$\kappa \in \mathbb{R}$ 和 $\mu>0$ 分别表示出生率和死亡率和参数 $\alpha>1$。在 2015 年,Xiang[6] 证明了当空间维数 $d \leqslant 2$,参数 $\alpha=2$ 时,对于任意小的 $\mu>0$。上述系统存在全局一致有界解。

当空间维数 $d \geqslant 3$,参数 $\alpha=2$ 时,Winkler[7] 证明

收稿日期:2021-08-18;**修回日期**:2021-10-10.

基金项目:四川省科技计划应用基础项目资助(2020YJ0264).

作者简介:姜永峰(1997—),男,四川雅安人,硕士研究生,从事偏微分方程理论研究.

了μ充分大时,对于任意充分光滑的非负初始值,上述系统存在唯一的全局有界经典解;Lin[8]进一步证明了当空间维数$d=3,\alpha\geqslant 2$时,若$\mu^{\frac{1}{\alpha-1}}\geqslant 20$,上述系统存在全局有界经典解。一些其他结论也可参考文献[9-10]。与不含 logistic 源的式(1)相关结论比较可知,上述系统中二次增长的 logistic 源的出现可以有效地抑制方程组解的爆破奇性的形成。

特别地,对于结构简单的细胞也会朝着消耗营养物质的方向运动,故与上述系统相对应的一个典型变体是考虑如下具有信号消耗机制的趋化模型

$$\begin{cases}u_t=\Delta u-\nabla\cdot(u\nabla v)+\kappa u-\mu u^{\alpha}, & x\in\Omega,t>0\\ v_t=\Delta v-uv, & x\in\Omega,t>0\end{cases}\tag{2}$$

其中,第二个等式中的uv项表示细胞在整个趋化过程当中所消耗的化学物质。此外与具有信号产生机制的系统相比较,系统容易得到v的L^∞有界性估计,故信号消耗性系统更容易获得解的全局存在性从而抑制爆破的发生。当空间维数$d\leqslant 2$,参数$\alpha=2$时,Zhang[11]等建立了对任意的$\mu>0$以及任意非负且适当的初值,式(2)存在全局的经典解并且当时间$t\to\infty$时,式(2)的解将会收敛到平衡态。更进一步,也证明了当$\kappa>0$时,式(2)的解收敛到平衡态$(\frac{\kappa}{\mu},0)$。事实上,若空间维数$d=2$或$\kappa=\mu=0$,当$v_{0_{L^\infty(\Omega)}}\leqslant\frac{1}{6(d+1)}$,$\alpha=2$时,Tao 和 Winkler[12]证明了式(2)的解是整体存在并且是有界的;同时也证明了在三维情形时弱解的整体存在性和最终光滑性。另外,当 logistic 项为次二次增长形式时,即$\alpha<2$,目前已经得到的全局存在结果依赖于初值的小性假设[13]。综上所述,关于此类模型全局适定性的研究,此前的结果是在$\alpha\geqslant 2$的情形下得出的,在 logistic 增长项为次二次的情形下,即$1<\alpha<2$时,最近,Jiang 和 Han[14]建立了在不依赖小初值的条件下,式(2)在三维情形时存在整体弱解。随之而来的问题是,系统式(2)的弱解能否在一定的等待时间后变为经典解呢?

基于以上所得到的结果,研究了当$1<\alpha<2$时,对于任意充分光滑的初始值,如下一类具有 logistic 增长项的趋化方程组在三维情形时弱解的最终光滑性:

$$\begin{cases}u_t=\Delta u-\nabla\cdot(u\nabla v)+u-u^{\alpha}, & x\in\Omega,t>0\\ v_t=\Delta v-uv, & x\in\Omega,t>0\\ \dfrac{\partial u}{\partial\nu}=\dfrac{\partial v}{\partial\nu}=0, & x\in\partial\Omega,t>0\\ u(x,0)=u_0(x),\ v(x,0)=v_0(x), & x\in\Omega\end{cases}\tag{3}$$

其中,$\Omega\subset R^3$是一个具有光滑边界$\partial\Omega$的有界区域,给定的非负初值满足:

$$\begin{cases}u_0\in C^0(\overline{\Omega}),\ u_0\not\equiv 0,\text{且 }u_0\geqslant 0,x\in\overline{\Omega}\\ v_0\in W^{1,\infty}(\Omega),v_0\geqslant 0,\text{且 }x\in\overline{\Omega}\end{cases}\tag{4}$$

这里首先给出本文的主要结果。

定理 1　设$\Omega\subset R^3$是一个具有光滑边界的有界区域,那么对于满足式(4)的任意初始值(u_0,v_0),系统式(3)的解(u,v)满足对所有的$T>0$和$\gamma\in(0,1)$,有

$$u\in C^{2+\gamma,1+\frac{\gamma}{2}}(\overline{\Omega}\times[T,\infty))\text{且 }v\in C^{2+\gamma,1+\frac{\gamma}{2}}(\overline{\Omega}\times[T,\infty))$$

1　准备工作

为了获得式(3)的弱解的最终光滑性,基于文献[14],对任意的$\varepsilon\in(0,1)$,这里首先考虑如下正则化系统:

$$\begin{cases}u_{\varepsilon t}=\Delta u_\varepsilon-\nabla\cdot(\dfrac{u_\varepsilon}{(1+\varepsilon u_\varepsilon)^2}\nabla_\varepsilon)+u_\varepsilon-u_\varepsilon^{\alpha}, x\in\Omega,\ t>0\\ v_{\varepsilon t}=\Delta v_\varepsilon-v_\varepsilon\dfrac{u_\varepsilon}{1+\varepsilon u_\varepsilon}, x\in\Omega,\ t>0\\ \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial\nu}=\dfrac{\partial v_\varepsilon}{\partial\nu}=0, x\in\partial\Omega,\ t>0\\ u_\varepsilon(x,0)=u_0(x),v_\varepsilon(x,0)=v_0(x)\ x\in\Omega\end{cases}\tag{5}$$

通过构造能量泛函的方法来得到$\frac{|\nabla u_\varepsilon|^2}{u_\varepsilon^2}$的时空估计。

引理 1　设$G_{\varepsilon,B}(t):=\int_\Omega u_\varepsilon-\int_\Omega\ln u_\varepsilon+\frac{B}{2}\int_\Omega v_\varepsilon^2$,则存在正常数$B_0$,使得对任意的$B>B_0,t\in(0,\infty)$和$\varepsilon\in(0,1)$,有

$$\frac{d}{dt}G_{\varepsilon,B}(t)+\int_\Omega(u_\varepsilon-1)(u_\varepsilon^{\alpha-1}-1)+\frac{1}{2}\int_\Omega\frac{|\nabla u_\varepsilon|^2}{u_\varepsilon^2}\leqslant 0\tag{6}$$

证明　首先令$B_0=\frac{1}{2}$满足$B>B_0$,对$G_{\varepsilon,B}(t)$直接求导可得

$$\frac{d}{dt}G_{\varepsilon,B}(t)=\int_\Omega u_{\varepsilon t}-\int_\Omega\frac{u_{\varepsilon t}}{u_\varepsilon}+B\int_\Omega v_\varepsilon v_{\varepsilon t}=$$

$$\int_\Omega u_\varepsilon-\int_\Omega u_\varepsilon^{\alpha}-\int_\Omega\frac{\Delta u_\varepsilon}{u_\varepsilon}+\int_\Omega\frac{\nabla\cdot(\dfrac{u_\varepsilon}{(1+\varepsilon u_\varepsilon)^2}\nabla_\varepsilon)}{u_\varepsilon}-$$

$$\int_\Omega 1+\int_\Omega u_\varepsilon^{\alpha-1}+B\int_\Omega v_\varepsilon\Delta v_\varepsilon-B\int_\Omega v_\varepsilon^2\frac{u_\varepsilon}{1+\varepsilon u_\varepsilon}\tag{7}$$

一方面,由式(7)可以直接得到

$$\int_\Omega u_\varepsilon - \int_\Omega u_\varepsilon^\alpha - \int_\Omega 1 + \int_\Omega u_\varepsilon^{\alpha-1} = -\int_\Omega (u_\varepsilon - 1)(u_\varepsilon^{\alpha-1} - 1) \tag{8}$$

与

$$-\int_\Omega \frac{\Delta u_\varepsilon}{u_\varepsilon} = -\int_\Omega \frac{|\nabla u_\varepsilon|^2}{u_\varepsilon^2} \tag{9}$$

将式(8)、式(9)代入式(7),有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G_{\varepsilon,B}(t) = -\int_\Omega (u_\varepsilon - 1)(u_\varepsilon^{\alpha-1} - 1) - \int_\Omega \frac{|\nabla_\varepsilon|^2}{u_\varepsilon^2} + \int_\Omega \frac{u_\varepsilon \nabla_\varepsilon}{(1+\varepsilon u_\varepsilon)^2} \cdot \frac{\nabla_\varepsilon}{u_\varepsilon^2} - B\int_\Omega |\nabla_\varepsilon|^2 - B\int_\Omega v_\varepsilon^2 \frac{u_\varepsilon}{1+\varepsilon u_\varepsilon}$$

由于 $\frac{1}{(1+\varepsilon u_\varepsilon)^2} \leqslant 1$ 且 $\int_\Omega v_\varepsilon^2 \frac{u_\varepsilon}{1+\varepsilon u_\varepsilon} \geqslant 0$,再结合 Young 不等式,可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G_{\varepsilon,B}(t) + \int_\Omega (u_\varepsilon - 1)(u_\varepsilon^{\alpha-1} - 1) + \frac{1}{2}\int_\Omega \frac{|\nabla u_\varepsilon|^2}{u_\varepsilon^2} + \left(B - \frac{1}{2}\right)\int_\Omega |\nabla v_\varepsilon|^2 \leqslant 0$$

故而引理 1 成立。

引理 2 设对任意的 $\varepsilon>0$,存在常数 $k>0$ 与 $C>0$,使得

$$\int_\Omega u_\varepsilon(\cdot,t) > k \quad t \in (0,\infty) \tag{10}$$

$$\int_0^\infty \int_\Omega (u_\varepsilon - 1)(u_\varepsilon^{\alpha-1} - 1) \leqslant C \tag{11}$$

证明 对任意的 $\varepsilon>0$ 和 $t>0$,将式(6)在 $0-t$ 上积分,可得

$$\int_\Omega u_\varepsilon(t) - \int_\Omega \ln u_\varepsilon(t) + \frac{B}{2}\int_\Omega v_\varepsilon^2(t) + \int_0^t\int_\Omega (u_\varepsilon - 1)(u_\varepsilon^{\alpha-1} - 1) + \frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega \frac{|\nabla u_\varepsilon|^2}{u_\varepsilon^2} \leqslant \int_\Omega u_0 - \int_\Omega \ln u_0 + \frac{B}{2}\int_\Omega v_0^2$$

特别地,对任意的 $t>0$,有

$$\int_\Omega \ln u_\varepsilon(t) \geqslant \int_\Omega u_\varepsilon(t) - \int_\Omega u_0 + \frac{B}{2}\int_\Omega v_\varepsilon^2(t) - \frac{B}{2}\int_\Omega v_0^2 + \int_\Omega \ln u_0 + \int_0^t\int_\Omega (u_\varepsilon - 1)(u_\varepsilon^{\alpha-1} - 1) + \frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega \frac{|\nabla u_\varepsilon|^2}{u_\varepsilon^2} \geqslant -\int_\Omega u_0 - \frac{B}{2}\int_\Omega v_0^2 + \int_\Omega \ln u_0 + \int_0^t\int_\Omega (u_\varepsilon - 1)(u_\varepsilon^{\alpha-1} - 1) + \frac{1}{2}\int_0^t\int_\Omega \frac{|\nabla u_\varepsilon|^2}{u_\varepsilon^2} \tag{12}$$

根据文献[14]的引理 2.2 可知,存在正常数 C 使得 $\int_\Omega \ln u_\varepsilon(t) \leqslant \int_\Omega u_\varepsilon(t) \leqslant C$。故证得式(11)。

另外,由式(12)可以得到

$$\int_\Omega \ln u_\varepsilon(t)\frac{1}{|\Omega|} \geqslant \frac{1}{|\Omega|}\left(-\int_\Omega u_0 - \frac{B}{2}\int_\Omega v_0^2 + \int_\Omega \ln u_0\right) := k_1, t > 0$$

结合 Jensen 不等式,可知

$$\int_\Omega u_\varepsilon(t)\frac{1}{|\Omega|} \geqslant \mathrm{e}^{\int_\Omega \ln u_\varepsilon(t)\frac{1}{|\Omega|}} \geqslant \mathrm{e}^{k_1}t > 0$$

即引理 2 成立。

引理 3 设对任意的 $\eta>0$,存在 $T>0$,使得对所有的 $t>T$ 时,满足

$$0 \leqslant \int_t^{t+1}\int_\Omega v < \eta$$

证明 对式(5)的第二个方程在 $\Omega\times(0,t)$ 上积分,可得

$$\int_\Omega v_0 \geqslant \int_0^t\int_\Omega v_\varepsilon \frac{u_\varepsilon}{1+\varepsilon u_\varepsilon}, t > 0$$

由文献[14]中的引理 4.1,可知

$$\int_\Omega v_0 \geqslant \int_0^t\int_\Omega uv, t > 0$$

特别地,当 $t\to\infty$ 时,有 $\int_t^{t+1}\int_\Omega uv \to 0$,记 $\bar{v} := \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega v(\cdot,t)$,进而,对任意的 $t>0$,有

$$\int_t^{t+1}\int_\Omega uv = \int_t^{t+1}\int_\Omega u(v - \bar{v}) + \int_t^{t+1}\bar{v}\int_\Omega u \tag{13}$$

一方面,由 Poincaré 不等式、Hölder 可得

$$\int_t^{t+1}\int_\Omega u(v - \bar{v}) \leqslant \left(\int_t^{t+1} u^2_{L^{\frac{q}{q-1}}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_t^{t+1} v - \bar{v}^2_{L^q}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C_1\left(\int_t^{t+1} u^2_{L^{\frac{q}{q-1}}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_t^{t+1} \nabla v^2_{L^2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{14}$$

另外,由 Gagliardo-Nirenberg 不等式、文献[14]的引理 2.4 和引理 4.1 可知,存在正常数 C_2, C_3, C_4,满足

$$\int_t^{t+1} u^2_{L^{\frac{q}{q-1}}} = \int_t^{t+1} \| u^{\frac{1}{2}} \|^4_{L^{\frac{2q}{q-1}}} \leqslant C_2\int_t^{t+1} \| \nabla u^{\frac{1}{2}} \|^{4a}_{L^2} \| u^{\frac{1}{2}} \|^{4(1-a)}_{L^2} + C_2\int_t^{t+1} \| u^{\frac{1}{2}} \|^4_{L^2} \leqslant C_3\int_t^{t+1} \| \nabla u^{\frac{1}{2}} \|^2_{L^2} + C_3 \leqslant C_4 \tag{15}$$

其中,$a = \frac{3}{2q}$ 且 $3 \leqslant q \leqslant 6$。又因为 $\nabla v \in L^2(\Omega\times(0,\infty))$,则当 $t\to\infty$ 时有 $\left(\int_t^{t+1} \nabla v^2_{L^2}\right)^{\frac{1}{2}} \to 0$。因此,结合式(15)可以得到当 $t\to\infty$ 时,式(14)满足 $\int_t^{t+1}\int_\Omega u(v - \bar{v}) \to 0$。最后,记 $k_2 := \int_\Omega u$,可以直接得到

$$0 \leqslant \frac{1}{|\Omega|}\int_t^{t+1}\int_\Omega v k_2 \leqslant \int_t^{t+1}\bar{v}\int_\Omega u \to 0, t \to \infty$$

故引理 3 证毕。

接下来,通过应用 Sobolev 最大正则性的方法,可得 u_ε 与 v_ε 更高阶的正则性估计。

引理 4　设 $p\in(1,\infty)$,则存在常数 $C>0,\varepsilon_0>0,T>0,\gamma\in(0,1)$,使得对任意的 $t>T,\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$,满足

$$\int_t^{t+1}\|v_{\varepsilon t}\|_{L^p(\Omega)}+\int_t^{t+1}\|v_\varepsilon\|_{W^{2,p}(\Omega)}\leqslant C$$

进一步,有

$$\|v_\varepsilon\|_{C^{1+\gamma,\frac{\gamma}{2}}(\bar{\Omega}\times[t,t+1])}\leqslant C$$

证明　该引理的证明可以参考文献[15]中引理 3.13 的证明。

引理 5　设 $p\in(1,\infty)$,则存在常数 $C>0,\varepsilon_0>0,T>0,\gamma\in(0,1)$,使得对任意的 $t>T,\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$,满足

$$\int_t^{t+1}\|u_{\varepsilon t}\|_{L^p(\Omega)}+\int_t^{t+1}\|u_\varepsilon\|_{W^{2,p}(\Omega)}\leqslant C$$

进一步,有

$$\|u_\varepsilon\|_{C^{1+\gamma,\frac{\gamma}{2}}(\bar{\Omega}\times[t,t+1])}\leqslant C$$

证明　类似地,该引理的证明可以参考文献[15]中引理 3.14 的证明。

引理 6　设存在常数 $\gamma\in(0,1)$,$T_0>0$ 和序列 $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbf{N}}\subset(0,1)$,使得对任意的 $t>T_0$,当 $\varepsilon=\varepsilon_j\to0$ 时,有

$$u_\varepsilon\to u,v_\varepsilon\to v\ 于\ C^{1+\gamma,\frac{\gamma}{2}}(\bar{\Omega}\times[t,t+1])$$

此外,存在正常数 C,使得

$$\|u\|_{C^{1+\gamma,\frac{\gamma}{2}}(\bar{\Omega}\times[t,t+1])}\leqslant C$$
$$\|v\|_{C^{1+\gamma,\frac{\gamma}{2}}(\bar{\Omega}\times[t,t+1])}\leqslant C$$

证明　由引理 4 和引理 5 直接可证得引理 6.

引理 7　设存在常数 $\gamma\in(0,1)$,$T>0$,使得

$$u、v\in C^{2+\gamma,1+\frac{\gamma}{2}}(\bar{\Omega}\times[T,\infty))$$

证明　设 $\xi:\mathbf{R}\to[0,1]$ 是一个光滑单调的函数,并且在 $(-\infty,0]$ 上满足 $\xi\equiv0$,在 $(1,\infty)$ 上满足 $\xi\equiv1$. 对任意的 $t_0\in\mathbf{R}$,记 $\xi_{t_0}:=\xi(\cdot,-t_0)$. 则 ξv 是以下方程的解

$$\tilde{v}_t=\Delta\tilde{v}+g,\quad \tilde{v}(T)=0,\quad \partial_\nu\tilde{v}|_{\partial\Omega}=0$$

其中,$g=-\xi uv+v\xi'\in C^{\gamma,\frac{\gamma}{2}}(\bar{\Omega}\times(T,\infty))$。另外,由文献[16]可知该问题的解 ξv 是唯一的,并且 $\xi v\in C^{2+\gamma,1+\frac{\gamma}{2}}(\bar{\Omega}\times[T+1,\infty))$。

最后,结合 ξ 的定义,可以得到

$$v\in C^{2+\gamma,1+\frac{\gamma}{2}}(\bar{\Omega}\times[T+1,\infty))$$

同样地,ξu 是以下初边值问题的解:

$$\tilde{u}_t=\Delta\tilde{u}-m_1\cdot\nabla\tilde{u}+m_2,\quad \tilde{u}(T)=0,\quad \partial_\nu\tilde{u}|_{\partial\Omega}=0$$

其中 $m_1=\nabla v$、$m_2=-\xi u\Delta v+\xi u-\xi u^\alpha+\xi' u$,并且 $m_1,m_2\in C^{\gamma,\frac{\gamma}{2}}(\bar{\Omega}\times(T,\infty))$. 另一方面,由文献[16]可知该问题的解 ξu 是唯一的,并且 $\xi u\in C^{2+\gamma,1+\frac{\gamma}{2}}(\bar{\Omega}\times[T+1,\infty))$。最后,结合 ξ 的定义,有

$$u\in C^{2+\gamma,1+\frac{\gamma}{2}}(\bar{\Omega}\times[T+1,\infty))$$

于是,引理 7 证毕。

定理 1 的证明:由引理 7 可以直接证得定理 1。

2　结论与讨论

生物趋化方程组的研究具有重要的理论价值和极强的现实意义。本文利用能量方法、先验估计等一系列偏微分方程的理论知识研究了一类具有 logistic 源的信号消耗型趋化方程组。证明了结论:当空间维数 $d=3$ 时,参数 α 满足 $1<\alpha<2$ 时,带有 logistic 源的三维趋化系统的弱解在一定的等待时间后变成经典解。关于此类模型解的适定性的研究,目前已有的结果都是建立在 $\alpha\geqslant2$ 或者对初值有小性假设的前提下。而对于 logistic 源为次二次增长形式时的结论还比较少,仍然有许多问题还值得进一步地研究。比如:于维数 $d>3$ 的情况,该系统的弱解是否是最终光滑的。同样地,对带有多孔介质趋化系统的解的最终光滑性也是值得进行相应研究。

对非线性抛物型方程解的适定性进行研究,目前是数学领域中一个重要的研究方向。一方面,这些非线性的抛物型方程有着重要的理论价值和极强的现实意义。另一方面,也提出了许多具有挑战性的数学问题,对于这些问题的研究将会有助于完善数学的理论方法。

参考文献(References):

[1] KELLER E F, SEGEL L A. Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability[J]. Journal of Theoretical Biology, 1970, 26(3):399—415.

[2] NAGAI T, SENBA T, YOSHIDA K. Application of the trudinger-moser inequality to a parabolic system of chemotaxis[J]. Funkcialaj Ekvacioj, 1997, 40(3):411—433.

[3] WINKLER M. Finite-time blow-up in the higher-dimensional parabolic-parabolic keller-segel system[J]. J. Math. Pures Appl, 2013, 100:748—767.

[4] CAO X R. Global bounded solutions of the higher-dimensional keller-segel system under smallness conditions in optimal spaces[J]. Discrete and Continuous Dynamical System Series A, 2015, 5(5):1891—1904.

[5] WINKLER M. Aggregation vs. global diffusive behavior

in the higher-dimensional keller-segel model[J]. Journal of Differential Equations, 2010, 248:2889—2905.

[6] XIANG T. Boundedness and global existence in the higher-dimensional parabolic-parabolic chemotaxis system with/without growth source[J]. Journal of Differential Equations, 2015, 258:4275—4323.

[7] WINKLER M. Boundedness in the higher-dimensional parabolic-parabolic chemotaxis system with logistic source [J]. Communications in Partial Differential Equations, 2010, 35:1516—1537.

[8] LIN K, MU C L. Global dynamics in a fully parabolic chemotaxis system with logistic source[J]. Discrete and Continuous Dynamical System, 2016, 36:5025—5046.

[9] LI X, XIANG Z Y. Boundedness in quasilinear keller-segel equations with nonlinear sensitivity and logistic source[J]. Discrete and Continuous Dynamical System, 2015, 35:3503—3531.

[10] XIANG T. Dynamics in a parabolic-elliptic chemotaxis system with growth source and nonlinear secretion[J]. Communications on Pure and Applied Analysis, 2019, 18:255—284.

[11] ZHANG Q, LI X. Stabilization and convergence rate in a chemotaxis system with consumption of chemoattractant [J]. Journal of Mathematical Physics, 2015, 56(8): 1301—1310.

[12] TAO Y, WINKLER M. Eventual smoothness and stabilization of large-data solutions in a three-dimensional chemotaxis system with consumption of chemoattractant [J]. Journal of Differential Equations, 2012, 252(3): 2520—2543.

[13] BAGHAEI K, KHELGHATI A. Global existence and boundedness of classical solutions for a chemotaxis model with consumption of chemoattractant and logistic source [J]. Math. Meth. Appl, Sci., 2016, 40(10):3799—3807.

[14] JIANG K, HAN Y. How far does logistic dampening influence the global solvability of a high-dimensional chemotaxis system[J]. Boundary Value Problems, 2021, (1):120—128.

[15] LANKEIT, JOHANNES. Long-term behaviour in a chemotaxis-fluid system with logistic source[J]. Mathematical Models & Methods in Applied Sciences, 2016, 26(11):2071—2109.

[16] LADYZHENSKAYA O A, SOLONNIKOV V A, URALTS-EVA N N. Linear and quasi-linear equations of parabolic type[M]. USA:American Mathematical Society, 1968.

The Final Smoothness of the Weak Solution of the Three-dimensional Chemotaxis System with Logistic Source

JIANG Yong-feng

(School of Mathematical Sciences, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China)

Abstract: Based on the results of the global existence of weak solutions of three-dimensional chemotaxis system, this paper further considers the final smoothness of the weak solutions of a class of parabolic chemotaxis equations with logistic source under the corresponding homogeneous Neumann initial boundary value conditions in three-dimensional case. In this paper, the higher-order regularity estimation of the solution is obtained by constructing the energy functional and using Sobolev maximum regularity theory, Sobolev embedding theorem, Gagliardo Nirenberg inequality, Young inequality, Hölder inequality, Poincaré inequality, compact embedding theorem and Gronwall inequality. The results show that for any nonnegative and appropriate initial value, it can be proved that the weak solution of the system becomes a classical solution after a certain waiting time.

Key words: logistic source; chemotaxis system; energy functional; final smoothness

责任编辑:田 静

引用本文/Cite this paper:

姜永峰.带有 logistic 源的三维趋化系统弱解的最终光滑性[J].重庆工商大学学报(自然科学版),2022,39(4):72—76.

JIANG Yong-feng. The final smoothness of the weak solution of the three-dimensional chemotaxis system with logistic source[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition),2022,39(4):72—76.