

doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2022.0003.007

# 混沌 Yang 系统的 Hopf 分岔分析与控制

周六圆, 崔岩, 赵少卿, 卢晨晖

(上海工程技术大学 机械工程学院, 上海 201620)

**摘要:**以混沌 Yang 系统为研究对象,提出了一类时滞混沌 Yang 系统,弥补了现有混沌体系的不足,通过数值计算明确了系统在平衡点  $E_0(0,0,0)$  处的局部稳定性以及时滞系统 Hopf 分岔的存在性,并由此推导出时滞系统发生 Hopf 分岔时的条件:当  $\tau = \tau_n$  时,时滞系统在平衡点  $E_0(0,0,0)$  处分岔已经产生,并存在极限环。根据线性状态反馈控制法,有效地对时滞系统的分岔点进行了提前或滞后控制;通过龙格库塔方法,运用 MATLAB 软件仿真得到了时滞系统在分岔点  $\tau_k = 1.4285$  处发生了超临界 Hopf 分岔现象;同时发现改变控制参数  $k$  的值可以提前或滞后分岔的产生。

**关键词:**时滞 Yang 系统;单时滞 Hopf 分岔;Matlab;分岔控制

**中图分类号:** O415; O322

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1672-058X(2022)03-0047-07

## 0 引言

混沌系统广泛存在于自然科学和人文科学领域<sup>[1]</sup>。1963 年, Lorez<sup>[2-3]</sup>混沌模型的提出,证实了在混沌系统中,即使很小的扰动也会导致巨大的无法预测的变化,并且 Lorenz 在演讲中用著名的“蝴蝶效应”阐述了这一理论。著名数学家 Smale 对结果稳定性做了深入研究,引出了拓扑马蹄理论,随后混沌理论进入了蓬勃发展的时期<sup>[4]</sup>,一系列混沌模型也被研究人员发现,如 Chen 系统、Lü 系统、Chua 系统等<sup>[5-8]</sup>。近十年来,混沌系统设计、动力学分析、Hopf 分岔、混沌控制和反控制、时滞系统分析等混沌研究不断发展,很多学者从各种自然现象和非线性的工程实际中抽象出各类混沌系统,使得混沌理论学说在迈向实际应用的过程中更进一步。在混沌理论应用过

程中,时滞因素的作用不可忽视, Mackey 和 Glass 首先发现混沌现象存在于时滞系统中<sup>[9-12]</sup>。2015 年,蔡萍<sup>[13]</sup>分析非线性动力系统的分岔理论,丰富和完善了 Hopf 分岔理论;魏朝颖等<sup>[14]</sup>通过周期函数正交性方法,分析了具有离散时滞的单种群模型 Hopf 分支周期解问题,并由此给出了  $\tau_0$  在分支周期解存在的充分条件;孙观等<sup>[15]</sup>通过对时滞类 Lü 系统的分析得出系统达到稳定时的时滞参数;陈立林等<sup>[16]</sup>在原 Rössler 系统基础上增加了时滞项,运用变量延时反馈法对 Rössler 混沌系统进行控制。

Yang 系统是具有两个非线性项的类 Lorenz 新型混沌系统<sup>[17]</sup>,本文在混沌 Yang 系统的基础上提出一种单时滞类 Yang 系统<sup>[18]</sup>,首先分析时滞系统的动力学特征,并结合计算得出单时滞 Yang 系统的时滞参数,明确系统发生 Hopf 分岔的条件;然后以

收稿日期:2021-03-05;修回日期:2021-05-18.

基金项目:国家自然科学基金青年科学基金项目(11604205).

作者简介:周六圆(1995—),男,安徽池州人,硕士研究生,从事混沌理论及控制研究.

通讯作者:崔岩(1980—),男,辽宁抚顺人,副教授,博士,硕士生导师,从事流体机械、混沌理论及控制研究. Email:

Cuiyan3020@Sohu.com.

此为基础对该系统采取线性状态反馈控制,对系统的分岔发生时间进行提前和滞后,由此控制分岔发生的时间,扩大系统的应用范围,实现对该时滞系统的有效控制;最后用 MATLAB 软件仿真验证理论结果的正确性。

## 1 时滞系统分析

### 1.1 单时滞混沌 Yang 系统稳定性分析

混沌 Yang 系统描述为

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y-x) \\ \dot{y} = cx - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases}$$

其中,  $a, b, c$  均为常数,当  $a = 35, b = 3, c = 35$  时,混沌 Yang 系统存在混沌吸引子(图 1)。

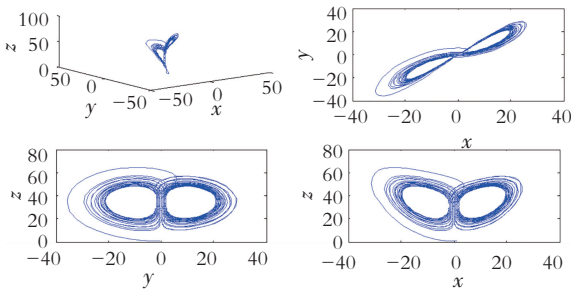


图 1 Yang 系统混沌吸引子图像

Fig. 1 Chaotic attractor image of Yang

当  $bc < 0$  时, Yang 系统只有  $E_0(0, 0, 0)$  一个平衡点;当  $bc > 0$  时,系统存在  $E_0(0, 0, 0), E_1(\sqrt{bc}, \sqrt{bc}, c), E_2(-\sqrt{bc}, -\sqrt{bc}, c)$  3 个平衡点。

在研究 Yang 系统的稳定性问题时,本文提出了一种单时滞 Yang 系统。通过对单时滞 Yang 系统的平衡点稳定性分析和 Hopf 时滞分岔参数的分析研究,验证了单时滞 Yang 系统 Hopf 分岔的存在性。

在 Yang 系统的第二个方程上添加时滞项,方程描述为

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y-x) \\ \dot{y} = -xz + cx(t-\tau) \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases}$$

这里仅对平衡点  $E_0(0, 0, 0)$  进行分析,其余平衡点分析相同。时滞系统在平衡点  $E_0(0, 0, 0)$  处的

线性化方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y-x) \\ \dot{y} = cx(t-\tau) \\ \dot{z} = -bz \end{cases} \quad (3)$$

对应的 Jacobi 矩阵为

$$J_0 = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ ce^{-\lambda\tau} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix}$$

特征方程如下:

$$\begin{aligned} \lambda^3 + (a+b)\lambda^2 + ab\lambda - (ac\lambda + abc)e^{-\lambda\tau} &= 0 \\ \text{令 } p_1 = a+b, p_2 = ab, p_3 = ac, p_4 = abc, \text{得} \\ \lambda^3 + p_1\lambda^2 + p_2\lambda - (p_3\lambda + p_4)e^{-\lambda\tau} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

当时滞参数  $\tau = 0$  时,有

$$\lambda^3 + p_1\lambda^2 + (p_2 - p_3)\lambda - p_4 = 0$$

若特征方程所有的特征根均有复实部,根据 Routh-Hurwitz 判据可知,满足  $p_1 > 0, p_4 < 0, p_1(p_2 - p_3) + p_4 > 0$ , 对应参数代入式(1)可知条件满足,时滞系统在平衡点处是局部渐进稳定的。

### 1.2 Hopf 分岔分析

时滞参数  $\tau > 0, \lambda = \pm i\omega (\omega > 0)$  时,代入式(1)得  $-i\omega^3 - p_1\omega^2 + p_2i\omega(p_3i\omega + p_4)(\cos \omega\tau - i \sin \omega\tau) = 0$  令实数和虚数分别等于零,得

$$\begin{cases} -p_1\omega^2 - p_3\omega \sin \omega\tau - p_4 \cos \omega\tau = 0 \\ -i\omega^3 + p_2i\omega - p_3i\omega \cos \omega\tau + p_4i \sin \omega\tau = 0 \end{cases} \quad (2)$$

移项,平方相加:

$$\omega^6 + (p_1^2 - 2p_2)\omega^4 - (p_3^2 - p_2^2)\omega^2 - p_4^2 = 0 \quad (3)$$

令  $\omega^2 = \xi$ , 有

$$\xi^3 + (p_1^2 - 2p_2)\xi^2 - (p_3^2 - p_2^2)\xi - p_4^2 = 0 \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad (4)$$

令  $g(\xi) = \xi^3 + (p_1^2 - 2p_2)\xi^2 - (p_3^2 - p_2^2)\xi - p_4^2$ , 函数可化为

$$g(\xi) = \frac{1 + (p_1^2 - 2p_2)\frac{1}{\xi} - (p_3^2 - p_2^2)\frac{1}{\xi^2} - p_4^2\frac{1}{\xi^3}}{\frac{1}{\xi^3}}$$

根据式(4),可得  $g(0) = -p_3^2, \lim_{\xi \rightarrow +\infty} g(\xi) = +\infty$ 。由零点定理可知有  $\xi_0 \in (0, +\infty)$ , 使得  $g(\xi_0) = 0$ , 因此至少存在一个正实根。

设  $\omega_0$  为式(3)的一个正实根,  $\pm i\omega_0$  是一对纯虚根,代入式(2)得

$$\cos \omega \tau = \frac{-p_3 \omega^4 - p_1 p_4 \omega^2 + p_2 p_3 \omega^2}{p_4^2 + (p_4 \omega)^2}$$

再将  $\omega = \omega_0$  代入式(11),可得时滞参数  $\tau$ :

$$\tau_n = \frac{1}{\omega_0} \cos^{-1} \left( \frac{-p_3 \omega_0^4 - p_1 p_4 \omega_0^2 + p_2 p_3 \omega_0^2}{(p_3 \omega_0)^2 + p_4^2} \right) + \frac{2m\pi}{\omega_0}$$

$m = 0, 1, 2, \dots$

令  $(\omega_0, \tau_n)$  为式(1)的解,当  $\tau_0$  是该式的最小时滞参数时,得出定理 1。

**定理 1** 方程的特征根为  $\lambda(\tau) = \alpha(\tau) + i\omega(\tau)$ ,  $\lambda = \pm i\omega_0$  是一对共轭的纯虚根,使得  $\alpha(\tau_k) = 0$ ,  $\omega(\tau_n) = \omega_0$ 。

**命题 1** 若  $g'(\omega_0^2) = 3\omega_0^4 + 2\omega_0^2(p_1^2 - 2p_2) + p_2^2 - p_3^2 > 0$ , 则  $\left. \frac{dR_e \lambda(\tau)}{d\tau} \right|_{\tau = \tau_n} > 0$ 。

**证明** 对于式(1),两边求导可得

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = \frac{e^{-\lambda\tau} (-\lambda) (p_3 \lambda + p_4)}{(3\lambda^2 + 2p_1 \lambda + p_2) - p_3 e^{-\lambda\tau} + (p_3 \lambda + p_4) \tau e^{-\lambda\tau}} \quad (5)$$

由式(1)可得

$$\lambda^3 + p_1 \lambda^2 + p_2 \lambda = (p_3 \lambda + p_4) e^{-\lambda\tau} \quad (6)$$

式(6)代入(5)中,可得

$$\left( \frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} = \frac{(3\lambda^2 + 2p_1 \lambda + p_2) - p_3 e^{-\lambda\tau} + (p_3 \lambda + p_4) \tau e^{-\lambda\tau}}{e^{-\lambda\tau} (-\lambda) (p_3 \lambda + p_4)} = \frac{(3\lambda^2 + 2p_1 \lambda + p_2)}{(\lambda^3 + p_1 \lambda^2 + p_2 \lambda) (-\lambda)} - \frac{p_3}{(-\lambda) (p_3 \lambda + p_4)} - \frac{\tau}{\lambda}$$

则有

$$\begin{aligned} R_e \left[ \left( \frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \right]_{\tau = \tau_n} &= \\ -R_e \left[ \frac{(3\lambda^2 + 2\lambda p_1 + p_2)}{(\lambda^4 + p_1 \lambda^3 + p_2 \lambda^2)} \right]_{\tau = \tau_n} &+ \\ R_e \left[ \frac{(p_3)}{p_3 \lambda^2 + p_4} \right]_{\tau = \tau_n} &= \\ -R_e \left[ \frac{-3\omega_0^2 + p_2 + 2i\omega_0 p_1}{[\omega_0^4 + \omega_0^3 p_1 (-i) - \omega_0^2 p_2]} \right] &+ R_e \left[ \frac{p_3}{-p_3 \omega_0^2 + p_4} \right] = \\ \frac{(p_2 - 3\omega_0^2) (\omega_0^2 - p_2) - 2\omega_0^2 p_1^2}{(\omega_0^4 - p_2 \omega_0^2)^2 - (\omega_0^3 p_1 i)^2} &+ \frac{p_3^2}{(-p_3 \omega_0^2)^2 + (p_4)^2} \end{aligned}$$

时滞参数  $\tau = \tau_n$  时,时滞方程存在特征根,特征

根为  $i\omega_0$ ,代入方程得  $\lambda^3 + p_1 \lambda^2 + p_2 \lambda - (p_3 \lambda + p_4) e^{-\lambda\tau} = 0$ , 又  $e^{-i\omega_0 \tau} = (\cos \omega_0 \tau - i \sin \omega_0 \tau) = 0$ ,  $|e^{-i\omega_0 \tau}| = 1$ , 方程两边取绝对值:

$$|-i\omega_0^3 - p_1 \omega_0^2 + p_2 i \omega_0| = |(p_3 i \omega_0 + p_4) e^{-i\omega_0 \tau}| \quad (7)$$

即有  $(\omega_0^4 - p_2 \omega_0^2)^2 - (\omega_0^3 p_1 i)^2 = (-p_3 \omega_0^2)^2 + p_4^2$ , 可得:

$$R_e \left[ \left( \frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \right]_{\tau = \tau_k} = \frac{3\omega_0^4 + 2\omega_0^2(p_1^2 - 2) + p_2^2 - p_3^2}{(-p_3 \omega_0^2)^2 + p_4^2} = \frac{g'(\omega_0^2)}{(-p_3 \omega_0^2)^2 + p_4^2} > 0$$

由于  $R_e \left[ \left( \frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \right]_{\tau = \tau_n}$  与  $R_e \left[ \left( \frac{d\lambda}{d\tau} \right) \right]_{\tau = \tau_n}$  的符号相同,命题(1)得证。

根据命题(1)与 Hopf 分岔可得下面结论:

- (1) 当  $\tau \in [0, \tau_n)$  时,时滞系统在平衡点  $E_0(0, 0, 0)$  处是趋向稳定的;
- (2) 当  $\tau = \tau_n$  时,时滞系统在平衡点  $E_0(0, 0, 0)$  处分岔已经产生,并存在极限环;
- (3) 当  $\tau > \tau_n$  时,时滞系统在平衡点  $E_0(0, 0, 0)$  的状态不稳定且存在较为稳定的极限环。

### 1.3 数值仿真分析

Yang 系统的参数  $a > 0, b > 0, c < 0$ , 取  $a = 8, b = 2, c = -1$ , 此时该系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = 8(y - x) \\ \dot{y} = -xz - x(t - \tau) \\ \dot{z} = xy - 2z \end{cases} \quad (8)$$

可得  $\omega_0 = 0.9924$ , 再将  $\omega_0$  代入到式(8)中,得  $\tau_k = 1.4285$ , 有如下结论:

- (1) 当  $\tau \in [0, 1.4285)$  时,系统在平衡点  $E_0(0, 0, 0)$  是逐渐稳定状态;
- (2) 当  $\tau = 1.4285$  时,系统在平衡点  $E_0(0, 0, 0)$  处产生分岔,并出现极限环;
- (3) 当  $\tau > 1.4285 + k\pi$  时,系统在平衡点  $E_0(0, 0, 0)$  不稳定但存在较为稳定的极限环,此时发生的为超临界 Hopf 分岔。

当时滞参数  $\tau$  取不同值时,Matlab 仿真得到的结论如下:

- (a) 当  $\tau \in [0, 1.4285)$  时,图 2 给出了当时滞系数  $\tau = 1.400$  时系统时间序列,从图中可以观察

到:系统的状态变量  $x, y, z$  在较短的时间内趋近平衡点,因此系统在平衡点  $E_0(0,0,0)$  处是稳定的,结论(1)得证。

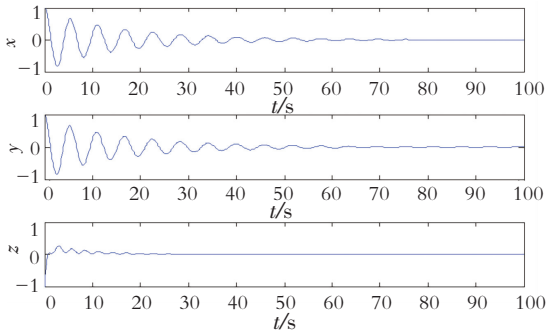
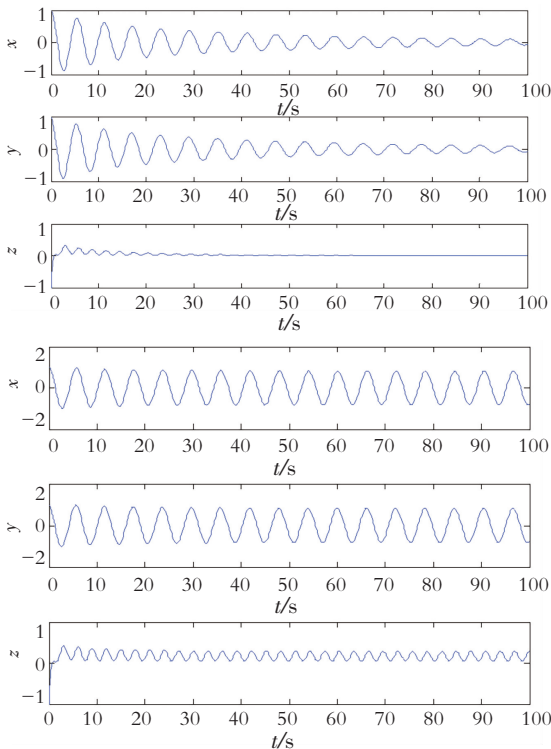


图 2  $\tau=1.400$  时系统时间序列

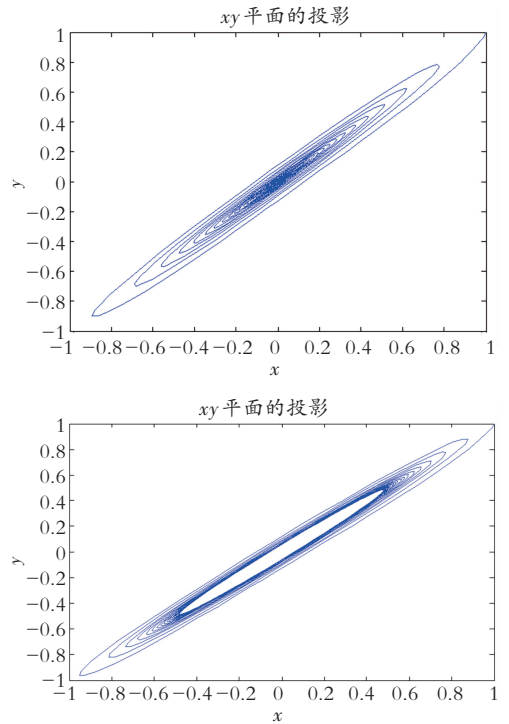
Fig. 2 Time series of the system with time-delay coefficient  $\tau=1.400$

(b) 当  $\tau=1.4285$  时,图 3 给出了系统时间序列和极限环,此时系统所经历的历程与  $\tau \in [0, 1.4285]$  类似,但此时该系统已经产生极限环,结论(2)得证。

(c) 当  $\tau > 1.4285$  时,图 4 给出了当时滞系数  $\tau=1.4285$  时,系统的局部分岔图,其状态变量  $x, y, z$  随时间  $t$  的增大而进入稳定的震荡,即产生极限环,说明系统在平衡点  $E_0(0,0,0)$  处是不稳定的,此时该系统极限环的状态稳定性较好,结论(3)得证。



(a) 时间系列



(b) 极限环

图 3 时滞系数  $\tau=1.4285$  时系统时间序列和极限环

Fig. 3 Time series and limit cycle of the system with time-delay coefficient  $\tau=1.4285$

图 4 为系统时滞参数  $\tau$  的局部分岔图,当  $\tau=1.4285$  时,时滞系统到达分岔临界点。

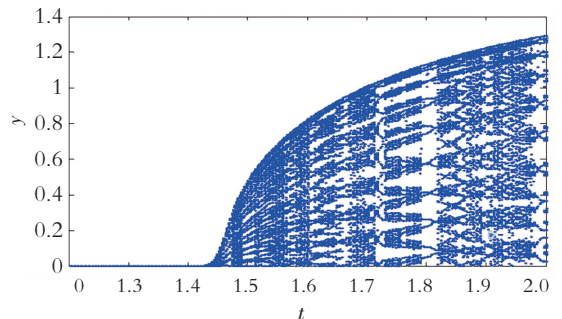


图 4 时滞 Yang 系统局部分岔图

Fig. 4 Local bifurcation diagram of Yang system with time delay

## 2 分岔控制

### 2.1 时滞系统分岔控制

对于该系统,参数取  $a=8, b=3, c=-1$ ,此系统在  $\tau=1.4258$  处产生分岔。设计线性状态反馈控制对系统的状态变量进行控制,可改变其分岔状态,并对极限环的幅值也会有一定的影响。在实际生产

中,可采用阻尼减振器等实现该线性控制器的功能,对于该系统,可以采用线性控制  $k(x-p)$ ,其中  $k$  为控制参数,此处的  $p$  为对应于平衡点处的坐标值,由于其对应的平衡点为  $E_0(0,0,0)$ ,因此  $p=0$ 。线性控制项  $k(x-p)$  可添加在系统的第二个方程中,则整个系统可变为

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y-x) \\ \dot{y} = -xz + cx(t-\tau) + kx \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases} \quad (9)$$

将系统线性化得

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y-x) \\ \dot{y} = cx(t-\tau) + kx \\ \dot{z} = -bz \end{cases} \quad (10)$$

受控系统的 Jacobi 矩阵为

$$J_0 = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ ce^{-\lambda\tau} + k & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix}$$

则线性部分的特征矩阵为

$$J_0 = \begin{bmatrix} \lambda + a & -a & 0 \\ -ce^{-\lambda\tau} - k & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + b \end{bmatrix}$$

对于该系统的分岔控制,若仅考虑虚根,则该系统的特征方程为  $\lambda^2 + a\lambda - ac e^{-\lambda\tau} - ak = 0$ ,将  $\lambda = \pm i\omega_0$  代入该特征方程,化简后可得如下方程组:

$$\begin{cases} -\omega_0^2 - ak = a \cos \omega\tau \\ a\omega_0 i = -a \sin \omega\tau \end{cases}$$

根据三角恒等变换可得受控系统的时滞参数为

$$\tau = \frac{1}{\omega_0} \cos^{-1} \frac{(-\omega_0^2 - ak)}{ac} + \frac{2m\pi}{\omega_0} \quad (m=0, 1, 2, \dots)$$

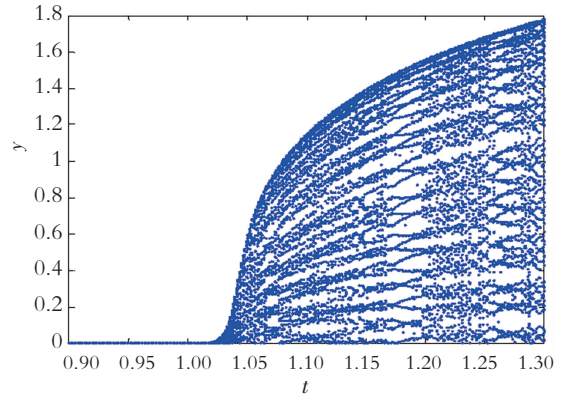
在调节整个系统的分岔参数过程中,当  $0 < k < 0.98$  时,可以将时滞分岔点滞后; $k$  的取值范围在  $-0.97 < k < 0$  时,可以将时滞系统分岔点提前。

### 2.2 仿真结果

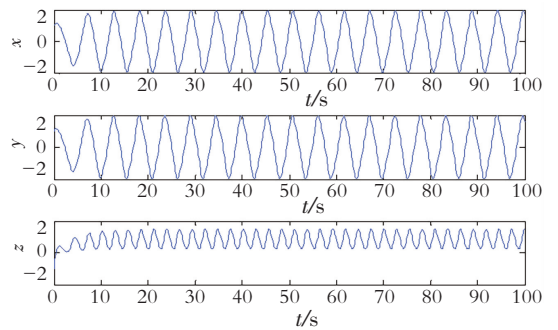
对于该受控时滞系统,在数值仿真计算中采用四阶龙格-库塔验证以下结果:在控制参数  $k$  满足取值范围情况下,改变其值可以提前或滞后分岔的产生。

(1) 取  $k=0.75$ ,对时滞系统进行控制后,该系

统的分岔参数有所改变,图 5 给出了受控时滞系统的分岔图以及时间序列情况。可以看出分岔点由原来的 1.428 5 提前至 1.250 5,时滞参数  $\tau=1.428 5$  时,原本趋近平衡点的系统状态变量  $x, y, z$  也开始变得震荡起来并逐渐远离平衡点,同时整个分岔系统的幅值增加。



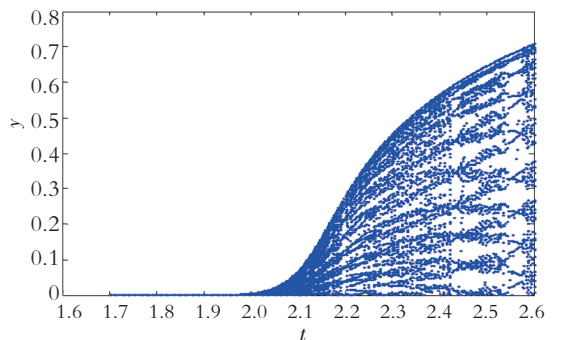
(a) Hopf 分岔图



(b) 时间序列图

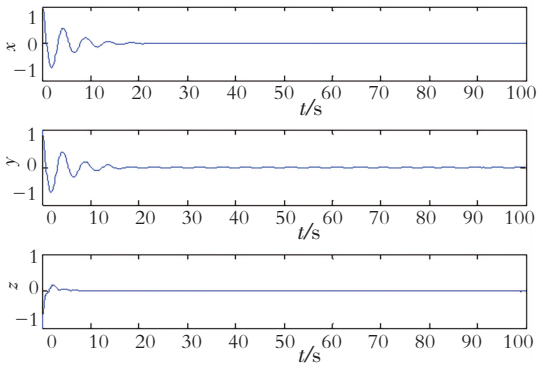
图 5 受控系统的 Hopf 分岔图和时间序列图 ( $k=0.75$ )  
Fig. 5 Hopf bifurcation diagram and time series diagram of the controlled system ( $k=0.75$ )

(2) 取  $k=-0.75$ ,由图 6 可以看出分岔点由原来的 1.428 5 滞后到 1.943 5,时滞参数  $\tau=1.428 5$  时,系统的状态变量  $x, y, z$  在更短的时间内趋近于平衡点,整个分岔过程的幅值下降。



(a) Hopf 分岔图





(b) 时间序列图

图 6 受控系统的 Hopf 分岔图和时间序列图 ( $k=-0.75$ )Fig. 6 Hopf bifurcation diagram and time series diagram of the controlled system ( $k=-0.75$ )

以上仿真表明:可以添加适当的控制器对时滞系统进行提前或滞后控制,并且该受控系统的整体幅值与原系统相比,有较大变化。

### 3 结束语

在对单时滞 Yang 系统的研究中,给出了时滞系统局部保持稳定和出现 Hopf 分岔的充分条件,得到了时滞参数  $\tau \in [0, 1.4285)$  时,系统在短时间内趋于稳定;当  $\tau = 1.4285$  时,系统产生分岔并存在较稳定的极限环;当  $\tau > 1.4285$  时,时滞系统状态不稳定。对时滞混沌系统的线性反馈控制研究显示:在适当的控制参数调节下,可以成功地将时滞系统分岔点提前或者滞后。通过 MATLAB 软件的仿真实验验证了分析的正确性。

### 参考文献 (References):

- [1] 张雪峰. 混沌序列生成技术及其若干应用研究[D]. 西安:西安电子科技大学, 2011.  
ZHANG Xue-feng. Chaotic sequence generation technology and its applications[D]. Xi'an: Xidian University, 2011.
- [2] LORENZ E N. Deterministic non-periodic flow [J]. Journal of the Atmospheric Sciences, 1963, 20(2): 130—141.
- [3] LORENZ E N. Deterministic non-periodic flow[J]. Journal of Atmospheric Sciences, 2004, 20(2): 130—141.
- [4] 李清都, 杨晓松. 基于拓扑马蹄的混沌动力学研究进展[J]. 动力学与控制学报, 2012, 10(4): 293—298.  
Li Qing-du, YANG Xiao-song. Advances in chaos

- dynamics based on topological horseshoe [J]. Journal of Dynamics and Control, 2012, 10(4): 293—298.
- [5] CHEN G, UETA T, YE T. Another chaotic attractor [J]. International Journal of Bifurcation & Chaos, 1999, 9(7): 1465—1466.
- [6] LU D J, CHEN G, CHENG D, et al. Bridge the gap between the Lorenz system and the Chen system [J]. International Journal of Bifurcation & Chaos, 2002, 12(12): 2917—2926.
- [7] SPARROW C. The Lorenz equations: bifurcations, chaos, and strange attractors [J]. Applied Mathematical Sciences, 1982, 41(1): 106—110.
- [8] GRIGG C, WONG P, ALBRECHT P, et al. The IEEE reliability test system-1996: a report prepared by the reliability test system task force of the application of probability methods subcommittee [C]//IEEE Transactions on Power Systems, 2002, 14(3): 1010—1020.
- [9] CELIKOVSKY S, CHEN G. Synchronization of a class of chaotic systems via a nonlinear observer approach [C]//Decision and Control, Proceedings of the IEEE Conference on IEEE. 2002: 3895—3900.
- [10] MACKEY M C, GLASS L. Oscillation and chaos in physiological control systems [J]. Science, 1977, 197(4300): 287—289.
- [11] FARMER J D, SIDOROWICH J J. Predicting chaotic time series. [J]. Physical Review Letters, 1987, 59(8): 845—849.
- [12] 杨纪华, 李艳秋. Mackey-Glass 时滞系统的稳定性与混沌控制[J]. 东北师大学报(自然科学版), 2015, 47(4): 30—35.  
YANG Ji-hua, LI Yan-qiu. Stability and chaos control of Mackey-Glass time-delay systems [J]. Journal of Northeast Normal University (Natural Science Edition), 2015, 47(4): 30—35.
- [13] 蔡萍. 几类非线性动力系统的 Hopf 分岔研究[D]. 长沙: 湖南大学, 2015.  
CAI Ping. Study on Hopf bifurcation of several kinds of nonlinear dynamic systems [D]. Changsha: Hunan University, 2015.
- [14] 魏朝颖, 陈斯养. 一类具有时滞的单种群模型 Hopf 分支周期解[J]. 陕西师范大学学报(自然科学版), 2003(4): 11—15.  
WEI Chao-ying, CHEN Si-yang. Periodic solution of Hopf bifurcation for a type of single population with time-

- delay[J]. Journal of Shaanxi Normal University (Natural Science Edition), 2003(4):11—15.
- [15] 孙观,崔岩,何宏骏,等.时滞 Lü 系统的 Hopf 分岔分析[J]. 河南科技大学学报(自然科学版), 2019(3):80—84;88.
- SUN Guan, CUI Yan, HE Hong-jun, et al. Hopf bifurcation analysis for time-delcuy Lü system [J]. Journal of Henan University of Science and Technology (Natural Science Edition), 2019(3):80—84;88.
- [16] 陈立林,徐昌进.时滞反馈控制策略在三维混沌系统中的应用[J]. 河北师范大学学报(自然科学版), 2018,42(6):466—471.
- CHEN Li-lin, XU Chang-jin. Application of time-delay feedback control strategy to three-dimensional chaotic system[J]. Journal of Hebei Normal University (Natural Science Edition), 2018,42(6):466—471.
- [17] YANG Q, CHEN G. A chaotic system with one saddle and two stable node-foci [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2008, 18(5):1393—1414.
- [18] 孙观,崔岩,何宏骏,等.一种类 Lü 系统的混沌行为分析与控制[J]. 河南科技大学学报(自然科学版), 2019,40(1):95—100;110.
- SUN Guan, CUI Yan, HE Hong-jun, et al. Chaos behavior analysis and control of a kind of Lü system[J]. Journal of Henan University of Science and Technology (Natural Science Edition), 2019,40(1):95—100;110.

## Hopf Bifurcation Analysis and Control of Chaotic Yang Systems

ZHOU Liu-yuan, CUI Yan, ZHAO Shao-qing, LU Chen-hui

(School of Mechanical Engineering, Shanghai University of Engineering Science, Shanghai, 201620, China)

**Abstract:** Taking the chaotic Yang system as the research object, a class of time-delay chaotic Yang system is proposed to make up for the shortcomings of existing chaotic systems. Through numerical calculation, the local stability of the system at the equilibrium point  $E_0(0,0,0)$  and the existence of Hopf bifurcation of the time-delay system are clarified. The conditions for Hopf bifurcation of time-delay systems were deduced. When  $\tau = \tau_n$ , the time-delay systems had generated the bifurcation at the equilibrium point  $E_0(0,0,0)$ , and there were limit cycles. Therefore, according to the linear state feedback control method, the bifurcation point of the time-delay system is effectively controlled in advance or behind time. At the same time, through the Runge Kutta method and the MATLAB software simulation, the time-delay system at the bifurcation point  $\tau_k = 1.4285$  occurred the phenomenon of supercritical Hopf bifurcation. At the same time, the bifurcation can be generated ahead of time or behind time by changing the value of parameter  $k$  under the condition that the control parameter value satisfies the value of  $k$ .

**Key words:** time-delay Yang system; single time-delay Hopf bifurcation; Matlab; bifurcation control

责任编辑:李翠薇

引用本文/Cite this paper:

周六圆,崔岩,赵少卿,等.混沌 Yang 系统的 Hopf 分岔分析与控制[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版), 2022,39(3):47—53.

ZHOU Liu-yuan, CUI Yan, ZHAO Shao-qing, et al. Hopf bifurcation analysis and control of chaotic Yang systems[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition), 2022,39(3):47—53.