第 39 卷第 3 期 重庆工商大学学报(自然科学版) 2022 年 6 月
Vol. 39 No. 3 J Chongqing Technol & Business Univ(Nat Sci Ed) Jun. 2022

doi:10. 16055/j. issn. 1672-058X. 2022. 0003. 006

非凸半无限多目标规划近似解的最优性条件

张 雯, 龙宪军, 黄应全
(重庆工商大学 数学与统计学院, 重庆 400067)

摘 要:针对一类非凸半无限多目标规划问题,建立了其近似解的最优性条件。借助切向次微分定义了新的正则条件以及广义不变凸函数,值得注意的是,涉及的函数并不需要满足局部 Lipschitz 条件。首先,给出半无限多目标规划问题的(η,ε)-拟弱有效解和(η,ε)-拟有效解的定义,在正则条件的假设下,获得(η,ε)-拟弱有效解的必要最优性条件;然后,在广义不变凸性假设下,获得(η,ε)-拟(弱)有效解的充分最优性条件;所得结果推广和改进了相关文献的主要结论。

关键词:半无限多目标规划;(η,ε)-拟弱有效解;切向次微分;广义不变凸函数

中图分类号:O224 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-058X(2022)03-0041-06

0 介 绍

半无限多目标规划问题是在约束函数个数无限的条件下研究有限多个目标函数的优化问题。它在数学、物理、工程设计、经济管理以及合作博弈等领域有着广泛的应用,目前已取得了许多研究成果[1-3]。

函数的凸性在优化理论中扮演着重要角色,特别是在建立解的充分最优性条件中起关键性作用。然而凸性条件在很多工程和经济问题中却很难满足。因此,很多学者从不同方面对凸函数进行推广,并研究了相应非凸优化问题。Golestani 等[4]借助 Clarke 次微分在约束规格假设下得到了多目标规划问题局部(弱)有效解的必要最优性条件,并在不变凸函数的假设下,得到了多目标规划问题有效解的充分最优性条件;Chuong 等[5]利用 Mordukhovich 次微分在极限约束规格和广义凸性条件下,分别得到了半无限多目标规划问题有效解和弱有效解的必要和充分条件。然而,在实际应用中,许多问题的精确解无法求得,利用数值算法大多只能获得其近似解。因此,研究近似解的最优性条件具有重要的理论价值和实际意义。Golestani 等[6]将文献[4]中的有效解推广到近似解的情形,借助 Clarke 次微分在约束规格假设下得到了多目标规划问题局部 ε-拟(弱)有效解的必要最优性条件,并在 KT 近似伪凸-仿射的条件下,得到了 ε-拟(弱)有效解的必要条件;Jiao 等[7]将文献[5]中的有效解推广到了近似解的情形,同样借助 Mordukhovich 次微分在极限约束规格和广义凸性条件下,获得了半无限单目标规划问题拟 ε-有效解的必要和充分条件。值得注意的是,上

收稿日期:2021-09-06;**修回日期**:2021-10-08.
基金项目:国家自然科学基金(11471059);重庆市自然科学基金(CSTC2018JCYJAX0119);重庆市教育委员会科学技术研究重点项目(KJZD-K201900801);重庆市研究生创新型科研项目(CYS21405);重庆工商大学科研团队项目(ZDPTTD201908).
作者简介:张雯(1996—),女,重庆梁平人,硕士研究生,从事最优化理论及应用研究.
通讯作者:龙宪军(1980—),男,重庆永川人,教授,博士,从事最优化理论及应用研究. Email:xianjunlong@ ctbu. edu. cn.

述文献涉及的函数都是 Lipschitz 连续的。然而,在实际中许多函数并不满足局部 Lipschitz 这一较强的条件。如何在函数不满足局部 Lipschitz 假设下研究非凸半无限多目标规划问题近似解的最优性条件将是本文讨论的重点。

最近,Tung[8-9] 利用切向次微分和正则条件获得了半无限多目标规划问题有效解的必要最优性条件,并在 Dini-伪凸和 Dini-拟凸假设下获得了(弱)有效解的充分条件;刘娟等[10] 利用切向次微分研究了半无限多目标规划问题的混合型对偶。注意到,文献[8-10]中所涉及的函数不必是局部 Lipschitz 连续的。受文献[4-10]的启发,本文利用切向次微分研究了非凸半无限多目标规划问题近似解的最优性条件。首先引入(η,ε)-拟(弱)有效解的定义,并借助切向次微分,给出了 Dini-拟不变凸函数、(η,ε)-伪不变凸函数以及严格(η,ε)-伪不变凸函数的定义。然后,利用正则条件和三类新的广义不变凸函数,获得了半无限多目标规划问题(η,ε)-拟(弱)有效解的必要和充分最优性条件。所得结果推广并改进了文献[8-9]中的主要结果。

1 预备知识

设 R^n 表示 n 维欧氏空间,用$<\cdot,\cdot>$与$\|\cdot\|$分别表示 R^n 中的内积和范数。设 $S\subseteq R^n$ 为非空子集,用 int S,cl S 与 co S 分别表示 S 的内部、闭包与凸包;pos S 表示由 S 生成的凸锥;S 的负极化锥和严格负极化锥分别定义为

$$S^-:=\{x^*\in R^n:<x^*,x>\leqslant 0,\ \forall x\in S\}$$

$$S^s:=\{x^*\in R^n:<x^*,x><0,\ \forall x\in S\}$$

设 $\bar{x}\in \mathrm{cl}\ S$,$S$ 在 $\bar{x}$ 处的弱可行方向锥定义为

$$F(S,\bar{x}):=\{x\in R^n:\exists\tau_k\downarrow 0,\bar{x}+\tau_k x\in S\}$$

设 $f:R^n\to\mathbf{R}$ 是一个实值函数,f 在 $\bar{x}\in R^n$ 处沿方向 $d\in R^n$ 的方向导数(Dini 导数)定义为

$$f'(\bar{x};d):=\lim_{t\downarrow 0}\frac{f(\bar{x}+td)-f(\bar{x})}{t}$$

当 $d=0$ 时,有 $f'(\bar{x};0)=0$。如果 f 在 $\bar{x}\in R^n$ 处沿任意方向 d 的方向导数都存在,则称 f 在 $\bar{x}$ 处是方向可微的。如果对任意的 $d\in R^n$,$f'(\bar{x};d)$存在、有限且 $f'(\bar{x};d)$关于 d 是凸函数,则称 f 在 $\bar{x}$ 处是切凸[11]的。注意到 $f'(\bar{x};d)$关于 d 是正齐次且连续的。

定义 1[11] 设 $f:R^n\to\mathbf{R}$ 是一个实值函数,f 在 $\bar{x}\in R^n$ 处的切向次微分定义为

$$\partial^{\mathrm{T}}f(\bar{x}):=\{\xi\in R^n:f'(\bar{x};d)\geqslant<\xi,d>,\ \forall d\in R^n\}$$

如果 f 在 $\bar{x}$ 处是切凸的,则 $f'(\bar{x};\cdot)$是次线性的,于是 $\boldsymbol{\partial}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})\neq\varnothing$ 且 $f'(\bar{x};\cdot)$是 $\boldsymbol{\partial}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})$ 的支撑函数,即

$$f'(\bar{x};d)=\max_{\xi\in\partial^{\mathrm{T}}f(\bar{x})}\langle\xi,d\rangle,\ \forall d\in R^n$$

如果 f 是凸函数,那么 f 在 $\bar{x}$ 处是切凸的且 $\boldsymbol{\partial}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})=\boldsymbol{\partial f}(\bar{\boldsymbol{x}})$,这里$\partial$表示凸函数定义的次微分。

设 $\bar{x}\in R^n$,$f:R^n\to\mathbf{R}$ 是局部 Lipschitz 函数,函数 f 在 $\bar{x}$ 处沿方向 $d\in R^n$ 的 Clarke 方向导数[12]定义为

$$f^{\circ}(\bar{x};d):=\lim_{\substack{x\to\bar{x}\\ t\downarrow 0}}\sup\frac{f(x+td)-f(x)}{t}$$

函数 f 在 $\bar{x}$ 处的 Clarke 次微分[12]定义为

$$\boldsymbol{\partial}^C\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})=\{\xi\in R^n\mid f^{\circ}(\bar{x};v)\geqslant<\xi,v>,\ \forall v\in R^n\}$$

因此,有

$$f^{\circ}(\bar{x};v)=\max\{<\xi,v>\mid\xi\in\partial^C f(\bar{x})\},\ \forall v\in R^n$$

如果对任意的 $d\in R^n$,$f'(\bar{x};d)$存在且 $f^{\circ}(\bar{x};d)=f'(\bar{x};d)$,则称 f 在 $\bar{x}$ 处是 Clarke 正则的。如果 f 在 $\bar{x}$ 处是局部 Lipschitz 且 Clarke 正则的,则 f 在 $\bar{x}$ 处是切凸的且 $\boldsymbol{\partial}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})=\boldsymbol{\partial}^C\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}})$。

条件 C[13] 设 $\boldsymbol{\eta}:R^n\times R^n\to R^n$,称函数 $\boldsymbol{\eta}$ 满足条件 C,如果 $\forall x,y\in S$,$\forall t\in[0,1]$,有

$$\boldsymbol{\eta}(x,x+t\boldsymbol{\eta}(y,x))=-t\boldsymbol{\eta}(y,x)$$

引理 1[14] 设$\{C_t:t\in\Gamma\}$为 R^n 中任意非空凸集族,$K=\mathrm{pos}(\bigcup_{t\in\Gamma}C_t)$,则 K 中每个非零向量都能够表示为来自不同 C_t 的线性无关向量的非负线性组合。

引理 2[1] 设 S 和 P 是两个任意的指标集(可能无限),$a_s=a(s)=(a_1(s),\cdots,a_n(s))$是从 S 到 R^n 的映射,$a_p=a(p)=(a_1(p),\cdots,a_n(p))$是从 P 到 R^n 的映射。假设集合 $\mathrm{co}\{a_s,s\in S\}+\mathrm{pos}\{a_p,p\in P\}$是闭集,则如下表述等价:

I $\begin{cases}\langle a_s,x\rangle<0,S\neq\varnothing\\ \langle a_p,x\rangle\leqslant 0,p\in P\end{cases}$,此系统无解,$x\in R^n$;

II $0\in\mathrm{co}\{a_s,s\in S\}+\mathrm{pos}\{a_p,p\in P\}$。

2　最优性条件

考虑如下半无限多目标优化问题:

(P) $\min f(x)=(f_1(x),\cdots,f_m(x))$

$\text{s.t. } g_t(x)\leqslant 0, t\in T, x\in R^n$

其中,$f_i:R^n\to\mathbf{R}, i\in I:=\{1,2,\cdots,m\}$ 以及 $g_t:R^n\to\mathbf{R}$, $t\in T$, T 是任意非空指标集(不必有限)。记问题(P)的可行集为 Ω,即

$$\Omega:=\{x\in R^n:g_t(x)\leqslant 0, t\in T\}$$

广义有限序列空间 $R^{(T)}$ 定义为 $R^{(T)}:=\{u=(u_t)_{t\in T}: u_t\in\mathbf{R}, t\in T$ 但只有有限个 $u_t\neq 0\}$。$R^{(T)}$ 的正锥定义为 $R_+^{(T)}:=\{u=(u_t)_{t\in T}\in R^{(T)}:u_t\geqslant 0, t\in T\}$。在 $x\in\Omega$ 处记积极约束的指标集为 $T(x)=\{t\in T:g_t(x)=0\}$,在 $x\in\Omega$ 处的积极约束乘子集为 $\wedge(x):=\{u\in R_+^{(T)}:u+g_t(x)=0, \forall t\in T\}$。设 $\lambda\in R_+^m$,向量 λ 的非零分量的指标集为 $I(\lambda):=\{i\in I:\lambda_i>0\}$。设 $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_m)\in\text{int } R_+^m$,下面介绍 (η,ε)-拟(弱)有效解的概念。

定义 2　设 $\bar{x}\in\Omega$, $\eta:R^n\times R^n\to R^n$,有

(i) 如果对任意的 $x\in\Omega$,下面不等式不成立:

$$f_i(x)<f_i(\bar{x})-\varepsilon_i\|\eta(x,\bar{x})\|, \forall i\in I$$

则称 $\bar{x}$ 是问题(P)的 (η,ε)-拟弱有效解。

(ii) 如果对任意的 $x\in\Omega$,下面不等式不成立:

$$f_i(x)\leqslant f_i(\bar{x})-\varepsilon_i\|\eta(x,\bar{x})\|, \forall i\in I$$

且至少一个严格不等式不成立,则称 $\bar{x}$ 是问题(P)的 (η,ε)-拟有效解。

注 1　当 $\eta(x,\bar{x})=x-\bar{x}$ 时,(η,ε)-拟(弱)有效解退化为文献[6]中的 ε-拟(弱)有效解。

在本文余下部分,设 $\bar{x}\in R^n$, $f_i, i\in I$ 和 $g_t, t\in T$ 在 $\bar{x}$ 处是切凸的,B 是 R^n 中的闭单位球,即 $B=\{x\in R^n:\|x\|\leqslant 1\}$。

为了得到问题(P)的 (η,ε)-拟弱有效解的必要最优性条件,需要如下正则条件:

(RC1)　$\left(\bigcup_{t\in T(\bar{x})}\partial^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_t(\bar{\boldsymbol{x}})\right)^-\subseteq \text{cl } F(\Omega,\bar{x})$

(RC2)　$\left(\bigcup_{j\in I\setminus\{i\}}(\partial^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}_j(\bar{\boldsymbol{x}})+\varepsilon_j B)\right)^s\cap\left(\bigcup_{t\in T(\bar{x})}\partial^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_t(\bar{\boldsymbol{x}})\right)^s\neq\varnothing, \forall i\in I$

首先证明如下引理:

引理 3　设函数 $\eta:R^n\times R^n\to R^n$ 满足条件 C,$\bar{x}\in\Omega$ 是问题(P)的 (η,ε)-拟弱有效解。假设对任意的 $x\in\Omega$,满足 $\eta(x,\bar{x})+\eta(\bar{x},x)=0$,则

$$\{\eta(x,\bar{x})\in R^n:<\xi_i,\eta(x,\bar{x})>+\varepsilon_i\|\eta(x,\bar{x})\|<0$$
$$\forall\xi_i\in\partial^{\mathrm{T}}f_i(\bar{x}), \forall i\in I\}\cap F(\Omega,\bar{x})=\varnothing$$

证明　令 $A=\{\eta(x,\bar{x})\in R^n:<\xi_i,\eta(x,\bar{x})>+\varepsilon_i\|\eta(x,\bar{x})\|<0, \forall\xi_i\in\partial^{\mathrm{T}}f_i(\bar{x}), \forall i\in I\}$。

反证法　假设存在 $\eta(x,\bar{x})\in A\cap F(\Omega,\bar{x})$,则 $\eta(x,\bar{x})\in A$,即对任意的 $i\in I$,有

$$<\xi_i,\eta(x,\bar{x})>+\varepsilon_i\|\eta(x,\bar{x})\|<0, \forall\xi_i\in\partial^{\mathrm{T}}f_i(\bar{x})$$

则有

$$f'_i(\bar{x};\eta(x,\bar{x}))+\varepsilon_i\|\eta(x,\bar{x})\|=$$
$$\max_{\xi_i\in\partial^{\mathrm{T}}f_i(\bar{x})}<\xi_i,\eta(x,\bar{x})>+\varepsilon_i\|\eta(x,\bar{x})\|<0, \forall i\in I \quad (1)$$

另一方面,$\eta(x,\bar{x})\in F(\Omega,\bar{x})$,则对任意的 k,存在 $\tau_k\downarrow 0$,使得 $\bar{x}+\tau_k\eta(x,\bar{x})\in\Omega$,由式(1)以及条件 C,有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{f_i(\bar{x}+\tau_k\eta(x,\bar{x}))-f_i(\bar{x})+\varepsilon_i\|\eta(\bar{x}+\tau_k\eta(x,\bar{x}),\bar{x})\|}{\tau_k}=$$
$$\lim_{k\to\infty}\frac{f_i(\bar{x}+\tau_k\eta(x,\bar{x}))-f_i(\bar{x})+\varepsilon_i\|\eta(\bar{x},\bar{x}+\tau_k\eta(x,\bar{x}))\|}{\tau_k}=$$
$$\lim_{k\to\infty}\frac{f_i(\bar{x}+\tau_k\eta(x,\bar{x}))-f_i(\bar{x})+\varepsilon_i\tau_k\|\eta(x,\bar{x})\|}{\tau_k}=$$
$$\lim_{k\to\infty}\frac{f_i(\bar{x}+\tau_k\eta(x,\bar{x}))-f_i(\bar{x})}{\tau_k}+\varepsilon_i\|\eta(x,\bar{x})\|=$$
$$f'_i(\bar{x};\eta(x,\bar{x}))+\varepsilon_i\|\eta(x,\bar{x})\|<0$$

故存在 $N>0$,对任意的 $k\geqslant N$,有

$$f_i(\bar{x}+\tau_k\eta(x,\bar{x}))-f_i(\bar{x})+$$
$$\varepsilon_i\|\eta(\bar{x}+\tau_k\eta(x,\bar{x}),\bar{x})\|<0, \forall i\in I$$

这与 $\bar{x}$ 是问题(P)的 (η,ε)-拟弱有效解矛盾,故结论成立。

下面建立问题(P)的 (η,ε)-拟弱有效解的必要最优性条件。

定理 1　设函数 $\eta:R^n\times R^n\to R^n$ 满足条件 C,$\bar{x}$ 是问题(P)的 (η,ε)-拟弱有效解。假设对任意的 $x\in\Omega$,满足 $\eta(x,\bar{x})+\eta(\bar{x},x)=0$,(RC1)在 $\bar{x}$ 处成立,且

$$D=\text{co}\left(\bigcup_{i=1}^{m}(\partial^{\mathrm{T}}f_i(\bar{x})+\varepsilon_i B)\right)+\text{pos}\left(\bigcup_{t\in T(\bar{x})}\partial^{\mathrm{T}}g_t(\bar{x})\right)$$

是闭集,则存在 $\lambda\in R_+^m$ 满足 $\sum_{i=1}^m\lambda_i=1$ 和 $u\in\Lambda(\bar{x})$,使得

$$0\in\sum_{i=1}^m\lambda_i\ \partial^{\mathrm{T}}f_i(\bar{x})+\sum_{t\in T}u_t\ \partial^{\mathrm{T}}g_t(\bar{x})+\sum_{i=1}^m\lambda_i\varepsilon_iB \qquad (2)$$

此外,若(RC2)在 $\bar{x}$ 处成立,则 $\lambda_i>0,\ \forall i\in I$。

证明 对任意的 $x\in\Omega$,由引理 3,知

$$\{\eta(x,\bar{x})\in R^n:<\xi_i,\eta(x,\bar{x})>+\varepsilon_i\|\eta(x,\bar{x})\|<0,\ \forall\xi_i\in\partial^{\mathrm{T}}f_i(\bar{x}),\ \forall i\in I\}\cap F(\Omega,\bar{x})=\varnothing$$

这可推得:

$$\mathrm{int}(\{\eta(x,\bar{x})\in R^n:<\xi_i,\eta(x,\bar{x})>+\varepsilon_i\|\eta(x,\bar{x})\|<0,\ \forall\xi_i\in\partial^{\mathrm{T}}f_i(\bar{x}),\ \forall i\in I\})\cap\mathrm{cl}F(\Omega,\bar{x})=$$
$$\{\eta(x,\bar{x})\in R^n:<\xi_i,\eta(x,\bar{x})>+\varepsilon_i\|\eta(x,\bar{x})\|<0,\ \forall\xi_i\in\partial^{\mathrm{T}}f_i(\bar{x}),\ \forall i\in I\}\cap\mathrm{cl}F(\Omega,\bar{x})=\varnothing \qquad (3)$$

式(3)结合(RC1),有

$$\{\eta(x,\bar{x})\in R^n:<\xi_i,\eta(x,\bar{x})>+\varepsilon_i\|\eta(x,\bar{x})\|<0,\ \forall\xi_i\in\partial^{\mathrm{T}}f_i(\bar{x}),\ \forall i\in I\}\cap(\bigcup_{t\in T(\bar{x})}\partial^{\mathrm{T}}g_t(\bar{x}))^-\subseteq$$
$$\{\eta(x,\bar{\xi})\in R^n:<\xi_i,\eta(x,\bar{x})>+\varepsilon_i\|\eta(x,\bar{x})\|<0,\ \forall\xi_i\in\partial^{\mathrm{T}}f_i(\bar{x}),\ \forall i\in I\}\cap\mathrm{cl}F(\Omega,\bar{x})=\varnothing$$

故不存在 $\eta(x,\bar{x})\in R^n$,使得

$$\begin{cases}\langle\xi_i,\eta(x,\bar{x})\rangle+\varepsilon_i\|\eta(x,\bar{x})\|<0\\ \quad\forall\xi_i\in\partial^{\mathrm{T}}f_i(\bar{x}),\ \forall i\in I\\ \langle\zeta_t,\eta(x,\bar{x})\rangle\leqslant 0\\ \quad\forall\zeta_t\in\partial^{\mathrm{T}}g_t(\bar{x}),\ \forall t\in T(\bar{x})\end{cases}$$

成立。对任意的 $e\in B$,$<e,\eta(x,\bar{x})>\leqslant\|\eta(x,\bar{x})\|$,故有

$$\begin{cases}\langle\xi_i+\varepsilon_ie,\eta(x,\bar{x})\rangle<0,\ \forall\xi_i\in\partial^{\mathrm{T}}f_i(\bar{x}),\ \forall i\in I\\ \langle\zeta_t,\eta(x,\bar{x})\rangle\leqslant 0\ \forall\zeta_t\in\partial^{\mathrm{T}}g_t(\bar{x}),\ \forall t\in T(\bar{x})\end{cases}$$

无解。由引理 2,知

$$0\in\mathrm{co}(\bigcup_{i=1}^m(\partial^{\mathrm{T}}f_i(\bar{x})+\varepsilon_iB))+\mathrm{pos}(\bigcup_{t\in T(\bar{x})}\partial^{\mathrm{T}}g_t(\bar{x}))$$

再由引理 1 知,存在 $\lambda\in R_+^m$ 满足 $\sum_{i=1}^m\lambda_i=1$ 以及 $u\in\Lambda(\bar{x})$,使得

$$0\in\sum_{i=1}^m\lambda_i\ \partial^{\mathrm{T}}f_i(\bar{x})+\sum_{t\in T}u_t\ \partial^{\mathrm{T}}g_t(\bar{x})+\sum_{i=1}^m\lambda_i\varepsilon_iB$$

故存在 $\xi_i\in\partial^{\mathrm{T}}f_i(\bar{x})$,$i\in I$,$\eta_t\in\partial^{\mathrm{T}}g_t(\bar{x})$,$t\in T$ 以及 $e\in B$,使得

$$\sum_{i=1}^m\lambda_i\xi_i+\sum_{t\in T}u_t\eta_t+\sum_{i=1}^m\lambda_i\varepsilon_ie=0 \qquad (4)$$

下证 $\lambda_i>0,\ \forall i\in I$。反证法:假设存在 $i\in I$,使得 $\lambda_i=0$。由于(RC2)在 $\bar{x}$ 处成立,则存在 $\mu\in R^n$,使得

$$\begin{cases}\langle\xi_j+\varepsilon_je,\mu\rangle<0,j\in I\setminus\{i\}\\ \langle\eta_t,\mu\rangle<0,t\in T(\bar{x})\end{cases} \qquad (5)$$

由式(5),有

$$\langle\sum_{i=1}^m\lambda_i\xi_i+\sum_{t\in T}u_t\eta_t+\sum_{i=1}^m\lambda_i\varepsilon_ie,\mu\rangle<0$$

这与式(4)矛盾,因此 $\lambda_i>0,\ \forall i\in I$。

为了获得半无限多目标规划问题 (η,ε)-拟(弱)有效解的充分最优性条件,定义如下 3 类广义不变凸函数。

定义 3 设 $S\subset R^n$ 是凸集,$f:R^n\to\mathbf{R}$ 在 $x\in S$ 处是切凸的,称 f 在 x 处是

(i) Dini-拟不变凸函数,如果

$$f(y)\leqslant f(x)\Rightarrow<x^*,\eta(y,x)>\leqslant 0$$
$$\forall y\in S,\ \forall x^*\in\partial^{\mathrm{T}}f(x)$$

(ii) (η,ε)-伪不变凸函数,如果

$$f(y)<f(x)\Rightarrow<x^*,\eta(y,x)><-\varepsilon\|\eta(y,x)\|$$
$$\forall y\in S,\ \forall x^*\in\partial^{\mathrm{T}}f(x)$$

(iii) 严格 (η,ε)-伪不变凸函数,如果

$$f(y)\leqslant f(x)\Rightarrow<x^*,\eta(y,x)><-\varepsilon\|\eta(y,x)\|$$
$$\forall y\in S\setminus\{x\},\ \forall x^*\in\partial^{\mathrm{T}}f(x)$$

注 2 当 $\eta(y,x)=y-x$ 时,Dini-拟不变凸退化为文献[8-9]中的 Dini-拟凸的定义。

下面建立问题(P)的 (η,ε)-拟(弱)有效解的充分最优性条件。

定理 2 设 $\bar{x}\in\Omega$,假设存在 $\lambda\in R_+^m$ 满足 $\sum_{i=1}^m\lambda_i=1$ 以及 $u\in\Lambda(\bar{x})$,使得式(2)成立。

(i) 如果 $f_i,i\in I(\lambda)$ 在 $\bar{x}$ 处是 (η,ε_i)-伪不变凸函数,$g_t,t\in T(\bar{x})$ 在 $\bar{x}$ 处是 Dini-拟不变凸函数,则 $\bar{x}$ 是问题(P)的 (η,ε)-拟弱有效解。

(ii) 如果 $f_i,i\in I(\lambda)$ 在 $\bar{x}$ 处是严格 (η,ε_i)-伪不变凸函数,$g_t,t\in T(\bar{x})$ 在 $\bar{x}$ 处是 Dini-拟不变凸函数,则 $\bar{x}$ 是问题(P)的 (η,ε)-拟有效解。

证明 由假设知,存在 $\xi_i\in\partial^{\mathrm{T}}f_i(\bar{x})$,$\zeta_t\in\partial^{\mathrm{T}}g_t(\bar{x})$ 以及 $e\in B$,使得式(6)成立:

$$0=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\xi_i+\sum_{t\in T}u_t\zeta_t+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varepsilon_i e \tag{6}$$

(i) 反证法。假设 $\bar{x}$ 不是问题(P)的(η,ε)-拟弱有效解，则存在 $x\in\Omega$，使得

$$f_i(x)-f_i(\bar{x})<-\varepsilon_i\|\eta(x,\bar{x})\|\leqslant 0,\ \forall i\in I$$

由 $f_i, i\in I(\lambda)$ 在 $\bar{x}$ 处的(η,ε_i)-伪不变凸性，知

$$\langle\xi_i,\eta(x,\bar{x})\rangle+\varepsilon_i\|\eta(x,\bar{x})\|<0$$

$$\forall\xi_i\in\partial^{\mathrm{T}}f_i(\bar{x}),\ \forall i\in I \tag{7}$$

当 $i\notin I(\lambda)$ 时，取 $\lambda_i=0$；注意，$t\in T(\bar{x})$ 时，有

$$g_t(x)\leqslant g_t(\bar{x})=0$$

再由 $g_t, t\in T(\bar{x})$ 在 $\bar{x}$ 处的 Dini-拟不变凸性，知

$$\langle\zeta_t,\eta(x,\bar{x})\rangle\leqslant 0,\ \forall\zeta_t\in\partial^{\mathrm{T}}g_t(\bar{x}) \tag{8}$$

当 $t\notin T(\bar{x})$ 时，取 $u_t=0$，结合式(7)和式(8)以及 $\langle e,\eta(x,\bar{x})\rangle\leqslant\|\eta(x,\bar{x})\|$，得

$$\left\langle\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\xi_i+\sum_{t\in T}u_t\zeta_t+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varepsilon_i e,\eta(x,\bar{x})\right\rangle<0$$

这与式(6)矛盾，故结论成立。

(ii) 假设 $\bar{x}$ 不是问题(P)的(η,ε)-拟弱有效解，则存在 $x\in\Omega$ 且至少存在某一个 $i_0\in I$，使得

$$\begin{cases}f_{i_0}(x)-f_{i_0}(\bar{x})<-\varepsilon_{i_0}\|\eta(x,\bar{x})\|\leqslant 0\\ f_i(x)-f_i(\bar{x})\leqslant-\varepsilon_i\|\eta(x,\bar{x})\|\leqslant 0,\ \forall i\in I\backslash\{i_0\}\end{cases}$$

显然 $x\neq\bar{x}$。由 $f_i, i\in I(\lambda)$ 在 $\bar{x}$ 处的严格(η,ε_i)-伪不变凸性，得

$$\langle\xi_i,\eta(x,\bar{x})\rangle+\varepsilon_i\|\eta(x,\bar{x})\|<0,\ \forall\xi_i\in\partial^{\mathrm{T}}f_i(\bar{x}) \tag{9}$$

当 $i\notin I(\lambda)$ 时，取 $\lambda_i=0$；注意，$t\in T(\bar{x})$ 时，有

$$g_t(x)\leqslant g_t(\bar{x})=0$$

再由 $g_t, t\in T(\bar{x})$ 在 $\bar{x}$ 处的 Dini-拟不变凸性，知

$$\langle\zeta_t,\eta(x,\bar{x})\rangle\leqslant 0,\ \forall\zeta_t\in\partial^{\mathrm{T}}g_t(\bar{x}) \tag{10}$$

当 $t\notin T(\bar{x})$ 时，取 $u_t=0$，结合式(9)和式(10)以及 $\langle e,\eta(x,\bar{x})\rangle\leqslant\|\eta(x,\bar{x})\|$，有

$$\left\langle\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\xi_i+\sum_{t\in T}u_t\zeta_t+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varepsilon_i e,\eta(x,\bar{x})\right\rangle<0$$

这与式(6)矛盾，故结论成立。

注 3　文献[8]中的命题 3.5 对所有函数都有凸性假设，而定理 2 仅当 $i\in I(\lambda)$ 时，f_i 具有凸性假设，以及当 $t\in T(\bar{x})$ 时，g_t 具有凸性假设。因此，定理 2 对函数凸性的要求更弱，故定理 2 改进了文献[8]中的相应结论。

注 4　定理 1 和定理 2 分别将文献[9]中的命题 3.5 和文献[8]中的命题 3.5 推广到了近似解情形。

3　结　论

利用切向次微分，研究了一类非凸半无限多目标规划问题。在正则条件下，获得了非凸半无限多目标规划问题(η,ε)-拟弱有效解的必要最优性条件。在广义不变凸性假设下，获得了非凸半无限多目标规划问题(η,ε)-拟(弱)有效解的充分最优性条件。所得结果改进了文献[8-9]中相应结果。

参考文献(References)：

[1] GOBERNA M A, LOPÉZ M A. Linear semi-infinite optimization[M]. Chichester: Wiley, 1998.

[2] CHUONG T D, HUY N Q, YAO J C. Stability of semi-infinite vector optimization problems under functional perturbations[J]. Journal of Global Optimization, 2009, 45(4): 583—595.

[3] LONG X J, PENG Z Y, SUN Y K, et al. Generic stability of the solution mapping for semi-infinite vector optimization problems in Banach spaces[J]. Pacific Journal of Optimization, 2017, 13(4): 593—605.

[4] GOLESTANI M, NOBAKHTIAN S. Nonsmooth multiob-jective programming: strong Kuhn-Tucker conditions[J]. Positivity, 2013, 17: 711—732.

[5] CHUONG T D, KIM D S. Nonsmooth semi-infinite multiobjective optimization problems[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2014, 160: 748—762.

[6] GOLESTANI M, SADEGHI H, TAVAN Y. Necessary and sufficient conditions for weak quasi efficient in nonsmooth multiobjective problems[J]. Numerical Functional Analysis and Optimization, 2017, 38(6): 683—704.

[7] JIAO L, KIM D S, ZHOU Y. Quasi ε-solutions in a semi-infinite programming problem with locally lipschitz data[J]. Optimization Letters, 2021, 15: 1759—1772.

[8] TUNG L T. Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions and duality for multiobjective semi-infinite programming via tangential subdifferentials[J]. Numerical Functional Analysis and Optimization, 2020,41(6):659—684.

[9] TUNG L T. Strong-Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions for multiobjective semi-infinite programming via tangential subdifferential[J]. RAIRO Operations Research, 2018,52:1019—1041.

[10] 刘娟, 龙宪军. 非光滑多目标半无限规划问题的混合型对偶[J]. 应用数学与力学, 2021,42(6):595—601.
LIU Juan, LONG Xian-jun. Mixed type duality for nonsmooth multiobjective semi-infinite programming problems[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2021,42(6):595—601.

[11] PSHENICHNYI B N. Necessary conditions for an extremum[M]. New York: Marcel Dekker Inc, 1971.

[12] CLARKE F H. Optimization and nonsmooth analysis[M]. New York: Wiley-Interscience, 1983.

[13] MOHAN S R, NEOGY S K. On invex sets and preinvex functions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1995,189(3):901—908.

[14] ROCKERFELLAR T. Convex analysis[M]. Princeton: Princeton University Press, 1970.

Optimality Conditions for Approximate Solutions of Nonconvex Semi-infinite Multiobjective Programming

ZHANG Wen, LONG Xian-jun, HUANG Ying-quan

(School of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

Abstract: Optimality conditions of approximate solutions for nonconvex semi-infinite multiobjective programming problem are established. By means of tangential subdifferential, some new regular conditions and generalized invex functions are defined. It's worth noting that the functions involved are not necessarily local Lipschitz. The definitions of (η,ε)-quasi weakly efficient solutions and (η,ε)-quasi efficient solutions for semi-infinite multiobjective programming problems are introduced. By the regular conditions, the necessary optimality condition of (η,ε)-quasi weakly efficient solutions is obtained. Moreover, the sufficient optimality condition of (η,ε)-quasi (weakly) efficient solutions is proposed by the generalized invex convexity. The results obtained in this paper improve and generalize the corresponding results in the literature.

Key words: semi-infinite multi-objective programming; (η,ε)-quasi weakly effective solution; tangential subdifferential; generalized invex functions

责任编辑:李翠薇

引用本文/Cite this paper:

张雯,龙宪军,黄应全.非凸半无限多目标规划近似解的最优性条件[J].重庆工商大学学报(自然科学版),2022,39(3):41—46.

ZHANG Wen, LONG Xian-jun, HUANG Ying-quan. Optimality conditions for approximate solutions of nonconvex semi-infinite multiobjective programming[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition),2022,39(3):41—46.