

doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2022.0002.015

# 通胀风险和激励方案下 DC 型养老金的最优投资

余鑫, 王传玉, 何学强

(安徽工程大学 数理与金融学院金融工程系, 安徽 芜湖 241000)

**摘要:**随着我国养老金制度的逐渐完善,近年来已批准了一项绩效费用安排,作为 DC 养老金管理计划的管理激励措施,旨在激励管理人员;为了促使管理者们在投资方面做出更多努力,在金融市场中加入了通胀风险的因素,研究了在激励方案下的 DC 型养老金的最优投资策略;对于动态的资产组合,应用伊藤引理得到资产组合的动力学公式,通过增加一个辅助的劳动资本过程将原始问题转化为等价的自筹资金问题,最后从终端收益中导出最优投资策略,并通过数值分析得出通胀风险和激励方案对最优投资策略的影响;结果表明:在几何布朗运动资产价格动态和 CRRA 效用函数的设定下,最优投资策略比例呈峰谷分布。

**关键词:**DC 养老金;通胀风险;激励方案;辅助劳动资本;鞅方法;对偶控制

**中图分类号:**F832.48

**文献标志码:**A

**文章编号:**1672-058X(2022)02-0107-06

## 0 引言

传统上,养老金固定缴款(DC)计划管理者的管理激励是单一管理费安排,根据基金的价值收取费用。然而,在激励较低的方案下,经理们的表现通常很差,无法跟上基准。Hawthorne<sup>[1]</sup>指出:相对于管理者们糟糕的业绩,获得了过高的管理费。类似的现象在对冲基金和共同基金管理领域也得到了广泛的研究。Gomez-Mejia 和 Wiseman<sup>[2]</sup>的研究表明,单一管理费用制度下的管理者缺乏激励,无法为更好的绩效付出更大的努力。

Stoughton<sup>[3]</sup>和 Li 等<sup>[4]</sup>发现激励改变了管理者的风险态度,从而产生了道德风险;Stark<sup>[5]</sup>和 Elton 等<sup>[6]</sup>分别从理论和实证的角度研究了激励机制对风险承担行为和基金绩效的影响;Foster 等<sup>[7]</sup>使用实证数据表明,在管理费用和业绩费用方案下,激励安排

增加了风险分配和基金波动性。几何布朗运动资产价格动态和期望效用理论框架是模型化基金过程和研究管理者风险承担政策最常用的设置。Gerber 等<sup>[8]</sup>综述了几何布朗运动在养老基金动态建模中的应用;Carpenter<sup>[9]</sup>和 Hoand<sup>[10]</sup>确定了在这些情况下风险承担和管理激励之间的正相关关系;此外,Bichuch 等<sup>[11]</sup>使用一般的半鞅来描述风险资产价格动态;He 和等<sup>[12]</sup>提出了一个基于累积前景理论的框架工作来研究对冲基金的风险承担与绩效费用之间的关系。他们成功地获得了第一损失计划下封闭形式的最优交易策略。因此,以几何布朗运动资产价格动态和恒定相对风险厌恶效用为背景,研究了通胀风险下加入激励方案之后管理者的最优风险承担策略。

Lin<sup>[13]</sup>研究指出:绩效费可能会产生更大的激励,促使管理者在投资方面做出更多努力。因此,不同激励方案下的最优风险承担政策在基金管理文献中得到了广泛的研究。近几年通货膨胀对金融市场

收稿日期:2021-03-02;修回日期:2021-05-14.

基金项目:国家自然科学基金项目资助(6150301);安徽省高校自然科学基金重点项目(KJ2018A0120);安徽工程大学校级科研重点项目(XJKY08201901);安徽高校人文社会科学研究重点项目(SK2019A0116)资助。

作者简介:余鑫,(1994—)女,安徽六安人,硕士研究生,从事金融风险研究。

的影响愈发显著,王传玉等<sup>[14]</sup>研究了通货膨胀和损失厌恶下的 DC 养老金的最优投资问题。在前景理论的框架下,应用伊藤公式得到通胀折现后真实股票价格的微分方程;然后,考虑通胀环境下的退休时刻终端财富期望效用最大化问题,应用鞅方法推导退休前任意时刻 DC 养老金最优投资策略的显式解,分析损失厌恶对 DC 养老金最优投资策略的影响。在 Lin<sup>[13]</sup>的基础上加入通胀风险的因素,在此环境下建立了管理者的关于时间和基金财富的风险结构。一方面,在方案中,管理者的收益是最终积累的分段函数,DC 养老金经理在时间和基金财富方面复杂的风险承担行为尚未得到很好的研究。另一方面,对于 DC 养老金而言,缴款过程是消除基金财富过程中自筹资金和鞅特性的重要决定因素。采用随机最优控制方法,研究了管理费用和绩效费用方案下养老金管理者的风险承担政策。为了解决这些问题,在模型中加入了辅助的劳动资本过程,如 Kwak<sup>[15]</sup>, Pirvu 等<sup>[16]</sup>, Guan 等<sup>[17]</sup>。假设缴款过程是非随机的,使用对偶方法和赋值技术,见 Karatzas<sup>[18]</sup>求解鞅框架下的奇异优化问题。

## 1 数学模型设计

### 1.1 金融市场

在 DC 养老金管理中,缴款被不断的支付给养老金,管理者动态地将基金财富分配给有风险和无风险的资产,以达到投资目标。首先,建立了动态的风险和无风险资产的组合模型。

假设所有过程和随机变量都定义在概率空间  $(\Omega, \mathcal{F}, \{F_t\}_{t \in [0, T]}, P)$  上,且满足一般条件,其中  $P$  表示真实概率测度。而所考虑的完备的金融市场由两种资产组成:一种是风险资产,另一种是无风险资产。两种资产的定价过程如下:

**假设 1** 无风险资产价格  $\{R_t\}_{t \geq 0}$  满足下列微分方程:

$$dR_t = rR_t dt$$

其中,  $r$  是固定收益率,  $r > 0$ 。

**假设 2** 风险资产的价格  $\{S_t\}_{t \geq 0}$  是一个几何布朗运动,满足下列随机微分方程:

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t^1) = S_t[r dt + \sigma(dW_t^1 + \theta dt)]$$

这里  $\sigma > 0$  是风险资产的波动性,  $\theta = \frac{\mu - r}{\sigma} > 0$  是风险的市场价格,  $\mu$  是风险资产的预期回报率,是标准布朗运动。

**假设 3** 假设通货膨胀是一个随机过程,其收益水平  $Q_t$  满足下面的微分方程:

$$dQ_t = Q_t(\alpha dt + \beta dW_t^2)$$

$\alpha$  是  $t$  时刻的预期通货膨胀率,  $\beta$  表示  $t$  时刻的波动率,  $W_t^2$  是另一个标准布朗运动,且  $W_t^1, W_t^2$  相互独立。

考虑通货膨胀的影响,则在  $t$  时刻的投资者投资于无风险的真实收益为  $\hat{R}_t = R_t/Q_t$ , 投资于有风险的真实收益为  $\hat{S}_t = S_t/Q_t$ 。

对  $\hat{R}_t$  和  $\hat{S}_t$  分别应用伊藤公式得:

$$\begin{aligned} d\hat{R}_t &= -\frac{R_t}{Q_t^2} dQ_t + \frac{1}{Q_t} dR_t + \frac{1}{2} \frac{2R_t}{Q_t^3} (dQ_t)^2 \\ d\hat{S}_t &= S_t d\left(\frac{1}{Q_t}\right) + \frac{1}{Q_t} dS_t + dS_t d\left(\frac{1}{Q_t}\right) \end{aligned}$$

### 1.2 养老基金财富

假定  $t$  时刻的总财富为  $X_t$ , 初始财富记为  $X_0$ ,  $\pi_t$  为投资于有风险金融资产的资产比例,  $(1 - \pi_t)$  为投资到无风险金融资产的资产比例,可以得到在  $t$  时刻的基金财富过程为

$$dX_t = \pi_t X_t \frac{d\hat{S}_t}{\hat{S}_t} + (1 - \pi_t) X_t \frac{d\hat{R}_t}{\hat{R}_t} + c dt$$

这里  $c$  是缴款率,  $\pi_t$  表示  $t \in [0, T]$  分配给风险资产的总额。

金融市场是完备的,存在一个且只存在一个定价核。

定义状态价格密度过程  $\{\xi_t\}_{0 \leq t \leq T}$  如下(Lin)<sup>[36]</sup>:

$$\xi_t \triangleq \exp\left[-\left(r + \frac{1}{2}\theta^2\right)t - \theta W_t^1\right], 0 \leq t \leq T$$

清算级别应包括在 DC 养老金管理中,这是基准  $G = G(T)$  在  $T$  时刻的比例  $\rho, 0 < \rho < 1$ 。基准  $G(T)$  是在合理累计率下的直到时间  $T$  为止的预期累积缴款:

$$G(T) = \int_0^T c e^{\bar{r}(T-s)} dt = \bar{c}r(e^{\bar{r}T} - 1)$$

这里  $\bar{r}$  是累计率。  $G(T)$  是绩效费有效性的基准。

**假设 4** 假设激励方案下,管理者的收益  $\Theta(X_T)$  为

$$\Theta(X_T) = \begin{cases} k_1 X_T + k_2 (X_T - G), & X_T \geq G \\ k_1 X_T, & \rho G < X_T < G \end{cases}$$

其中  $k_1$  是管理费的费率,  $k_2$  是绩效费率,  $X_T$  是终端基金财富。显然较高的  $k_2$  会给管理者带来更高的激励。绩效费的有效性由基准决定  $G = G(T)$ 。如果基金财富大于基准, 管理者将获得基本管理费和额外的绩效费作为奖励。

下面将对模型进行求解, 来得出通胀风险和激励方案下 DC 型养老金的最优投资。

## 2 模型求解

### 2.1 效用函数

假设管理者的期望效用是  $E[U(X_T)]$ , 其中  $U$  是管理者激励方案下的效用函数, 选择 CRRA 效用函数。  $X_T$  是终端财富过程。

目标是求出最大效益, 即

$$\sup_{\pi \in v[0, T]} \{E[U(X_T)]\}$$

其中,  $\pi \in v[0, T]$  表示所有的可行性策略,

$$U(x) = \frac{x^p}{p}$$

$p \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$  是灵敏度递减的参数, 衡量管理者的风险厌恶程度。激励方案下的效用函数表示为

$$U(x) = \begin{cases} \frac{k_2 x + k_3 (x - G)^p}{p}, & x \geq G \\ \frac{k_2^p x^p}{p}, & \rho G \leq x \leq G \end{cases}$$

此外, 为了衡量成员的风险厌恶程度, 设成员的效用函数为

$$\hat{I}(x) = \frac{x^q}{q}$$

$q \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$  是灵敏度递减的参数, 衡量成员的风险厌恶程度。通常成员的风险厌恶程度高于管理者, 即  $q < p$ 。激励方案下的成员的效用为

$$I(x) = \begin{cases} \frac{((1 - k_2 - k_3)x + k_3 G)^q}{q}, & x \geq G \\ \frac{(1 - k_2)^q x^q}{q}, & \rho G \leq x \leq G \end{cases}$$

根据上述分析, 连续注资过程消除了基金财富过程的自融资属性。文献[10, 19]增加了一个辅助的劳动资本过程, 将原来的问题转化为等价的自筹

资金问题。因此, 鞅方法和对偶方法可用于自筹资金优化, 最优风险承担政策可通过市场的完备性从终端收益中导出。

将  $H(t)$  定义为  $t$  时刻单位贡献的劳动资本:

$$H(t) = \int_0^T e^{-r(s-t)} ds = \frac{1}{r}(1 - e^{-r(T-t)})$$

$H(t)c$  是未来缴款的现值, 代表  $t$  时刻的劳动资本。财富总值  $Y_t$  在时刻  $t$  为

$$Y_t = X_t + H(t)c$$

这是基金财富和劳动资本的结合。因此,  $Y_t$  满足以下随机微分方程:

$$\begin{cases} dY_t = rY_t dt + \pi_1 \sigma (dW_t + \theta dt) \\ Y_0 = \frac{1}{r}(1 - e^{-rT})c \end{cases}$$

显然, 总财富过程  $\{Y_t\}_{0 \leq t \leq T}$  是一个自筹过程, 且在鞅框架下, 可以解决随机最优控制问题。此外, 劳动资本  $\{H(t)c\}_{0 \leq t \leq T}$  是一个确定过程, 在  $\{X_t\}_{0 \leq t \leq T}$  上的优化问题可以很容易地转化成在  $\{Y_t\}_{0 \leq t \leq T}$  上的优化问题。特别是, 劳动资本在退休时终止,  $X_T = Y_T$  是有效的。此外, 最优的风险承担策略可以通过市场的完备性从最优的终端收益中获得。

非线性增益特性破坏了激励方案下效用函数的凹形, 因此用对偶方法来解决这一问题, 通过建立奇异效用函数的包络线, 最终确定最优基金的终端财富, 并根据包络线产生的收益确定最优的投资策略。

首先, 激励方案下效用函数  $U$  的对偶函数  $V$  的共轭函数  $V$  和共轭点  $Y$  的表达式分别为

$$V(y) = \begin{cases} \frac{1-p}{p} \left(\frac{y}{k_1}\right)^{\frac{p}{1-p}}, & 0 < y < k_1^p M^{p-1} \\ -My + \frac{(k_1 M)^p}{p}, & y \geq k_1^p M^{p-1} \end{cases}$$

$$Y(y) = \begin{cases} k_1^{p-1} y^{\frac{1}{1-p}}, & 0 < y < k_1^p M^{p-1} \\ M, & y \geq k_1^p M^{p-1} \end{cases}$$

其次, 对于基金财富过程, 显示的表达式为

$$f(t, \xi_t) = (\Phi(d_{1,t}) + \Phi(d_{2,t}) \frac{\Phi'(d_{1,t})}{\Phi'(d_{2,t})}) M e^{-r(T-t)}$$

$\Phi$  是标准正态随机变量  $Z$  的累积分布函数。此外, 对于任意的  $t \in [0, T]$ ,  $d_{1,t}$  和  $d_{2,t}$  是  $t$  和  $\xi_t$  的函数:

$$d_{1,t} \triangleq \frac{\ln\left(\frac{k_1^p M^{p-1}}{v_1^* \xi_t}\right) + (r - \frac{\theta^2}{2})(T-t)}{-\theta\sqrt{T-t}}$$

$$d_{2,t} \triangleq -d_{1,t} + \frac{\theta\sqrt{T-t}}{1-p}$$

值得注意的是,  $V$  取决于  $\rho, k_2, k_3$  之间的关系。有两

种情况, 由  $\rho$  和  $\frac{1-p}{k_2^{\frac{p}{p-1}} - (k_2+k_3)^{\frac{p}{p-1}}}$  两者之间的关系来区分。

情况 1:

$$\rho > \frac{\frac{p}{1-p} k_3 (k_2+k_3)^{\frac{1}{p-1}}}{k_2^{\frac{p}{p-1}} - (k_2+k_3)^{\frac{p}{p-1}}}$$

此时  $U$  的凹包络为

$$U^*(x) = \begin{cases} (k_2x+k_3(x-G))^p, & x \geq G' \\ U(M) \frac{U(G')-U(M)}{G'-M} (x-M), & M < X < G' \end{cases}$$

$v^*$  为方案下的边际效用且满足

$$E[\xi_r \gamma(v_2^* \xi_r)] = Y_0$$

$t$  时刻的最优基金财富是

$$X_t^* = e^{-r(T-t)} \left( \frac{k_3 G}{k_2+k_3} + \Phi(g_{1,t}) \left( M - \frac{k_3 G}{k_2+k_3} \right) + \Phi(g_{2,t}) \frac{\Phi'(g_{1,t})}{\Phi'(g_{2,t})} \left( G' - \frac{k_3 G}{k_2+k_3} \right) \right) - H(t)c$$

对于任意的  $t \in [0, T]$ , 有:

$$g_{1,t} = \frac{\ln\left(\frac{U_2'(G')}{v_2^* \xi_t}\right) + (r - \frac{\theta^2}{2})(T-t)}{-\theta\sqrt{T-t}}$$

$$g_{2,t} \triangleq -g_{1,t} + \frac{\theta\sqrt{T-t}}{1-p}$$

$t$  时刻的最优策略是

$$\pi_t^* = \frac{\theta}{(1-p)\sigma} (X_t^{*2} + H(t)c - (\Phi(g_{1,t}) + (1-\Phi(g_{1,t})) \frac{k_3}{\rho(k_2+k_3)}) Me^{-r(T-t)} + (1-p)\Phi'(g_{1,t}) \frac{e^{-r(T-t)}}{\theta\sqrt{T-t}} (G'-M))$$

情况 2:

$$\rho < \frac{\frac{p}{1-p} k_3 (k_2+k_3)^{\frac{1}{p-1}}}{k_2^{\frac{p}{p-1}} - (k_2+k_3)^{\frac{p}{p-1}}}$$

此时  $U$  的凹包络为

$$U(x) = \begin{cases} \frac{(k_2x+k_3(x-G))^p}{p}, & x \geq G' \\ U(C_2) \frac{U(G')-U(C_2)}{G'-C_2} (X-C_2), & C_2 < X < G' \\ \frac{k_2^p}{p}, & x \leq C_2 \end{cases}$$

其中  $C_2$  为管理者态度从追求风险转向规避风险的转折点, 得出最优基金财富和最优投资比:

$$X_t^* = e^{-r(T-t)} \left[ \frac{k_3 G}{k_2+k_3} + \Phi(g_{2,t}) \left( \frac{\Phi'(g_{1,t})}{\Phi'(g_{2,t})} \right) \left( G' - \frac{k_3 G}{k_2+k_3} \right) - \frac{\Phi'(d_{1,t})}{\Phi'(d_{2,t})} M \right] - \Phi(g_{1,t}) \frac{k_3 G}{k_2+k_3} + \Phi(g_{1,t}) M + \Phi(d_{2,t}) \frac{\Phi'(d_{1,t})}{\Phi'(d_{2,t})} M - H(t)c$$

$$\pi_t^* = \frac{\theta}{(1-p)\sigma} (X_t^* + H(t)c - (\Phi(d_{1,t}) + (1-\Phi(g_{1,t})) \frac{k_3}{\rho(k_2+k_3)}) Me^{-r(T-t)} + (1-p)\Phi'(g_{1,t}) \frac{e^{-r(T-t)}}{\theta\sqrt{T-t}} (G' - \frac{\Phi'(g_{1,t})\Phi'(d_{1,t})}{\Phi'(g_{2,t})\Phi'(d_{2,t})} M))$$

### 3 数值模拟与结果分析

现将进行数值模拟, 以便更直观表示出通胀环境下, 激励方案对 DC 型养老金投资策略的影响。首先为模型中的参数设置合理的值。数值分析的参数值来自 Lin<sup>[36]</sup>, 选取参数值为  $r = 0.05, \sigma = 0.3, \mu = 0.17, \theta = 0.4$ 。

从图 1 和图 2 可以看出: 额外的基金财富通过直接增加激励方案下的奖励金额, 提高了管理者的效用。具体来说, 在方案下, 额外的基金财富也增加了获得绩效费的可能性, 从而以比较保守的政策增加了绩效费的可能。此外, 在绩效费率最高的情况下, 每增加一单位的基金财富, 管理者产生的效用最高。在通胀环境下, 当基金财富较低时, 较高的绩效费率会导致更激进的风险承担行为。这种赌博导致更大收益的可能性更高。因此, 在这种情况下, 效用相对较高。而且, 效用的改善随着接近终端时间而减小。前者的积累对于 DC 养老基金的管理至关重要, 因为管理者有时间实施后续的适应性政策。根据以上结果, 在通胀环境下, 管理良好的基金将显著提高管理者的效用。

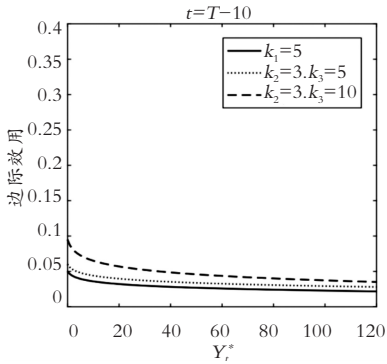


图 1 边际效用与资产关系图

Fig. 1 Relationship between marginal utility and assets

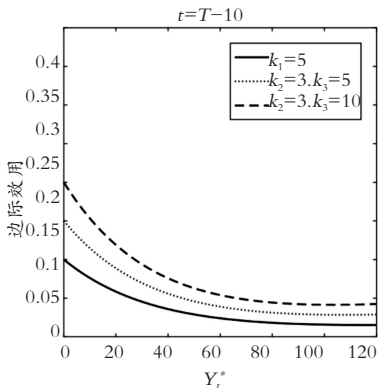


图 2 加入通胀后边际效用与资产关系图

Fig. 2 Relationship between marginal utility and assets after inflation is added

## 4 结论与展望

推导了通胀风险下 DC 养老金激励方案下的最优投资问题。根据以上情况,在激励方案下,最优风险投资比例在清算水平与转折点之间呈峰谷形态。由于 Lin<sup>[36]</sup>解释到清算不会在终端时刻之前发生,所以在本文中,终端时刻之前的任意时刻,不同的激励方案下,收益明显不同,且更冒险的赌博行为只发生在基金财富较低和到期时间较短的时候。相应地,当基金财富较低,到期时间较短时,经理和成员会采取更加激进的风险承担政策以获得更高的收益而赌博;当基金财富相对较大时,经理和成员可以通过选择适当的绩效费率来提高收益,从而采取更加保守的风险承担政策。因此,通胀环境下,将激励机制引入 DC 养老金计划管理是一种双赢的局面。

主要贡献是在考虑激励方案对管理者投资策略的影响时,加入了通胀风险的因素,因为在金融市场中,通货膨胀是实际存在的,因此得出的结果会与现实更贴近。

## 参考文献 (References):

- [1] HAWTHORNE F. The dawning of performance fees[J]. Institutional Investor, 1986, 20(1): 39—46.
- [2] GOMEZ-MEJIA L, Wiseman R M. Refraining executive compensation: an assessment and outlook [J]. Journal of Management, 1997, 23(3): 291—374.
- [3] STOUGHTON N M. Moral hazard and the portfolio management problem [J]. Journal of Finance, 1993, 48(5): 9—18.
- [4] LI C W, TIWARI A. Incentive contract in delegated portfolio management [J]. Review of Financial Studies, 2009, 14(7), 22:681—714.
- [5] STARKS L T. Performance incentive fees: an agency theoretic approach [J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 1987, 22(1): 17—32.
- [6] EITON E J, GRUBER M J, BLAKE C R. Incentive fees and mutual funds [J]. The Journal of Finance, 2003, 58(2): 779—804.
- [7] FOSTER D P, YOUNG H P. Gaming performance fees by portfolio managers [J]. The Quarterly Journal of Economics, 2010, 125(4): 1435—1458.
- [8] GERBER H U, SHIU E S W. Geometric brownian motion models for assets and liabilities: from pension funding to optimal dividends [J]. North American Actuarial Journal, 2013, 7(3): 37—51.
- [9] CARPENTER J N. Does option compensation increase managerial risk appetite [J]. The Journal of Finance, 2000, 55(5): 2311—2331.
- [10] HODDER J E, JACKWERTH J C. Incentive contracts and hedge fund management [J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 2007, 42(4): 11—26.
- [11] BICHUCH M, STURM S. Portfolio optimization under convex incentive schemes [J]. Finance and Stochastics, 2014, 18(4): 873—915.
- [12] HE X D, KOU S. Profit sharing in hedge funds [J]. Mathematical Finance, 2018, 28(1): 50—81.
- [13] LIN H. Optimal control of DC pension plan management under two incentive schemes [J]. North American Actuarial Journal, 2019, 23(1): 120—141.
- [14] 王传玉,付春艳,盛国祥,基于通货膨胀和最低保障的 DC 养老金最优投资 [J]. 运筹与管理, 2018, 27(2): 193—199.

WANG Chuan-yu, FU Chun-yan, SHENG Guo-xiang. Optimal investment of DC pensions based on inflation and minimum guarantee [J]. Operation Research and Management, 2018, 27(2): 193—199.

- [15] KWAK M, SHIN Y H, CHOI U J. Optimal investment and consumption decision of a family with life insurance [J]. *Insurance: Mathematics & Economics*, 2011, 48(2):76—88.
- [16] PIRVU T A, ZHANG H Y. Optimal investment consumption and life insurance under mean-reverting returns: the complete market solution [J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2012, 51(2):3—9.
- [17] GUAN G H, LIANG Z. Optimal management of DC pension plan in a stochastic interest rate and stochastic volatility framework [J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2014, 57(3):58—66.
- [18] KARATZAS I, LEHOCZKY J P, SHREVR S E. et al. Martingale and duality methods for utility maximization in incomplete markets [J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1991, 29(5):12—30.
- [19] MERTON R C. Lifetime portfolio selection under uncertainty: the continuous-time case [J]. *Review of Economics and Statistics*, 1969, 51(3):47—57.
- [20] HAN N W, HUNG M W. Optimal asset allocation for DC pension plans under inflation [J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2012, 51(1):72—81.
- [21] GUAN G H, LIANG Z X. A stochastic nash equilibrium portfolio game between two DC pension funds [J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2016, 70(3):37—44.
- [22] FANG S C, XING W X. *Linear conic optimization* [M]. Beijing: Science Press, 2010.

## Optimal Investment of DC-type Pension under Inflation Risk and Incentive Scheme

YU Xin, WANG Chuan-yu, HE Xue-qiang

(Department of Financial Engineering, School of Mathematics, Physics and Finance  
Anhui Polytechnic University, Anhui Wuhu 241000, China)

**Abstract:** With the gradually perfecting of China's pension system, in recent years, a performance fee arrangement has been approved as a management incentive measure of DC-type pension management plan to motivate the managers. In order to encourage the managers to make more efforts to work hard in investment perspective, inflation risk factor is added in financial market, and the optimal investment strategy of DC-type pension under the incentive scheme is studied. With regard to dynamic asset portfolio, Ito lemma is used to obtain the dynamics formula of asset portfolio, then, an auxiliary labor capital process is added to the asset portfolio to transform the original problem into an equivalent self-financing problem, and finally, the optimal investment strategy is derived from the terminal returns and the influence of inflation risk and incentive scheme on the optimal investment strategy is obtained through the numerical analysis. The results show that the optimal investment strategy ratio demonstrates peak-to-valley distribution under the setting of the geometric Brownian movement asset price dynamic state and CRRA utility function.

**Key words:** DC-type pension; inflation risk; incentive scheme; auxiliary labor capital; martingale method; dual control

责任编辑:田 静

引用本文/Cite this paper:

余鑫,王传玉,何学强. 通胀风险和激励方案下 DC 型养老金的最优投资[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版), 2022, 39(2):107—112.

YU Xin, WANG Chuan-yu, HE Xue-qiang. Optimal investment of DC-type pension under inflation risk and incentive scheme [J]. *Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition)*, 2022, 39(2):107—112.