doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2022.0002.008

集值优化问题近似 Henig 真有效点的稳定性

胡瑞婷
(重庆工商大学 数学与统计学院,重庆 400067)

摘　要: 针对集值优化问题近似 Henig 真有效点,提出在目标集值优化问题的映射及可行域均扰动的情形下,建立 C 凸集值优化问题近似 Henig 真有效点的稳定性结果,将近似 Henig 真有效点的稳定性研究从向量值优化问题推广到集值优化问题中。首先给出集值映射序列 Γ_C 收敛的概念,比较了集值映射序列 Painlevé-Kuratowski 收敛与 Γ_C 收敛性之间收敛强弱的关系,发现 Painlevé-Kuratowski 收敛弱于 Γ_C 收敛;其次将 Painlevé-Kuratowski 收敛应用于建立近似 Henig 真有效点的稳定性结果中,在扰动集值优化问题的问题数据 Painlevé-Kuratowski 收敛到目标集值优化问题的问题数据情况下,获得了集值优化问题近似 Henig 真有效点的抗干扰稳定性结果,该结果对数值计算分析中集值优化问题近似 Henig 真有效点的稳定性研究有着重要的理论分析价值。

关键词: C 凸;近似 Henig 真有效点;Painlevé-Kuratowski 收敛;稳定性
中图分类号: O110.74　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 1672-058X(2022)02-0053-06

0 引　言

集值优化问题是优化领域的研究热点之一,具有广泛的应用前景。譬如在物流配送、工程设计、经济金融、环境保护等重大决策和管理活动中都存在大量的集值优化问题。由此可见,集值优化问题是十分贴近实际生活的一类数学模型,它的研究还涉及凸分析、泛函分析、线性与非线性分析、非光滑分析、变分分析等数学分支, 因此研究集值优化问题具有重要的理论意义。近年来,国内外众多学者对集值优化问题及其相关问题的理论、算法与应用进行了研究,得到了一系列的重要成果[1-6]。随着集值优化问题研究的关注度越来越高,其有效解的研究也越来越受国内外学者的重视。学者们获得了多个不同意义下的真有效解,如 Henig 真有效解、Benson 真有效解、超有效解等。其中,超有效解的存在条件非常强,Benson 真有效解的标量化要求序锥有紧或弱紧的基底。很多情况下,这些条件都无法达到。但是,Henig 真有效解不仅具有超有效解的一些主要特征,其存在性条件比也超有效解弱,只需要序锥有基底即可。因此,研究 Henig 真有效解既有一定的理论价值又有重要的实际意义。目前学者们关于集值优化问题 Henig 真有效解的研究主要集中在高阶最优性条件[7]、连通性[8]、带约束的向量平衡问题[9]等,关于其稳定性的研究较少,而稳定性研究有助于提高数值计算分析的精确度,故值得进一步探索。

Lucchetti 和 Miglierina[10]首次研究了向量优化问题在给定空间及其映像空间下扰动问题的 Painlevé-Kuratowski 收敛性,为后续学者研究各种解的稳定性奠定了坚实的基础; Zeng 等[11]在 C 凸条件下,讨论了向量优化问题有效点在近似问题的数值 Painlevé-Kuratowski 收敛致原始问题数值时的稳定性,从而改进了文献[10,12]获得的相应向量优化问题的稳定性定理;Li 等[13]在(严格)真拟 C 凸条件下,利用向量

收稿日期: 2020-12-10;**修回日期:** 2021-01-25.
作者简介: 胡瑞婷(1996—),女,重庆南岸人,硕士研究生,从事最优理论方法及应用研究.

值函数序列的连续性和 Γ_C 收敛性,研究了向量优化问题 Henig 真有效点集与解集的收敛性,所得结果与文献[10,11]不同。这类文献对本文集值优化问题近似 Henig 真有效点的稳定性研究提供了重要的理论支持。

又由于大多数实际问题难以得到准确解,只能用近似解逼近,而近似解不仅使计算精度变高,而且还能适应各种复杂情况。因此,本文针对集值优化问题近似 Henig 真有效点,提出在目标集值优化问题的映射及可行域均扰动的情形下,建立 C 凸集值优化问题近似 Henig 真有效点的稳定性结果,将近似 Henig 真有效点的稳定性研究从向量值优化问题推广到集值优化问题中,从而得到新的抗干扰性结果。

1 预备知识

本节将介绍一些基本概念和相关性质。令 C 为 R^p 中内部非空的尖闭凸锥,R^p 中 C 诱导的偏序如下:

$$y\leqslant_C x\Leftrightarrow x-y\in C,\ \forall x,y\in R^p$$

$$y<_C x\Leftrightarrow x-y\in \text{int } C,\ \forall x,y\in R^p$$

设 $F:E\to 2^{R^p}$ 为集值映射,E 为 R^m 中的非空子集,考虑如下集值优化问题:

$$(E,F):\min_{x\in E}F(x)$$

首先回顾关于集值优化问题 (E,F) 的几种解的定义,令 $F(E)=\cup_{x\in E}F(x)$。

定义 1 设 $E\subset R^m$ 非空,$y\in F(E)$,任取 $e\in\text{int } C$,$\varepsilon\geqslant 0$,若点 y 满足 $(F(E)-\{y\}+\varepsilon e)\cap(-C)=\{0\}$,则称点 y 为集合 $F(E)$ 的 εe-近似有效点,记集合 $F(E)$ 中所有 εe-近似有效点构成的集合为 εe-Min $F(E)$。

定义 2[6] 设 $E\subset R^m$ 非空,$y\in F(E)$,任取 $e\in\text{int } C$,$\varepsilon\geqslant 0$,若点 y 满足 $(F(E)-\{y\}+\varepsilon e)\cap(-\text{int } C)=\varnothing$,则称点 y 为集合 $F(E)$ 的 εe-近似弱有效点,记集合 $F(E)$ 中所有 εe-近似弱有效点构成的集合为 εe-WMin $F(E)$。

定义 3 设 $E\subset R^m$ 非空,$y\in F(E)$,任取 $e\in\text{int } C$,$\varepsilon\geqslant 0$,若存在满足 $C\backslash\{0\}\subset\text{int } C_1$ 的内部非空的尖闭凸锥 C_1,使得 $(F(E)-\{y\}+\varepsilon e)\cap(-C_1\backslash\{0\})=\varnothing$,则称点 y 为集合 $F(E)$ 的 εe-近似 Henig 真有效点,记集合 $F(E)$ 中所有 εe-近似 Henig 真有效点构成的集合为 εe-HMin $F(E)$。

注 1 显然 εe-HMin $F(E)\subset\varepsilon e$-Min $F(E)\subset\varepsilon e$-WMin $F(E)$。

性质 1 设 $e\in\text{int } C$,$\varepsilon\geqslant 0$,则有 εe-HMin $(F(E)+C)=\varepsilon e$-HMin $F(E)$。

证明 先证 εe-HMin $(F(E)+C)\subset\varepsilon e$-HMin $F(E)$。任取 $y\in\varepsilon e$-HMin $(F(E)+C)$,则有 $(F(E)+C-\{y\}+\varepsilon e)\cap(-C_1\backslash\{0\})=\varnothing$。因为 $F(E)\subset F(E)+C$,所以 $(F(E)-\{y\}+\varepsilon e)\cap(-C_1\backslash\{0\})=\varnothing$。从而可知,$y\in\varepsilon e$-HMin $F(E)$,故 εe-HMin $(F(E)+C)\subset\varepsilon e$-HMin $F(E)$。

下证 εe-HMin $F(E)\subset\varepsilon e$-HMin $(F(E)+C)$。任取 $y\in\varepsilon e$-HMin $F(E)$,则有 $(F(E)-\{y\}+\varepsilon e)\cap(-C_1\backslash\{0\})=\varnothing$。反证法:假设 $y\notin\varepsilon e$-HMin$(F(E)+C)$,则存在 $y'\in F(E)+C$,使得 $y'-y+\varepsilon e\in-C_1\backslash\{0\}$,由 $y'\in F(E)+C$ 可知,存在 $y''\in F(E)$,$e'\in C$,使得 $y'=y''+e'$,从而有 $y''+e'-y+\varepsilon e\in-\}-C_1\backslash\{0\}$,因此 $y''-y+\varepsilon e\in-e'-C_1\backslash\{0\}$,即 $y''-y+\varepsilon e\in-C-C_1\backslash\{0\}$。又因为 $C\backslash\{0\}\subset\text{int } C_1$,所以 $y''-y+\varepsilon e\in-C_1\backslash\{0\}$,又因为 C_1 为内部非空的尖闭凸维,$C_1+C_1\backslash\{0\}=C_1\{0\}$,所以 $y''-y+\varepsilon e\in-C_1\backslash\{0\}$。这与 $y\in\varepsilon e$-HMin $F(E)$ 矛盾。因此 $y\in\varepsilon e$-HMin$(F(E)+C)$。

下面回顾集合的 Painlevé-Kuratowski 收敛性定义。

定义 4[5] 称集合序列 $\{E_n\}\subset R^m$Painlevé-Kuratowski 收敛到集合 $E\subset R^m$,记 $E_n\xrightarrow{P.K.}E$,当且仅当 $\lim_n\sup E_n\subset E\subset\lim_n\inf E_n$。其中,$\lim_n\inf E_n=\{x\in R^m:x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n,x_n\in E_n,n\in\mathbf{N}$ 充分大$\}$;$\lim_n\sup E_n=\{x\in R^m:x=\lim_{k\to\infty}x_k,x_k\in E_{n_k},\{n_k\}$ 为 $\mathbf{N}$ 的子序列$\}$。

注 2 由定义 4 可知,显然 $\lim_n\inf E_n\subset\lim_n\sup E_n$。此外,由文献[10]可知,若 $\{E_n\}$ 是闭凸集序列,且满足 $E_n\xrightarrow{P.K.}E$,则 E 也是闭凸集。

下面介绍 3 种集值映射序列收敛的概念。

定义 5[6] 设 $E,E_n\subset R^m$ 为非空集合,$F:E\to 2^{R^P}$ 和 $F_n:E_n\to 2^{R^P}(n\in\mathbf{N})$ 为集值映射,且令 epi $F=\{(x,z)\in E\times R^P:z\in F(x)+C\}$。若集值映射序列 F_nPainlevé-Kuratowski 收敛于集值映射 F(记 $F_n\xrightarrow{P.K.}F$),当且仅当 epi $F_n\xrightarrow{P.K.}$epi F。

定义 6 设 $E,E_n\subset R^m$ 为非空集合,$F:E\to 2^{R^P}$ 和 $F_n:E_n\to 2^{R^P}(n\in\mathbf{N})$ 为集值映射。若集值映射序列 F_n 连续收敛到集值映射 F(记 $F_n\xrightarrow{C}F$),当且

仅当对任意 $x\in E,y\in F(x)$,存在 E_n 中的任意序列 $\{x_n\}$,$x_n\to x$,都存在 $y_n\in F_n(X_n)$,使得 $y_n\to y$。

定义 7　若集值映射序列 $F_n\Gamma_C$ 收敛于集值映射 F(记 $F_n\xrightarrow{\Gamma_C}F$),当且仅当满足:

1) $E_n\xrightarrow{P.K.}E$;

2) 对任意 $x\in E,y\in F(x)$,存在 E_n 中的序列 $\{x_n\}$,$x_n\to x$,有 $y_n\in F_n(X_n)$,使得 $y_n\to y$;

3) 对任意 $x\in E$,E_n 中的任意序列 $\{x_n\}$,$x_n\to x$,和任意 $\varepsilon\in \operatorname{int} C$,存在 $k_\varepsilon\in\mathbf{N}$,使得 $F_n(x_n)+\varepsilon\subset F(x)+\operatorname{int} C,\ \forall n\geqslant k_\varepsilon$。

注 3　文献[14,注 2.8]中 Γ_C 收敛的向量值形式是定义 7 的特殊形式;定义 6 中连续收敛强于定义 7 中 Γ_C 收敛。

下面讨论集值映射序列连续收敛和 Painlevé-Kuratowski 收敛之间的关系。

性质 2　设 $E,E_n\subset R^m(n\in\mathbf{N})$非空,$F:E\to 2^{R^P}$ 和 $F_n:E_n\to 2^{R^P}(n\in\mathbf{N})$为非空集值映射,且 $F_n\xrightarrow{\Gamma_C}F$,则有 $F_n\xrightarrow{P.K.}F$。

证明　先证 $\operatorname{epi} F\subset \lim_n\inf\operatorname{epi} F_n$。任取$(x,z)\in\operatorname{epi} F$,则 $x\in E,z\in F(x)+C$。由定义 7 中 2)可知,存在 E_n 中序列$\{x_n\}$,$x_n\to x$,使得 $F_n(x_n)\to F(x)$。因为 $z\in F(x)+C$,所以存在 $y\in F(x)$,使得 $z-y\in C$。令 $e\in C,e=z-y$,则

$$y=z-e \tag{1}$$

因为 $y\in F(x)$,$F_n(x_n)\to F(x)$,所以存在 $y_n\in F_n(x_n)$,使得 $y_n\to y$。由式(1)可知 $y_n\to z-e$,从而有 $y_n+e\to z$。令 $z_n=y_n+e$,则有 $z_n\in F_n(x_n)+C$ 且 $z_n\to z$。综上可知,存在$(x_n,z_n)\in\operatorname{epi} F_n$,$(x_n,z_n)\to(x,z)$。因此$(x,z)\in\lim_n\inf\operatorname{epi} F_n$。

下证 $\lim_n\sup\operatorname{epi} F_n\subset\operatorname{epi} F$。任取$(x,r)\in\lim_n\sup\operatorname{epi} F_n$,则存在 $\operatorname{epi} F_{n_k}$ 中的序列$\{(x_{n_k},r_{n_k})\}$,使得$(x_{n_k},r_{n_k})\to(x,r)$。由定义 7 中 3)可知,对任意 $\varepsilon\in\operatorname{int} C$,存在 $k_\varepsilon\in\mathbf{N}$,使得 $F_{n_k}(x_{n_k})\subset F(x)-\varepsilon+\operatorname{int} C$,$\forall n_k\geqslant k_\varepsilon$。因为$(x_{n_k},r_{n_k})\in\operatorname{epi} F_{n_k}$,即 $r_{n_k}\in F_{n_k}(x_{n_k})+C$,所以 $r_{n_k}\in F(x)-\varepsilon+C$。结合 $r_{n_k}\to r$ 和 $\varepsilon\in\operatorname{int} C$ 的任意性,可知 $r\in F(x)+C$。注意到 $x_{n_k}\in E_{n_k}$,又由 Γ_C 的收敛定义,可知 $E_{n_k}\xrightarrow{P.K.}E$,则 $x_{n_k}\to x\in E$。因此$(x,r)\in\operatorname{epi} F$。

注 4　根据性质 2 易知,Painlevé-Kuratowski 收敛弱于 Γ_C 收敛。

下面介绍几种凸性定义、回收锥定义及相关性质。

定义 8[13]　设 $E\subset R^m$ 为非空凸集,若 $F:E\to 2^{R^P}$ 为 C 凸集值映射,当且仅当对任意 $x,y\in E,\lambda\in[0,1]$,有

$$\lambda F(x)+(1-\lambda)F(y)\subset F(\lambda x+(1-\lambda)y)+C$$

定义 9[6]　设 E 为 R^m 上的子集,$F:E\to 2^{R^P}$ 为集值映射,对向量 $\alpha\in R^P$,F 在高度 α 下的子水平集 F^α 定义为

$$F^\alpha=\{x\in E:\alpha\in F(x)+C\}$$

定义 10[10]　设闭凸集 $E\subset R^m$,E 的回收锥集合定义为

$$0^+(E)=\{d\in R^m:x+td\in E,\ \forall x\in E,\ \forall t\geqslant 0\}$$

注 5　显然,若闭凸集 $E\subset R^m$,有 $0^+(E)=\{0\}$,当且仅当 E 为有界集。

引理 1[10]　设 $E,E_n\subset R^m$ 为闭凸集,假设 $E_n\xrightarrow{P.K.}E$,则有

$$\operatorname{HMin} E\subset\lim_n\inf\operatorname{HMin} E_n$$

引理 2　令 $E\subset R^m$ 是闭凸子集,$F:E\to R^m$ 是连续 C 凸映射,若对任意 $\alpha\in R^p$,当 $F^\alpha\neq\varnothing$时,有 $0^+(F^\alpha)=\{0\}$,则 $F(E)+C$ 为闭集。

证明　令序列$\{y_n\}\subset F(E)+C$ 且 $y_n\to y$,下证 $y\in F(E)+C$。因为$\{y_n\}\subset F(E)+C$,所以存在$\{x_n\}\subset E$,使得 $y_n\in F(x_n)+C$。又因为对任意 $\varepsilon\in\operatorname{int} C$,存在 $n_\varepsilon\in\mathbf{N}$,使得 $y+\varepsilon\in y_n+C,\ \forall n\geqslant n_\varepsilon$,所以 $y+\varepsilon\in F(x_n)+C,\ \forall n\geqslant n_\varepsilon$。由 α 的任意性,可知 $0^+(F^{y+\varepsilon})=0^+(F^\alpha)=\{0\}$。再结合注 5 可得 $F^{y+\varepsilon}$ 为有界集,故$\{x_n\}$收敛。不妨设 $x_n\to x$,因为 $y+\varepsilon\in F(x_n)+C$,所以存在 $\varepsilon'\in C$,使得 $y+\varepsilon-\varepsilon'\in F(x_n)$,从而$(x_n,y+\varepsilon-\varepsilon')\to(x,y+\varepsilon-\varepsilon')$。又因为 F 是连续映射,所以 $y+\varepsilon-\varepsilon'\in F(x)$,即 $y+\varepsilon\in F(x)+C$,结合 ε 的任意性,可知 $y\in F(x)+C$。因为 $x_n\in E$,E 为闭集,所以 E 中$\{x_n\}$的极限点 $x\in E$,从而 $y\in F(E)+C$,故 $F(E)+C$ 为闭集。

引理 3　若 F 为 R^m 中凸子集 E 上的连续 C 凸映射,则 $F(E)+C$ 为凸集。

证明　任取 $y_1,y_2\in F(E)+C,\lambda\in[0,1]$,则存在 $x_1\in E$,使得 $y_1\in F(x_1)+C$,存在 $x_2\in E$,使得 $y_2\in F(x_2)+C$,所以 $\lambda y_1+(1-\lambda)y_2\in\lambda F(x_1)+(1-\lambda)\times F(x_2)+C$。由 F 的 C 凸性,可知 $\lambda F(x_1)+(1-\lambda)\times F(x_2)\subset F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)+C$,因为 E 为凸集,所以 $\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\in E$,从而有 $\lambda y_1+(1-\lambda)y_2\in F(E)+C+C\subset F(E)+C$,所以 $\lambda y_1+(1-\lambda)y_2\in F(E)+C$,由

此可知 $F(E)+C$ 为凸集。

2 稳定性结果

本节在集值优化问题的可行域和目标映射均扰动的情况下,建立集值优化问题近似 Henig 真有效点的 Painlevé-Kuratowski 抗干扰性收敛性结果。

性质 3 设 $E,E_n\subset R^m(n\in\mathbf{N})$ 为非空闭凸集,且满足 $E_n\xrightarrow{P.K.}E$, $F_n:E_n\to 2^{R^P}$ 和 $F:E\to 2^{R^P}$ 为非空,C 凸集值映射满足 $F_n\xrightarrow{P.K.}F$。此外,对某个 $\alpha\in R^m$, $F^\alpha\neq\varnothing$,有 $0^+(F^\alpha)=\{0\}$,则对任意 $r>0$ 和任意 $\alpha\in R^m$,满足 $F^\alpha\neq\varnothing$,存在 $k_r\in\mathbf{N}$,使得

$$F_n^\alpha\subset F^\alpha+B(0,r),\ \forall n>k_r \tag{2}$$

其中,$B(0,r)$ 表示以 0 为球心,r 为半径的球。

证明 反证法:假设存在 $r>0,\alpha\in R^m$,满足 $F^\alpha\neq\varnothing$,且对任意 $k_r\in\mathbf{N}$,存在 $n_k\geqslant k_r$ 使得 $F_{n_k}^\alpha\not\subset F^\alpha+B(0,r)$,即对任意 $k_r\in\mathbf{N}$,存在 $x_{n_k}\in F_{n_k}^\alpha$,使得

$$d(x_{n_k},F^\alpha)>r \tag{3}$$

当 $\{x_{n_k}\}$ 有界时,不失一般性,设 $x_{n_k}\to x_0$,由 $x_{n_k}\in F_{n_k}^\alpha$ 可知 $(x_{n_k},\alpha)\in\operatorname{epi}F_{n_k}$ 且 $(x_{n_k},\alpha)\to(x_0,\alpha)$。又由 $F_{n_k}\xrightarrow{P.K.}F$ 可知 $(x_0,\alpha)\in\operatorname{epi}F$,即 $x_0\in F^\alpha$。这与式(3)相矛盾。

当 $\{x_{n_k}\}$ 无界时,不妨设(如果有必要可选择合适的子序列) $\|x_{n_k}\|\to\infty$。设对任意 $t\geqslant 0$,有 $\frac{t}{\|x_{n_k}\|}x_{n_k}\to td$,其中 d 为 R^m 中的单位向量。假设 $x_0'\in E$,因为 $E_n\xrightarrow{P.K.}E$,故存在 $x_{n_k}'\in E_{n_k}$,使得 $x_{n_k}'\to x_0'$。如果有必要可选择合适的子序列,可得 $(1-\frac{t}{\|x_{n_k}\|})x_{n_k}'+\frac{t}{\|x_{n_k}\|}x_{n_k}\to x_0'+td$。又因为 $E_n\xrightarrow{P.K.}E$,且 E 为凸集,所以 $x_0'+td\in E$。假设 $x'\in F^\alpha$,则有 $\alpha\in F(x')+C$。令 $y'\in F(x')$ 满足

$$\alpha\in y'+C \tag{4}$$

由 $F_n\xrightarrow{P.K.}F$ 可知,存在 $\operatorname{epi}F_{n_k}$ 中子序列 $\{(x_{n_k}',\gamma_{n_k})\}$ 使得 $(x_{n_k}',\gamma_{n_k})\to(x',y')$。如果有必要可选择合适的子序列,假设

$$\left(1-\frac{t}{\|x_{n_k}\|}\right)x_{n_k}'+\frac{t}{\|x_{n_k}\|}x_{n_k}\to x'+td \tag{5}$$

其中,$t>0$,d 为 R^m 中的单位向量。因为 $\gamma_{n_k}\to y'$,所以对任意 $\varepsilon\in\operatorname{int}C$,存在 $k_\varepsilon\in\mathbf{N}$,使得 $\gamma_{n_k}\in y'+\varepsilon-C$, $\forall k>k_\varepsilon$。注意到 $\gamma_{n_k}\in F_{n_k}(x_{n_k}')+C$,因此 $y'\in F_{n_k}(x_{n_k}')-\varepsilon+C$。此外,由式(4)可知,$\alpha\in F_{n_k}(x_{n_k}')-\varepsilon+C$。结合 $x_{n_k}\in F_{n_k}^\alpha$ 和 $F_n(n\in\mathbf{N})$ 的 C 凸性,可知

$$\alpha+\varepsilon-\frac{t}{\|x_{n_k}\|}\varepsilon\in\alpha+\left(1-\frac{t}{\|x_{n_k}\|}\right)\varepsilon+C\subset$$

$$\left(1-\frac{t}{\|x_{n_k}\|}\right)(\alpha+\varepsilon+C)+\frac{t}{\|x_{n_k}\|}(\alpha+C)\subset$$

$$\left(1-\frac{t}{\|x_{n_k}\|}\right)(F_{n_k}(x_{n_k}')-\varepsilon+C+\varepsilon+C)+\frac{t}{\|x_{n_k}\|}F_{n_k}(x_{n_k})+C\subset$$

$$\left(1-\frac{t}{\|x_{n_k}\|}\right)F_{n_k}(x_{n_k}')+\frac{t}{\|x_{n_k}\|}F_{n_k}(x_{n_k})+C\subset$$

$$F_{n_k}\left((1-\frac{t}{\|x_{n_k}\|})x_{n_k}'+\frac{t}{\|x_{n_k}\|}x_{n_k}\right)+C$$

令 $G_n(\cdot)=F_n(\cdot)+\frac{t}{\|x_n\|}\varepsilon$,则有 $(1-\frac{t}{\|x_{n_k}\|})\times x_{n_k}'+\frac{t}{\|x_{n_k}\|}x_{n_k}\in G_{n_k}^{\alpha+\varepsilon}$。由文献[6,引理 3.3]可知 $G_n\xrightarrow{P.K.}F$。又由文献[6,引理 3.2]可知 $\lim_n\sup G_n^{\alpha+\varepsilon}\subset F^{\alpha+\varepsilon}$,结合式(5),有 $x'+td\in F^{\alpha+\varepsilon}$。又由 ε 的任意性,可知 $x'+td\in F^\alpha$,这与 $0^+(F^\alpha)=\{0\}$ 相矛盾。

综上所述,式(2)成立。

性质 4 假设性质 3 的所有条件都满足,则对 n 充分大,$F_n^\alpha\neq\varnothing$,有 $0^+(F_n^\alpha)=\{0\}$。

证明 反证法:假设对某个 $\alpha\in R^m$,当 n 充分大,$F_n^\alpha\neq\varnothing$ 时,有 $0^+(F_n^\alpha)\neq\{0\}$,则存在子序列 $\{d_k\}\subset 0^+(F_{n_k}^\alpha)$,使得 $d_k\to d$,其中 d 是 R^m 中的单位向量。任取 $x\in E,\beta\in F(x)$,则 $F^\beta\neq\varnothing$。因为 $\operatorname{int}C\neq\varnothing$,所以存在 $\varepsilon'\in\operatorname{int}C,\lambda>0$,使得 $\lambda\varepsilon'\in\alpha+C$ 且 $\lambda\varepsilon'\in\beta+C$。令 $\gamma=\lambda\varepsilon'$,则有 $\gamma\in\alpha+C$ 且 $\gamma\in\beta+C$。由此可知 $\gamma\in F(x)+C$,则 $x\in F^\gamma\neq\varnothing$。因为 $F_n\xrightarrow{P.K.}F$,则存在子序列 $\{(x_k,\gamma_k)\}$,使得

$$(x_k,\gamma_k)\to(x,\gamma) \tag{6}$$

其中,$x_k\in E_{n_k}$ 且

$$\gamma_k\in F_{n_k}(x_k)+C \tag{7}$$

由式(6)可知 $\gamma_k\to\gamma$,并对任意 $\varepsilon\in\operatorname{int}C$,存在 $k_\varepsilon\in\mathbf{N}$,使得

$$\gamma+\varepsilon\in\gamma_k+C,\ \forall k>k_\varepsilon \tag{8}$$

又由式(7)和式(8),可得

$$\gamma+\varepsilon\in F_{n_k}(x_k)+C,\ \forall k>k_\varepsilon$$

即当 k 充分大时,有

$$x_k\in F_{n_k}^{\gamma+\varepsilon} \tag{9}$$

又已知 $x_k \in F_{n_k}^{\alpha}$,所以 $0^+(F_{n_k}^{\alpha}) \subset 0^+(F_{n_k}^{\gamma+\varepsilon})$,从而有 $d_k \in 0^+(F_{n_k}^{\gamma+\varepsilon})$。由式(9)可推知,当 k 充分大时,$x_k+ud_k \in F_{n_k}^{\gamma+\varepsilon}, \forall u \geqslant 0$。因为 $F_n \xrightarrow{P.K.} F$,则 $x_k+ud_k \to x+ud \in F^{\gamma+\varepsilon}, \forall u \geqslant 0$,这与 $0^+(F^{\gamma+\varepsilon})=\{0\}$,矛盾。故当 n 充分大时,$0^+(F_n^{\alpha})=\{0\}$。

性质 5　设 $E \subset R^m$ 为非空闭凸子集,$F:E \to 2^{R^P}$ 为 E 上的 C 凸集值映射且 epi F 为闭集,则以下命题等价:

1) $\alpha \in R^m$,当 $F^{\alpha} \neq \varnothing$ 时,$0^+(F^{\alpha})=\{0\}$;

2) $\alpha \in R^m$,当 $F^{\alpha} \neq \varnothing$ 时,F^{α} 有界。

证明　与文献[6,引理 3.6]证明类似,稍作修改即可得正。

性质 6　假设性质 3 的所有条件都满足,则 $F_n(E_n)+C \xrightarrow{P.K.} F(E)+C$。

证明　先证 $F(E)+C \subset \lim_n\inf(F_n(E_n)+C)$。令 $y \in F(E)+C$,则存在 $x \in E$,使得 $y \in F(x)+C$。因为 $F_n \xrightarrow{P.K.} F$,所以存在 epi F_n 中的序列$\{(x_n, y_n)\}$,使得 $(x_n, y_n) \to (x, y)$。这意味着 $y \in \lim_n\inf(F_n(E_n)+C)$。

下证$\lim_n\sup(F_n(E_n)+C) \subset F(E)+C$。令 $y \in \lim_n\sup(F_n(E_n)+C)$,因此存在 $F_{n_k}(E_{n_k})+C$ 中的子序列$\{y_{n_k}\}$,使得 $y_{n_k} \to y$。取 $x_{n_k} \in E_{n_k}$,使得 $y_{n_k} \in F_{n_k}(x_{n_k})+C$。注意到 $y_{n_k} \to y$,则对任意 $\varepsilon \in \text{int } C$,存在 $k_{\varepsilon} \in \mathbf{N}$,使得 $\gamma+\varepsilon \in \gamma_k+C, \forall k \geqslant k_{\varepsilon}$,故 $\gamma+\varepsilon \in F_{n_k}(x_{n_k})+C, \forall k \geqslant k_{\varepsilon}$,这意味着 $x_{n_k} \in F_{n_k}^{\gamma+\varepsilon}$。结合性质 3 和性质 5,可知$\{x_{n_k}\}$是有界的。如果有必要可选择合适的子序列,设 $x_{n_k} \to x \in E$,由 $F_n \xrightarrow{P.K.} F$,可得$(x_{n_k}, y_{n_k}) \to (x, y) \in$ epi F。由此可知,$y \in F(x)+C \subset F(E)+C$。

下面建立扰动集值优化问题 εe-近似 Henig 真有效点的稳定性结果。

定理 1　假设性质 3 的所有条件都满足,且 F_n 在 E_n 上连续,则 HMin $F(E) \subset \lim_n\inf$HMin $F_n(E_n)$。

证明　由性质 6 可知,$F_n(E_n)+C \xrightarrow{P.K.} F(E)+C$。因为 F_n 是 E_n 上连续 C 凸映射,结合引理 2 和引理 3 可知,当 n 充分大时,$F_n(E_n)+C$ 是闭凸集。又由引理 1 可得,εe-HMin$(F(E)+C) \subset \varepsilon e$-$\lim_n\inf$HMin$(F_n(E_n)+C)$。从而结合性质 1 可知,$\varepsilon e$-HMin $F(E) \subset \varepsilon e$-$\lim_n\inf$HMin $F_n(E_n)$。

3　结束语

受文献[13]的启发,将 Henig 真有效点推广到近似 Henig 真有效点,且将近似 Henig 真有效点的稳定性结果从向量优化问题推广到 C 凸集值优化问题的情形中。在扰动集值优化问题的问题数据 Painlevé-Kuratowski 收敛到目标集值优化问题的问题数据情况下,获得了集值优化问题近似 Henig 真有效点的抗干扰稳定性结果。该结果对数值计算分析中集值优化问题近似 Henig 真有效点的稳定性研究有着重要的理论价值。

参考文献(References):

[1] 孙祥凯,赵培,赵丹. 集值优化问题严格局部有效解的二阶最优性条件[J]. 重庆理工大学学报(自然科学版),2010,24(2):106—110.
SUN Xiang-kai, ZHAO Pei, ZHAO Dan. Second-order optimality conditions for strict local minimality in set-valued optimization [J]. Journal of Chongqing University of Technology (Natural Science Edition), 2010, 24(2): 106—110.

[2] 彭再云,杨新民,赵勇. 含参集值弱向量平衡问题解集映射的半连续性[J]. 数学学报,2013,56(3):391—400.
PENG Zai-yun, YANG Xin-min, ZHAO Yong. On the semicontinuity of the solution set map to parametric set-valued weak vector equilibrium problems [J]. Acta Mathematica Sinica, Chinese Series, 2013, 56(3): 391—400.

[3] 蒋敏,沈瑞,孟志青. 集值映射向量优化问题的精确罚函数镇定性和稳定性(英文)[J]. 应用数学,2018,31(3):498—504.
JIANG Min, SHEN Rui, MENG Zhi-qing. Calmness, stability and exact penalty function for vector optimization problems of set-valued maps[J]. Mathematica Applicata, 2018, 31(3): 498—504.

[4] LONG X J, PENG J W, PENG Z Y. Scalarization and point wise well posedness for set optimization problems [J]. Journal of Global Optimization, 2015, 62(4): 763—773.

[5] LI X B, PENG Z Y, LIN Z. Covergence results for Henig proper efficient solution set of vector optimization problems[J]. Numerical Functiomal Analysis and Optimization, 2014, 35(11): 1419—1434.

[6] ZENG J, LI S J, ZHANG W Y, et al. Hadamard well-posedness for a set-valued optimization problem [J]. Optimization Letters, 2013, 7(3): 559—573.

[7] LI S J, CHEN C R. Higher order optimality conditions for Henig efficient solutions in set-valued optimization[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2005, 323(2): 1184—1200.

[8] QIU Q S, YANG X M. Connectedness of Henig weakly

efficient solution set for set-valued optimization problems[J]. Journal of Optimization Theory and Applications,2012,152(2):439—449.
[9] LONG X J, HUANG Y Q, PENG Z Y. Optimality conditions for the Henig efficient solution of vector equilibrium problems with constraints[J]. Optimization Letters,2011,5(4):717—728.
[10] LUCCHETTI R E, MIGLIERINA E. Stability for convex vector optimization problems[J]. Optimization,2004,53(5—6):517—528.
[11] ZENG J,LI S J,ZHANG W Y,et al. Stability results for convex vector-valued optimization problems[J]. Positivity,2011,15(3):441—453.
[12] LI S J, ZHANG W Y. Hadamard well-posed vector optimization problems[J]. Journal of Global Optimization, 2010,46(3):33—393.
[13] LI X B, WANG Q L, LIN Z. Stability of set-valued optimization problems with naturally quasi-functions[J]. Jurnal of Optimization Theory and Applications, 2016, 168(3):850—863.
[14] OPPEZZI P,ROSSI A M. A convergence for vector-valued functions[J]. Optimization,2007,57(3):435—448.

Stability of Approximate Henig Proper Effective Point for Set-valued Optimization Problems

HU Rui-ting

(School of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

Abstract: Aiming at the set-valued optimization problem of approximate Henig proper effective point, we proposed to establish the stability results of the approximate Henig proper effective point for the C-convex set-valued optimization problem under the condition that the functions and feasible region of the objective set-valued optimization problems are perturbed. And the stability study of approximate Henig proper efficient points is extended from vector-valued optimization problems to set valued optimization problems. Firstly, we gave the concept of Γ_C convergence of set-valued function sequence, compared the relationship between the Painlevé-Kuratowski convergence and Γ_C convergence, and found that the Painlevé-Kuratowski convergence is weaker than Γ_C convergence. Secondly, we used the Painleve-Kuratowski convergence to establish the stability result of approximate Henig proper efficient points. We obtain the anti-interference stability results of the approximate Henig proper effective points for the set-valued optimization problem when the data of the disturbed set-valued optimization problem Painleve-Kuratowski converges to the data of the objective set-valued optimization problem. The results have an important theoretical value for the stability study of approximate Henig proper effective points of set-valued optimization problems in numerical calculation and analysis.

Key words: C-convex; approximate Henig proper efficient point; Painlevé-kuratowski convergence; stability

责任编辑:李翠薇

引用本文/Cite this paper:
胡瑞婷. 集值优化问题近似 Henig 真有效点的稳定性[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版),2022,39(2):53—58.
HU Rui-ting. Stability of approximate Henig proper effective point for set-valued optimization problems[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition),2022,39(2):53—58.