

doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2022.0001.001

# 基于事件触发的二阶多智能体时滞一致性

韩琦<sup>1</sup>, 王霞<sup>2</sup>, 王慧<sup>2</sup>, 袁艺云<sup>2</sup>, 曹瑞<sup>3</sup>, 翁腾飞<sup>3</sup>

(1. 重庆科技学院 智能技术与工程学院, 重庆 401331; 2. 重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331;  
3. 重庆科技学院 电气工程学院, 重庆 401331)

**摘要:** 为了使多智能体可以减少信息交流, 一致性问题在多智能系统的应用已被众多学者广泛研究, 从而避免通信资源和计算资源的浪费; 在有向拓扑图下, 针对二阶的领导-跟随非线性多智能体系统, 提出了一种基于事件触发机制和时滞一致性控制策略, 对于每一个智能体给出事件触发条件, 可以有效减少更新频率和系统能源的耗费; 通过利用 Lyapunov 稳定性理论、矩阵知识、不等式放缩以及图论知识, 得到了基于事件触发的二阶多智能体的系统在有领导者的情况下, 实现滞后的一致性条件, 随后也证明了相邻两次触发间隔大于零的这个结论, 从而相应地排除了事件触发中常见的在一点无限次触发而导致的 Zeno 行为; 最后, 通过数值仿真进一步验证了所提的理论和方法是正确和有效的。

**关键词:** 多智能体系统; 事件触发控制; 滞后同步; 非线性系统; 稳定性理论

**中图分类号:** O231

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1672-058X(2022)01-0001-08

## 0 引言

近些年来, 随着多智能体的协同控制在各个领域得到应用, 多智能体系统的协同控制受到了众多研究者的广泛关注<sup>[1-3]</sup>。其中研究得最多的就是一致性问题, 利用多智能体的一致性可以应用到编队控制、智能电网经济调度<sup>[4]</sup>等问题。在多智能体的系统控制中, 研究者多数是采用分布式控制协议, 与集中式协议相比, 分布式控制中单个个体设计简单, 且个别的智能体的失效不会影响全局, 最重要的是分布式控制拥有协作好、灵活性高、信息交流少、应用性强等优势<sup>[5]</sup>。

到目前为止, 多智能体一致性问题已经得到众

多学者的深入的研究, 文献[6]结合分布式事件触发机制考虑了一种带有容错性质的自适应一般线性多智能体系统。但是在很多研究中都会发现, 网络中的信息流通常不是即时的, 会存在时间的延迟。时滞一致性意味着跟随者的状态与领导者的相应状态有一段时间延迟。在以往的研究中, 针对时滞问题, 有很多研究者主要集中在对时滞下系统的收敛性<sup>[7]</sup>和一致性<sup>[8]</sup>加以讨论。且在存在时滞的系统中, 不同孤立群集中的智能体在不同时刻的状态都落后于它们的共同领导者, 从而避免了在容量受限网络上运行的多智能体系统的拥塞。为了确保系统时滞一致, 并在一定程度解决信息流拥塞问题。

基于以上的启发, 考虑事件触发机制作为信息传输策略。因为事件触发机制避免了控制器的连续

收稿日期: 2021-01-03; 修回日期: 2021-03-09.

基金项目: 重庆市教育委员会科学技术研究项目(KJZD-K201901504, KJQN201901537); 教育部人文社会科学研究(19YJCZH047)资助.

作者简介: 韩琦(1981—), 男, 山西晋中人, 副教授, 博士, 从事人工智能研究.

通讯作者: 王霞(1995—), 女, 重庆涪陵人, 硕士研究生, 从事多智能体一致性研究. Email: wangxia2960@163.com.

更新问题,不仅减少了网络中的数据量,而且延长了网络组件的使用寿命。现如今事件触发在很多领域得到利用,在文献[9]中研究了一种关于事件触发的双边非线性的二阶多智能体系统,该系统可利用事件触达到达竞争下多智能体分组的一致,增加了事件触发的范围。文献[10]考虑了关于事件触发中具有干扰的主动控制的多智能系统,并且该系统实现了一致性。综合时滞和事件触发这两方面,讨论具有事件触发的二阶领导-跟随多智能体时滞一致性问题。

主要贡献可归纳为如下方面:

(1) 考虑具有领导者的二阶非线性多智能体系统,通过设计一种关于时滞一致性的事件触发控制器,相比文献[11],有效结合事件触发机制,减少了不必要的计算,降低了成本。

(2) 针对触发控制协议,给出了相应的触发条件,和利用图论、矩阵理论和 Lyapunov 稳定性方法,给出了保证多智能体系统达到时滞一致的充分条件。最后利用微分方程理论和范数不等式理论,得到了本文设计的事件触发协议是可以避免 Zeno 行为。

## 1 预备知识

### 1.1 图论理论

用带有  $N$  个节点的有向图  $G = \{V, E, W\}$  表示由  $N$  个多智能体构成的多智能体系统。定义  $i, j = 1, 2, \dots, N$ , 那么其中  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_N\}$  表示为节点集,  $v_i$  表示第  $i$  个多智能体;  $E = \{e_{ij} = (v_i, v_j), v_i \neq v_j, \text{且 } v_i \in V, v_j \in V\} \subseteq V \times V$  代表边缘的集合, 相应的  $(v_i, v_j)$  表示节点  $v_i$  可以接受来自  $v_j$  的信息, 而且如果图  $G$  被称为强连通图, 则对于任意两个节点都存在有向路径来达到连通。 $W = (w_{ij})_{N \times N}$  表示节点与节点之间的邻接矩阵。如果  $(v_i, v_j) \in E, \forall v_i, v_j \in V$ , 则  $w_{ij} > 0$ , 否则  $w_{ij} = 0$ 。图  $G$  中的 Laplace 矩阵  $L = [l_{ij}] \in R^{N \times N}$  满足下列定义

$$l_{ii} = \begin{cases} \sum_{j \in N, j \neq i} w_{ij}, & i = j \\ -w_{ij}, & i \neq j \end{cases}$$

图  $G$  的度矩阵  $D = \text{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_N\}$ , 其中  $d_i = \sum_{j \in N_i} w_{ij}$ , 则  $L = D - W$ 。

### 1.2 符号标注

$I_N$  表示  $n$  维单位矩阵;  $\mathbf{1}_N = [1, 1, \dots, 1]^T \in R^n$ ;  $\|\cdot\|$  表示欧氏空间的欧氏距离; 矩阵的范数为  $\|A\| = \sup\{\|Ax\| : \|x\| = 1\}$ ;  $\otimes$  表示克罗内克积; 对于对称矩阵  $Y, Y > 0 (Y < 0)$ , 表示矩阵  $Y \in R^{n \times n}$  是正定矩阵(负定矩阵),  $\lambda_{\max}(Y)$  表示矩阵  $Y$  的最大特征值,  $\lambda_{\min}(Y)$  表示最小特征值。

### 1.3 问题描述

研究一个领导者和  $N$  个跟随者构成的二阶非线性多智能体系统, 其中领导者的系统形式描述如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_0(t) = v_0(t) \\ \dot{v}_0(t) = f(t, x_0(t), v_0(t)) \end{cases} \quad (1)$$

跟随者的系统形式:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = v_i(t) \\ \dot{v}_i(t) = f(t, x_i(t), v_i(t)) + u_i(t) \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2)$$

其中,  $x_i(t) \in R^n, v_i(t) \in R^n, u_i(t) \in R^n (i = 0, 1, 2, \dots, N)$  分别表示智能体  $i$  在时间  $t$  时的位移, 速度和控制输入, 并且  $f(t, x_i(t), v_i(t)) \in R^n$  是第  $i$  个智能体的非线性函数。

**定义 1** 在式(1)和式(2)中, 智能体的系统达到二阶领导-跟随时滞一致, 当且仅当对于任何初始状态, 满足

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_0(t - \tau)\| &= 0, i = 1, 2, \dots, N \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \|v_i(t) - v_0(t - \tau)\| &= 0, i = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

其中,  $\tau$  是正常数。

**假设 1** 存在非负常数  $\xi_1$  和  $\xi_2$ , 使得  $f(t, x_i(t), v_i(t))$  满足利普希茨条件

$$\|f(t, x, v) - f(t, y, z)\| \leq \xi_1 \|x - y\| + \xi_2 \|v - z\| \quad \forall x, y, v, z \in R^n, t \in [0, \infty)$$

**假设 2** 领导者和  $N$  个智能体之间至少存在一个有向的生成树, 且该网络拓扑图是一个连通图。

**引理 1**<sup>[21]</sup> 线性矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S^T(x) & R(x) \end{bmatrix} > 0$$

其中,  $Q(x) = Q^T(x), R(x) = R^T(x)$ , 上述不等式成立时, 可以转化为其中一个下面的等价条件:

$$(1) \quad Q(x) > 0, R(x) - S^T(x)Q^{-1}(x)S(x) > 0;$$

(2)  $\mathbf{R}(x) > 0, \mathbf{Q}(x) - \mathbf{S}(x)\mathbf{R}^{-1}(x)\mathbf{S}^T(x) > 0$ 。

**引理 2**<sup>[22]</sup> 如果矩阵  $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  是非奇异矩阵, 并且  $\mathbf{H}$  的非对角元素是非正数, 则下面叙述的结论互等价:

(1)  $\mathbf{H}$  是一个非奇异的  $M$ -矩阵;

(2)  $\mathbf{H}$  的所有特征值是在平面的右半平面, 意味着  $J(\mathbf{H}) > 0$ ;

(3) 存在一个正定的对角矩阵  $\mathbf{P} = \text{diag}\{p_1, p_2, \dots, p_N\} > 0$ , 使得有  $\mathbf{PH} + \mathbf{H}^T\mathbf{P} > 0$  成立。

基于事件触发控制定义(2)的控制协议如下

$$\begin{aligned} u_i(t) = & -\sigma \sum_{j=1}^N w_{ij} (x_i(t_k^i) - x_j(t_k^i) + v_i(t_k^i) - \\ & v_j(t_k^i)) - \sigma b_i [x_i(t_k^i) - x_0(t_k^i - \tau) + v_i(t_k^i) - \\ & v_0(t_k^i - \tau)], t \in [t_k^i, t_{k+1}^i) \end{aligned} \quad (3)$$

其中,  $\sigma > 0$  是控制增益,  $\tau$  是正常数。

设  $\varphi_i(t) = \sum_{j=1}^N w_{ij} [x_i(t) - x_j(t) + v_i(t) - v_j(t)] + b_i [x_i(t) - x_0(t - \tau) + v_i(t) - v_0(t - \tau)]$

定义触发误差为

$$e_i(t) = \varphi_i(t_k^i) - \varphi_i(t)$$

一致性误差分别是

$$\hat{x}_i(t) = x_i(t) - x_0(t - \tau) \text{ 和 } \hat{v}_i(t) = v_i(t) - v_0(t - \tau)$$

选择触发函数

$$g_i(t) = \|e_i(t)\| - \alpha \|\varphi_i(t_k^i)\| \quad (4)$$

其中,  $\alpha > 0$ 。如果  $g_i(t) \geq 0$ , 触发状态  $x_i(t_k^i)$  会更新到  $x_i(t_{k+1}^i)$ , 并且  $t_{k+1}^i$  满足下列等式:

$$t_{k+1}^i = \inf\{t | t > t_k^i; g_i(t) \geq 0\}, i = 1, 2, \dots, N, k \in \mathbf{N}$$

接下来结合一致性误差、事件触发误差和事件触发的控制改写系统式(1)和式(2)如下:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_i(t) = \hat{v}_i(t) \\ \dot{\hat{v}}_i(t) = f(t, x_i(t), v_i(t)) + \sigma e_i(t) - \\ f(t, x_0(t - \tau), v_0(t - \tau)) - \\ \sigma \sum_{j=1}^N w_{ij} (\hat{x}_j(t) + \hat{v}_j(t)) - \\ \sigma b_i (\hat{x}_i(t) + \hat{v}_i(t)) \end{cases} \quad (5)$$

令

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = [\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t), \dots, \hat{x}_N(t)]$$

$$\hat{\mathbf{v}}(t) = [\hat{v}_1(t), \hat{v}_2(t), \dots, \hat{v}_N(t)]$$

$$\mathbf{F}(t, \hat{\mathbf{x}}(t), \hat{\mathbf{v}}(t)) = f(t, x_i(t), v_i(t)) - f(t, x_0(t - \tau), v_0(t - \tau))$$

$$\mathbf{F}(t) = [\mathbf{F}^T(t, \hat{x}_1(t), \hat{v}_1(t)), \mathbf{F}^T(t, \hat{x}_2(t), \hat{v}_2(t)), \dots, \mathbf{F}^T(t, \hat{x}_N(t), \hat{v}_N(t))]^T$$

$\hat{\boldsymbol{\eta}}(t) = [\hat{\mathbf{x}}^T(t), \hat{\mathbf{v}}^T(t)]^T$  利用 Kroneck 乘积, 把式(5)改写为

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}(t) = & \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I}_N \\ -\sigma(\mathbf{L} + \mathbf{B}) & -\sigma(\mathbf{L} + \mathbf{B}) \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_N \hat{\boldsymbol{\eta}}(t) + \\ & \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_N e(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{F}(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## 2 主要结论

这部分运用矩阵理论来证明事件触发下的领导跟随者的时滞一致问题, 并排除 Zeno 行为。

**定理 1** 假设 1 和假设 2 成立, 根据事件触发函数式(4)和事件触发的控制式(3), 对于任意初始状态  $\tilde{\omega} \in C([- \tau, 0]; \mathbb{R}^{nN})$ , 系统式(1)和式(2)满足下面条件:

$$\mu > \frac{2\xi\lambda_{\max}(\mathbf{P})}{\lambda_{\min}(\mathbf{P}(\mathbf{L} + \mathbf{B}) + (\mathbf{L} + \mathbf{B})^T\mathbf{P})} = \frac{2\xi\lambda_{\max}(\mathbf{P})}{\lambda_{\min}(\mathbf{Q})}$$

则多智能体系统式(1)和式(2)可以实现领导跟随的滞后一致性。

**证明** 设定  $V$  函数如下:

$$V(t) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t) \\ \hat{\mathbf{v}}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sigma\mathbf{Q} \otimes \mathbf{I}_N & \mathbf{P} \otimes \mathbf{I}_N \\ \mathbf{P} \otimes \mathbf{I}_N & \mathbf{P} \otimes \mathbf{I}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t) \\ \hat{\mathbf{v}}(t) \end{bmatrix}$$

其中,  $\mathbf{Q} = \mathbf{P}(\mathbf{L} + \mathbf{B}) + (\mathbf{L} + \mathbf{B})^T\mathbf{P}$ 。

$V(t)$  对  $t$  求导有

$$\dot{V}(t) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t) \\ \hat{\mathbf{v}}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sigma\mathbf{Q} \otimes \mathbf{I}_N & \mathbf{P} \otimes \mathbf{I}_N \\ \mathbf{P} \otimes \mathbf{I}_N & \mathbf{P} \otimes \mathbf{I}_N \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I}_N \\ -\sigma(\mathbf{L} + \mathbf{B}) & -\sigma(\mathbf{L} + \mathbf{B}) \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_N \right\} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t) \\ \hat{\mathbf{v}}(t) \end{bmatrix} + \\ & \left[ \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma\mathbf{I}_N \otimes \mathbf{I}_N \end{bmatrix} e(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{F}(t) \end{bmatrix} \right] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t) \\ \hat{\mathbf{v}}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sigma\mathbf{Q} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P} & \mathbf{P} \end{bmatrix} \times \\ & \left\{ \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I}_N \\ -\sigma(\mathbf{L} + \mathbf{B}) & -\sigma(\mathbf{L} + \mathbf{B}) \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_N \right\} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t) \\ \hat{\mathbf{v}}(t) \end{bmatrix} + \\ & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t) \\ \hat{\mathbf{v}}(t) \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I}_N \\ -\sigma(\mathbf{L} + \mathbf{B}) & -\sigma(\mathbf{L} + \mathbf{B}) \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I}_N \right\} \times \\ & \begin{bmatrix} \sigma\mathbf{Q} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P} & \mathbf{P} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t) \\ \hat{\mathbf{v}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t) \\ \hat{\mathbf{v}}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sigma\mathbf{P} \otimes \mathbf{I}_N \\ \sigma\mathbf{P} \otimes \mathbf{I}_N \end{bmatrix} e(t) + \\ & \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t) \\ \hat{\mathbf{v}}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{P} \otimes \mathbf{I}_N \\ \mathbf{P} \otimes \mathbf{I}_N \end{bmatrix} \mathbf{F}(t) = \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{v}(t) \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} -\sigma Q & 0 \\ 0 & 2P - \sigma Q \end{bmatrix} \otimes I_N \right\} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{v}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{v}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sigma P \otimes I_N \\ \sigma P \otimes I_N \end{bmatrix} e(t) + \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{v}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P \otimes I_N \\ P \otimes I_N \end{bmatrix} F(t) \quad (6)$$

对于式(6)的最后一项有

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{v}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P \otimes I_N \\ P \otimes I_N \end{bmatrix} F(t) = \\ & \sum_{i=1}^N p_i ((\hat{x}_i(t) + \hat{v}_i(t))^T) F(t) \leq \\ & \sum_{i=1}^N p_i (\|\hat{x}_i(t)\| + \|\hat{v}_i(t)\|) (\|F(t)\|) \leq \\ & \sum_{i=1}^N p_i (\|\hat{x}_i(t)\| + \|\hat{v}_i(t)\|) (\xi_1 \|\hat{x}_i(t)\| + \\ & \xi_2 \|\hat{v}_i(t)\|) \leq \sum_{i=1}^N p_i (\xi_1 \|\hat{x}_i(t)\| + \\ & \xi_2 \|\hat{v}_i(t)\|)^2 + \xi_2 \|\hat{v}_i(t)\|^2 + \\ & \frac{\xi_1 + \xi_2}{2} (\|\hat{x}_i(t)\|^2 + \|\hat{v}_i(t)\|^2) = \\ & \sum_{i=1}^N p_i \left( \frac{3\xi_1 + \xi_2}{2} \|\hat{x}_i(t)\|^2 + \right. \\ & \left. \frac{\xi_1 + 3\xi_2}{2} \|\hat{v}_i(t)\|^2 \right) = \frac{3\xi_1 + \xi_2}{2} \hat{x}^T(t) (P \otimes I_N) \hat{x}(t) + \\ & \frac{\xi_1 + 3\xi_2}{2} \hat{v}^T(t) (P \otimes I_N) \hat{v}(t) \quad (7) \end{aligned}$$

根据等式(4)知道当系统触发时,也就是当  $t \in [t_k^i, t_{k+1}^i)$  时,有  $g_i(t) \leq 0$ ,故  $\|e_i(t)\| - \alpha \|\varphi_i(t_k^i)\| \leq 0$ ,即

$$\begin{aligned} & \|e_i(t)\| \leq \alpha \|\varphi_i(t_k^i)\| = \\ & \alpha \|\varphi_i(t) + e_i(t)\| \leq \end{aligned}$$

$$\alpha \|\varphi_i(t)\| + \alpha \|e_i(t)\|$$

又由于  $0 \leq \alpha < \frac{1}{3}$ ,则可以得到

$$\begin{aligned} & \|e_i(t)\| \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} \|\varphi_i(t)\| = \\ & \frac{\alpha}{1 - \alpha} \left\| \sum_{j=1}^N w_{ij} (x_j(t) - x_j(t) + v_i(t) - v_j(t)) + \right. \\ & \left. b_i (x_i(t) - x_0(t - \tau) + v_i(t) - v_0(t - \tau)) \right\| = \\ & \frac{\alpha}{1 - \alpha} \left\| \sum_{j=1}^N w_{ij} (\hat{x}_j(t) + \hat{v}_j(t)) + b_i (\hat{x}_i(t) + \hat{v}_i(t)) \right\| \end{aligned}$$

则对于式(6)的第二项有下列式子

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{v}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sigma P \otimes I_N \\ \sigma P \otimes I_N \end{bmatrix} e(t) = \\ & \sigma \sum_{i=1}^N p_i (\hat{x}_i(t) + \hat{v}_i(t))^T e_i(t) \leq \\ & \sigma \sum_{i=1}^N p_i \|\hat{x}_i(t) + \hat{v}_i(t)\| \|e_i(t)\| \leq \\ & \sigma \sum_{i=1}^N p_i \|\hat{x}_i(t) + \hat{v}_i(t)\| \times \\ & \left( \frac{\alpha}{1 - \alpha} \left\| \sum_{j=1}^N w_{ij} (\hat{x}_j(t) + \hat{v}_j(t)) + \right. \right. \\ & \left. \left. b_i (\hat{x}_i(t) + \hat{v}_i(t)) \right\| \right) \leq \\ & \frac{\sigma \alpha}{1 - \alpha} (\hat{x}(t) + \hat{v}(t))^T (P(L + B) \otimes \\ & I_N) (\hat{x}(t) + \hat{v}(t)) \leq \\ & \frac{2\sigma \alpha}{1 - \alpha} \hat{x}(t)^T (P(L + B) \otimes I_N) \hat{x}(t) + \\ & \frac{2\sigma \alpha}{1 - \alpha} \hat{v}(t)^T (P(L + B) \otimes I_N) \hat{v}(t) \quad (8) \end{aligned}$$

结合式(7)和式(8),代入  $\dot{V}(t)$  中,有

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) & \leq \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{v}(t) \end{bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} -\sigma Q & 0 \\ 0 & 2P - \sigma Q \end{bmatrix} \otimes I_N \right\} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{v}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{v}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{3\xi_1 + \xi_2}{2} (P \otimes I_N) & 0 \\ 0 & \frac{\xi_1 + 3\xi_2}{2} P \otimes I_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{v}(t) \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{v}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{2\sigma \alpha}{1 - \alpha} (P(L + B) \otimes I_N) & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma \alpha}{1 - \alpha} (P(L + B) \otimes I_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{v}(t) \end{bmatrix} = \\ & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{v}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{-\sigma(1 - 3\alpha)}{1 - \alpha} (Q \otimes I_N) + (3\xi_1 + \xi_2) (P \otimes I_N) & 0 \\ 0 & \frac{-\sigma(1 - 3\alpha)}{1 - \alpha} (Q \otimes I_N) + (2 + \xi_1 + 3\xi_2) (P \otimes I_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{v}(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{令 } \frac{-\sigma(1-3\alpha)}{1-\alpha} = -\mu,$$

$$\dot{V}(t) \leq \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{v}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -\mu(\mathbf{Q} \otimes \mathbf{I}_N) + 2\xi(\mathbf{P} \otimes \mathbf{I}_N) & 0 \\ 0 & -\mu(\mathbf{Q} \otimes \mathbf{I}_N) + 2\xi(\mathbf{P} \otimes \mathbf{I}_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(t) \\ \hat{v}(t) \end{bmatrix} \quad (9)$$

当  $\mu > \frac{2\xi\lambda_{\max}(\mathbf{P})}{\lambda_{\min}(\mathbf{P}(\mathbf{L}+\mathbf{B})+(\mathbf{L}+\mathbf{B})^T\mathbf{P})} = \frac{2\xi\lambda_{\max}(\mathbf{P})}{\lambda_{\min}(\mathbf{Q})}$ , 有  
 $-\mu(\mathbf{P}(\mathbf{L}+\mathbf{B})+(\mathbf{L}+\mathbf{B})^T\mathbf{P}) \otimes \mathbf{I}_N > 2\xi(\mathbf{P} \otimes \mathbf{I}_N)$   
 即  $-\mu(\mathbf{P}(\mathbf{L}+\mathbf{B})+(\mathbf{L}+\mathbf{B})^T\mathbf{P}) > 2\xi\mathbf{P}$ 。

从而  $\dot{V}(t) \leq 0$ , 且  $\dot{V}(t) = 0$ , 当且仅当  $\hat{x}(t) = 0$  和  $\hat{v}(t) = 0$ 。根据李雅普诺夫稳定性理论可以知道, 在  $\dot{V}(t) \leq 0$  时, 该系统是可以达到滞后一致性的。

**定理 2** 领导跟随多智能体系统式 (1) 和式 (2) 利用事件触发函数式 (4) 和控制式 (3) 达到时滞一致是可以排除 Zeno 行为的。

**证明**

$$D^+ \|e_i(t)\| \leq \|\dot{e}_i(t)\| = \|\dot{\phi}_i(t)\| = \left\| \sum_{j=1}^N w_{ij}(\dot{\hat{x}}_j(t) + \dot{\hat{v}}_j(t)) + b_i(\dot{\hat{x}}_i(t) + \dot{\hat{v}}_i(t)) \right\| =$$

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{j=1}^N w_{ij}(\hat{v}_j(t) + F(t, \hat{x}_j, \hat{v}_j) + \sigma\varphi_j(t_k^i)) + \right. \\ & \left. b_i(\hat{v}_i(t) + F(t, \hat{x}_i, \hat{v}_i) + \sigma\varphi_i(t_k^i)) \right\| = \\ & \left\| \sum_{j=1}^N w_{ij}\hat{v}_j(t) + b_i\hat{v}_i(t) + \sum_{j=1}^N w_{ij}F(t, \hat{x}_j, \hat{v}_j) + \right. \\ & \left. b_iF(t, \hat{x}_i, \hat{v}_i) + \sum_{j=1}^N w_{ij}\sigma\varphi_j(t_k^i) + b_i\sigma\varphi_i(t_k^i) \right\| \end{aligned}$$

令  $\Omega(t_k^i) = \sum_{j=1}^N w_{ij}\sigma\varphi_j(t_k^i) + b_i\sigma\varphi_i(t_k^i)$ , 故可以  
 写为

$$\begin{aligned} D^+ \|e_i(t)\| & \leq \left\| \sum_{j=1}^N w_{ij}\hat{v}_j(t) + b_i\hat{v}_i(t) + \Omega(t_k^i) + \right. \\ & \left. \sum_{j=1}^N w_{ij}F(t, \hat{x}_j, \hat{v}_j) + b_iF(t, \hat{x}_i, \hat{v}_i) \right\| \leq \\ & \left\| \sum_{j=1}^N w_{ij}\hat{v}_j(t) + b_i\hat{v}_i(t) \right\| + \|\Omega(t_k^i)\| + \\ & \left\| \sum_{j=1}^N w_{ij}F(t, \hat{x}_j, \hat{v}_j) + b_iF(t, \hat{x}_i, \hat{v}_i) \right\| \end{aligned}$$

所以,

$$D^+ \|e_i(t)\| \leq \|\dot{e}_i(t)\| \leq$$

且取  $\xi = \max\left\{\frac{(3\xi_1+\xi_2)}{2}, \frac{(1+\xi_1+3\xi_2)}{2}\right\}$ , 则有

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{L}+\mathbf{B}\| \|\hat{v}(t)\| + \|\mathbf{L}+\mathbf{B}\| \|\mathbf{F}(t)\| + \\ & \|\Omega(t_k^i)\| \leq \|\mathbf{L}+\mathbf{B}\| \|\hat{v}(t)\| + \|\mathbf{L}+\mathbf{B}\| \\ & (\xi_1 \|\hat{x}(t)\| + \xi_2 \|\hat{v}(t)\|) + \|\Omega(t_k^i)\| = \\ & \xi_1 \|\mathbf{L}+\mathbf{B}\| \|\hat{x}(t)\| + (\xi_2+1) \|\mathbf{L}+\mathbf{B}\| \|\hat{v}(t)\| + \\ & \|\Omega(t_k^i)\| \\ & \text{取 } \xi = \max\{\xi_1 \|\mathbf{L}+\mathbf{B}\|, (\xi_2+1) \|\mathbf{L}+\mathbf{B}\|\}, \text{ 则} \\ & \|\dot{e}_i(t)\| \leq \xi \|\hat{x}(t)\| + \xi \|\hat{v}(t)\| + \|\Omega(t_k^i)\| \leq \\ & 2\xi \|\boldsymbol{\eta}(t)\| + \|\Omega(t_k^i)\| \end{aligned} \quad (10)$$

又在式 (9) 中令, 有  $\Xi > 0$ , 可得

$$\Xi = \frac{1}{2} \times$$

$$\begin{bmatrix} \mu(\mathbf{Q} \otimes \mathbf{I}_N) - 2\xi(\mathbf{P} \otimes \mathbf{I}_N) & 0 \\ 0 & \mu(\mathbf{Q} \otimes \mathbf{I}_N) - 2\xi(\mathbf{P} \otimes \mathbf{I}_N) \end{bmatrix}$$

$$\dot{V}(t) \leq -[\hat{x}^T(t), \hat{v}^T(t)] \Xi [\hat{x}^T(t), \hat{v}^T(t)]^T。$$

故

$$\dot{V}(t) \leq -\lambda_{\min}(\Xi) [\hat{x}^T(t), \hat{v}^T(t)] [\hat{x}^T(t), \hat{v}^T(t)]^T = -\lambda_{\min}(\Xi) \boldsymbol{\eta}^T(t) \boldsymbol{\eta}(t)。$$

令

$$\boldsymbol{\Psi} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sigma(\mathbf{P}(\mathbf{L}+\mathbf{B})+(\mathbf{L}+\mathbf{B})^T\mathbf{P}) \otimes \mathbf{I}_N & \mathbf{P} \otimes \mathbf{I}_N \\ \mathbf{P} \otimes \mathbf{I}_N & \mathbf{P} \otimes \mathbf{I}_N \end{bmatrix}$$

有  $V(t) = \boldsymbol{\eta}(t) \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\eta}(t)$ 。

从而  $\lambda_{\min}(\boldsymbol{\Psi}) \boldsymbol{\eta}(t) \boldsymbol{\eta}(t) \leq V(t) \leq \lambda_{\max}(\boldsymbol{\Psi}) \boldsymbol{\eta}(t) \boldsymbol{\eta}(t)$

$\boldsymbol{\eta}(t)$ , 即  $\boldsymbol{\eta}(t) \boldsymbol{\eta}(t) \geq \frac{1}{\lambda_{\max}(\boldsymbol{\Psi})} V(t)$ 。

故有

$$\dot{V}(t) \leq -\lambda_{\min}(\Xi) \boldsymbol{\eta}(t) \boldsymbol{\eta}(t) \leq \frac{-\lambda_{\min}(\Xi)}{\lambda_{\max}(\boldsymbol{\Psi})} V(t) \quad (11)$$

通过求解微分方程式 (11) 可得:  $V(t) \leq V(t_0)$

$e^{\frac{-\lambda_{\min}(\Xi)}{\lambda_{\max}(\boldsymbol{\Psi})}(t-t_0)}$ , 所以有

$$\lambda_{\min}(\boldsymbol{\Psi}) \boldsymbol{\eta}(t) \boldsymbol{\eta}(t) \leq V(t) \leq V(t_0) e^{\frac{-\lambda_{\min}(\Xi)}{\lambda_{\max}(\boldsymbol{\Psi})}(t-t_0)}$$

$$\text{即 } \|\boldsymbol{\eta}(t)\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{\Psi})} V(t_0) e^{\frac{-\lambda_{\min}(\Xi)}{\lambda_{\max}(\boldsymbol{\Psi})}(t-t_0)},$$

$\eta(t) \rightarrow 0$ 。

故由式(10)有

$$\|\dot{e}_i(t)\| \leq 2\xi \sqrt{\frac{|V(t_0)|}{\lambda_{\min}(\Psi)}} e^{-\frac{\lambda_{\min}(\Xi)}{2\lambda_{\max}(\Psi)}(t-t_0)} + \|\Omega(t_k^i)\|$$

即

$$\|e_i(t)\| \leq -\frac{4\lambda_{\max}(\Psi)\xi}{\lambda_{\min}(\Xi)} \sqrt{\frac{|V(t_0)|}{\lambda_{\min}(\Psi)}} e^{-\frac{\lambda_{\min}(\Xi)}{2\lambda_{\max}(\Psi)}(t-t_0)} + \|\Omega(t_k^i)\| t$$

又由于在触发时  $e_i(t_k^i) = 0$ , 可得

$$\|e(t)\| \leq \frac{4\xi\lambda_{\max}(\Psi)}{\lambda_{\min}(\Xi)} \sqrt{\frac{|V(t_0)|}{\lambda_{\min}(\Psi)}} \times (e^{-\frac{\lambda_{\min}(\Xi)}{2\lambda_{\max}(\Psi)}(t_k^i-t_0)} - e^{-\frac{\lambda_{\min}(\Xi)}{2\lambda_{\max}(\Psi)}(t-t_0)}) + \|\Omega(t_k^i)\| (t-t_k^i)$$

从而对于触发常数  $t_{k+1}^i$ , 有

$$\|e_i(t_{k+1}^i)\| \leq \frac{4\xi\lambda_{\max}(\Psi)}{\lambda_{\min}(\Xi)} \sqrt{\frac{|V(t_0)|}{\lambda_{\min}(\Psi)}} \times (e^{-\frac{\lambda_{\min}(\Xi)}{2\lambda_{\max}(\Psi)}(t_k^i-t_0)} - e^{-\frac{\lambda_{\min}(\Xi)}{2\lambda_{\max}(\Psi)}(t_{k+1}^i-t_0)}) + \|\Omega(t_k^i)\| (t_{k+1}^i - t_k^i)$$

结合式(8)和  $\|e_i(t)\| \geq \alpha \|\varphi_i(t_k^i)\|$ , 得

$$\tau = t_{k+1}^i - t_k^i \geq \frac{1}{\|\Omega(t_k^i)\|} \left\{ \alpha \|\varphi(t_k^i)\| + \frac{4\xi\lambda_{\max}(\Psi)}{\lambda_{\min}(\Xi)} \times \sqrt{\frac{|V(t_0)|}{\lambda_{\min}(\Psi)}} (e^{-\frac{\lambda_{\min}(\Xi)}{2\lambda_{\max}(\Psi)}(t_{k+1}^i-t_0)} - e^{-\frac{\lambda_{\min}(\Xi)}{2\lambda_{\max}(\Psi)}(t_k^i-t_0)}) \right\}$$

且触发间隔  $\tau > 0$ , 故 Zeno 行为被排除。

### 3 实验仿真

考虑 4 个跟随者和一个领导者的非线性的二阶系统, 其中 0 表示领导者, 相应的跟随者网络拓扑如图 1 所示。

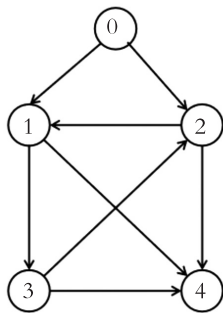


图 1 跟随者与领导者结构拓扑图

Fig. 1 Communication topology of leader-follower system

其中, Laplace 矩阵表示为

$$L = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

与领导者相连的邻接矩阵为  $B = \text{diag}(1, 1, 0, 0)$ , 对于系统式(1)和系统式(2)中领导者的初始值  $= -7$ ,  $v_0(0) = 1$ , 跟随者得到初始值为  $x(0) = [3 \ -2 \ 3 \ 0.3]$ ,  $v(0) = [6 \ -2 \ 2 \ 1]$ , 而其中的非线性函数分别为  $f(x_i, t) = 0.4v_i(t) + 0.1x_i(t)$ ,  $f(x_0, t) = 0.04v_i(t) + 0.01x_i(t)$ , 然后定理里面的参数设定为  $\xi_1 = 0.01$ ,  $\xi_2 = 0.01$ ,  $\tau = 5$  s 增益系数  $\alpha = 10$ , 矩阵  $P$  为单位矩阵。

从图 2 和图 3 可以看出, 4 个跟随者是可以和领导者达成滞同步一致的。而从图 4 可以得到, 每个智能体的误差曲线, 最后都会趋于 0, 说明跟随者会和领导者趋于一致。图 5 表明了智能体的控制变化趋势, 最后也是每个智能体都是当时间趋于无穷时控制趋于 0, 充分说明了智能体的时滞一致性。图 6 是每个跟随者的触发间隔, 从图中可以明显看出该触发事件是没有 Zeno 行为的。图 2—图 6 都有效说明理论的正确性。

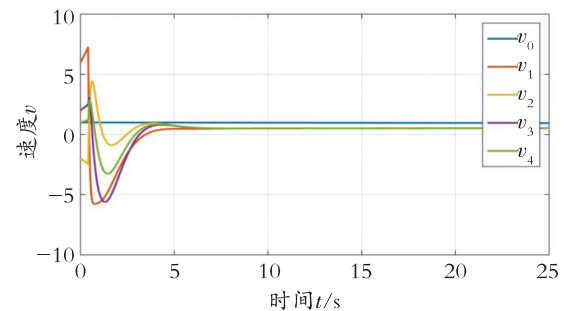


图 2 智能体速度变化轨迹图

Fig. 2 The velocity trajectory of agent

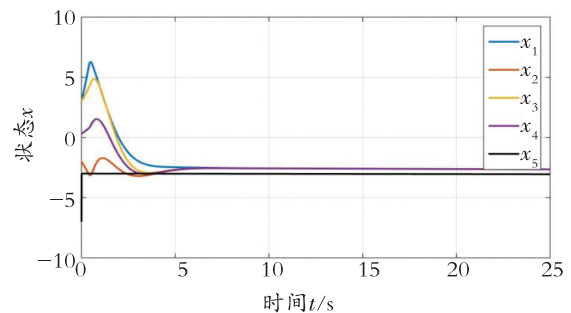


图 3 智能体的状态轨迹图

Fig. 3 The state trajectory of agent

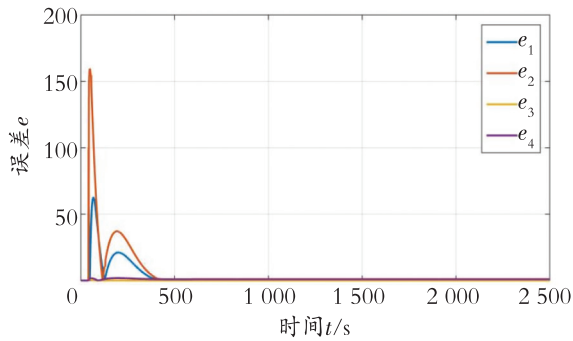


图4 跟随者的误差趋势变化

Fig. 4 Error trend of followers

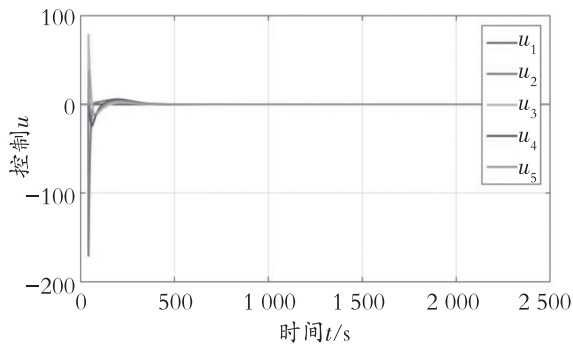


图5 智能体的控制输入变化趋势

Fig. 5 Control input trend of agent

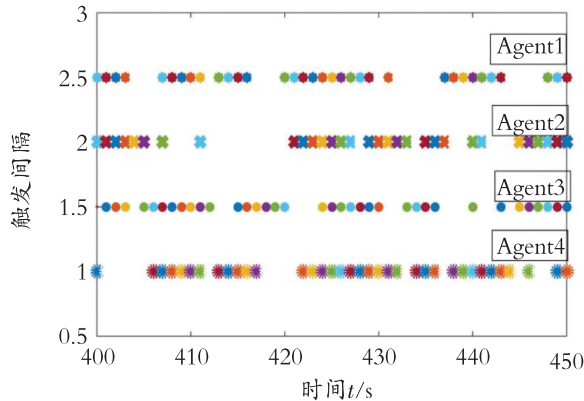


图6 跟随者触发间隔图

Fig. 6 Follower trigger interval graph

## 4 结束语

主要研究智能体的非线性动力学系统,考虑具有时滞效应的二阶领导—跟随多智能体的系统的时滞一致性。首先,结合事件触发机制给出一个基于局部信息的分布式控制协议;然后在这个协议下,运用 Lyapunov 稳定性理论,图论等相关知识导出该系统实现滞后一致性的充分条件;最后,数值模拟验证理论结果的正确性。

## 参考文献(References):

- [1] CHANG X, XIONG J, LI Z, et al. Quantized static output feedback control for discrete-time systems [J]. IEEE Transactions on Industrial, 2018, 14 (8): 3426—3435.
- [2] ZHANG L, YANG X, XU C, et al. Exponential synchronization of complex-valued complex networks with time-varying delays and stochastic perturbations via time-delayed impulsive control [J]. Appl Math Comput, 2017, 306: 22—30.
- [3] HUO X, MA L, ZHAO X D, et al. Observer-based fuzzy adaptive stabilization of uncertain switched stochastic nonlinear systems with input quantization [J]. Journal of the Franklin Institute, 2019, 356 (4): 1789—1809.
- [4] 谢洋, 王慧, 陈国荣, 等. 分布式优化在智能电网经济调度问题中的应用 [J]. 重庆工商大学学报(自然科学版), 2020, 37(2): 42—47.  
XIE Yang, WANG Hui, CHEN Guo-rong, et al. Application of distributed optimization method to economic dispatch in smart grid [J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition), 2020, 37(2): 42—47.
- [5] 楚天广, 杨正东, 邓魁英. 群体动力学与协调控制研究中的若干问题 [J]. 控制理论与应用, 2009, 27 (1): 86—93.  
CHU Tian-guang, YANG Zheng-dong, DENG Kui-ying. Some problems in the study of population dynamics and coordinated control [J]. Control Theory and Application, 2009, 27 (1): 86—93.
- [6] YE D, CHEN M M, YANG H J. Distributed adaptive event-triggered fault-tolerant consensus of multiagent system with general linear dynamics [J]. IEEE Trans Cybern, 2019, 49 (3): 757—767.
- [7] LIU N L, LIU C, LIU J. Fixed-time leader-following consensus for second-order multiagent systems with input delay [J]. IEEE Trans Ind Electron, 2017, 64 (11): 8635—8646.
- [8] WANG Y, MA Z. Lag consensus of the second-order leader-following multi-agent systems with nonlinear dynamics [J]. Neurocomputing, 2016, 171(1): 82—88.
- [9] REN J, SONG Q, LU G. Event-triggered bipartite leader-following consensus of second-order nonlinear multi-agent systems under signed digraph [J]. Journal of the Franklin Institute, 2019, 356 (12): 6591—6609.
- [10] 刘远山, 杨洪勇, 刘凡, 等. 事件触发下多智能体系统一致性的干扰主动控制 [J]. 控制理论与应用,

- 2020, (37): 69—977.
- LIU Yuan-shan, YANG Hong-yong, LIU Fan, et al. Disturbance active control of multi-agent system consensus under Eventtriggered [J]. Control Theory and Application, 2020, 37 (5): 69—97.
- [11] WANG Y, MA Z, ZHENG S, et al. Pinning control of lag consensus for second-order nonlinear multiagent systems[J]. IEEE Trans Cybern, 2017, 47 (8): 2203—2211.
- [12] Horn R A, Johnson C R. Topics in matrix analysis[M]. Cambridge: U K Cambridge Univ Press, 1991.
- [13] SONG Q, LIU F, CAO J D, et al. M-matrix strategies for pinning-controlled leader-following consensus in multiagent systems with nonlinear dynamics [J]. IEEE Trans Cybern, 2013, 43 (6): 1688—1697.

## Consensus of Second-order Multi-agent with Time-delay based on Event Trigger

**HAN Qi<sup>1</sup>, WANG Xia<sup>2</sup>, WANG Hui<sup>2</sup>, YUAN Yi-yun<sup>2</sup>,  
CAO Rui<sup>3</sup>, WENG Teng-fei<sup>3</sup>**

(1. School of Intelligent Technology and Engineering, Chongqing University of Science and Technology, Chongqing 401331, China; 2. School of Mathematical Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China; 3. School of Electrical Engineering, Chongqing University of Science and Technology, Chongqing 401331, China)

**Abstract:** The consensus problem in the application of multi-agent system has been widely studied by many scholars in order to reduce the information exchange of the multi-agent system and avoid the waste of communication resources and computing resources. Under the directed topology, according to the second-order leader-follower multi-agent system with nonlinear dynamics, a new event trigger mechanism and time-delay consensus control strategy is proposed. The event triggering condition is given for each agent, which can effectively reduce the update frequency and the energy consumption of the system. By using Lyapunov stability theory, matrix knowledge, inequality scaling and graph theory knowledge, the condition for realizing delay consensus under the background of second-order multi-agent system with leader based on event trigger is achieved. Then we prove that the interval between two adjacent triggers is bigger than zero, which eliminates the Zeno behavior caused by infinite triggering at one point. Finally, numerical simulation further verifies that the mentioned theory and method are correct and effective.

**Key words:** multi-agent system; event trigger control; lag synchronization; nonlinear system; stability theory

责任编辑:罗姗姗

---

引用本文/Cite this paper:

韩琦,王霞,王慧,等.基于事件触发的二阶多智能体时滞一致性[J].重庆工商大学学报(自然科学版),2022,39(1):1—8.  
HAN Qi, WANG Xia, WANG Hui, et al. Time-delay Consensus of Second-order Leader-following Multi-agent System with Nonlinear Dynamics via Event Trigger Protocol[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition), 2022, 39(1): 1—8.