第 38 卷第 6 期　　重庆工商大学学报(自然科学版)　　2021 年 12 月
Vol. 38　No. 6　　J Chongqing Technol & Business Univ(Nat Sci Ed)　　Dec. 2021

doi:10.16055/j. issn. 1672-058X. 2021. 0006. 013

广义集值映射 Nash 均衡点的存在性及 Levitin-Polyak 良定性*

刘　雷,林　志,彭再云,王衍程
(重庆交通大学 数学与统计学院,重庆 400074)

摘　要:针对以往集值映射 Nash 均衡点无约束的问题,提出了有约束条件下的广义集值映射 Nash 均衡点的概念,它以通常的 Nash 均衡点及 Loose Nash 均衡点为特例,首先,使用 KKM 定理的等价形式,得到了广义集值映射 Nash 均衡点的存在定理;其次,针对广义集值映射 Nash 均衡点的稳定性,通过定义 Levitin-Polyak 近似解序列,证明了 Levitin-Polyak 良定性的充分和必要条件,在此基础上,得到了广义集值映射 Nash 均衡点的 Levitin-Polyak 良定性结果;此外,通过给出实际例子,验证了广义集值映射 Nash 均衡点的存在性和 Levitin-Polyak 良定性结果,说明了大多数的广义集值映射 Nash 均衡点具有稳定的性质,同样,当其支付或可行约束对应映射退化为单值函数时,其存在结果和 Levitin-Polyak 良定性结果依然成立。

关键词:集值映射;Nash 均衡点;Levitin-Polyak 良定性

中图分类号:O357.41　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-058X(2021)06-0096-07

0　引　言

一般认为,1944 年 Morgenstern 等[1]书的出版,标志着系统化对策论的出现,他们主要研究了矩阵对策与合作对策。此后,在 1950 年[2]与 1951 年[3],Nash 在其基础上相继发表了关于非合作对策的两篇重要文章,引入了非合作对策均衡点的概念(即 Nash 均衡点),从而完善了现代非合作对策理论。其中,很多学者围绕 Nash 均衡点的存在性问题进行了大量研究,也取得了很多成果。经典对策问题的支付映射是单值的(一个数或一个向量)[4-6],然而,受客观条件和一些不确定因素的影响,要精确计算出其对应值很困难,甚至不可能,通常只能得到这个值的大概范围。此时,相应对策问题的支付映射就变成了一个集值映射。因此,研究带有集值支付映射的对策问题是非常必要且有实际意义的。

在此背景下,文献[7]在支付映射为集值的条件下,讨论了对策系统的 Loose Nash 均衡点的存在性;文献[8]在 Loose Nash 均衡点的基础上,重新刻画了支付映射为集值时对策系统 Nash 均衡点的定义,并证明了其存在性,但是其均不带约束条件,实际应用时具有一定的局限性,且均未讨论其均衡点的稳定性。

良定性(Well-posedness)是稳定性理论和数值分析中的一个重要概念。1966 年,Tykhonov[9]在近似解序列的基础上提出了无约束优化问题良定性的概念;在同一年,Levitin 等[10]将 Tykhonov 定义的良

收稿日期:2020-11-08;**修回日期**:2020-12-01.
* **基金项目**:国家自然科学基金资助项目(11301571)
作者简介:刘雷(1995—),男,四川泸州人,硕士研究生,从事优化理论研究.

定性推广到了带约束的优化问题中,人们分别称其为 Tykhonov 良定性和 Levitin-Polyak 良定性(简称为 LP 良定性)。近年来,有关带约束优化问题的 LP 良定性的研究愈加热门[11-14],但尚未有关于集值映射 Nash 均衡点的良定性分析。

本文将文献[8]中无约束集值映射的 Nash 均衡点,推广到了带约束的广义集值映射 Nash 均衡点,并证明了其存在性。它以通常的 Nash 均衡点[4-6]及集值映射的 Loose Nash 均衡点[7]为特例,应用更加广泛。此外,通过定义 LP 近似解序列,证明了 LP 良定性的充分和必要条件,并在此基础上,得到了广义集值映射 Nash 均衡点的 LP 良定性结果。

1　预备知识

定义 1　设 Y 是 Hausdorff 拓扑线性空间,$C\subset Y$ 是 Y 中的一个锥,C 为凸锥,当且仅当 $C+C=C$;C 为尖锥,当且仅当 $C\cap C=\{\theta\}$,其中 θ 是 Y 中的零元。

定义 2　设 Y 是 Hausdorff 拓扑线性空间,对集合 $A,B\subset Y$,数 $\alpha\in\mathbf{R}$,记 $A+B=\{a+b:a\in A,b\in B\}$,$\alpha A=\{\alpha a:a\in A\}$。

在本文中,除非特别说明,均定义如下:指标集 $I=\{1,2,\cdots,n\}$ 至少有两个元素,对任何 $i\in I$,X_i,Y_i 是 Hausdorff 拓扑线性空间,K_i是X_i中的一个非空紧凸子集,C_i是Y_i中的一个闭凸尖锥且 $\operatorname{int} C_i\neq\varnothing$,记

$$K=\prod_{i\in I}K_i,K_{-i}=\prod_{j\in I\setminus\{i\}}K_j,X=\prod_{i\in I}X_i$$

其中,积空间 X 是一个 Tychonoff 乘积空间,对每个 $x\in K$,记为 $x=(x_i,x_{-i})$。讨论下面广义集值映射 Nash 均衡问题:设指标集 I 是局中人集合,对每个局中人 $i\in I$,集值映射$F_i:K\to 2^{Y_i}$是局中人 i 的支付映射,集值映射$G_i:K_{-i}\to 2^{K_i}$是其可行约束对应映射,寻找

$$x^*=(x_i^*,x_{-i}^*)\in K,y^*\in\prod_{i\in I}F_i(x^*)\in\prod_{i\in I}2^{Y_i}$$

使得对每个 $i\in I$,$x_i^*\in G_i(x_{-i}^*)$,且有

$$(y_i^*-F_i(u_i,x_{-i}^*))\cap(-\operatorname{int} C_i)=\varnothing,\forall u_i\in G_i(x_{-i}^*)$$

则x^*被称为广义集值映射对策系统的一个 Nash 均衡点。一个广义集值映射的对策系统通常被表示为(SVNGP):$\Gamma=\{K_i,G_i,F_i\}_{i\in I}$。

注 1　上述定义的等价形式为寻找$x^*=(x_i^*,x_{-i}^*)\in K,y^*\in\prod_{i\in I}F_i(x^*)\in\prod_{i\in I}2^{Y_i}$,使得对每个 $i\in I$,均有$x_i^*\in G_i(x_{-i}^*)$,且有$y_i^*-z_i\notin -\operatorname{int} C_i$,$\forall z_i\in F_i(u_i,x_{-i}^*)$,$\forall u_i\in G_i(x_{-i}^*)$。

注 2　如果对每个 $i\in I$,$2^{Y_i}=\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$,且对任意 $x\in K$,$C_i=[0,+\infty]$,F_i为单值映射,$G_i(x_{-i}^*)=K_i$,此时上述定义中的x^*就是通常的 Nash 均衡点(见文献[4-6]等)。

注 3　在不带约束的情况下,此定义包含 Loose Nash 均衡点[7]作为一个特例,具体推论可见文献[8]。同样可证,当文献[8]中的锥$C_i(x^*)$为固定锥时,上述定义中的x^*也为文献[8]中的 Nash 均衡点。

定义 3　X 是一个 Hausdorff 拓扑空间,Y 是一个拓扑向量空间,K 是 X 中的一个非空子集,C 是 Y 中的一个闭凸尖锥,集值映射 $F:K\to 2^Y$。若对 Y 中零元 θ 的任何开零域 V,存在 x 在 K 中的开零域 $U(x)$,使得对任何$x'\in U(x)$,有 $F(x')\subset F(x)+V+C$,则称 F 在 x 处是上半 C-连续的;若 F 在 K 的每一点均是上半 C-连续的,则称 F 在 K 上是上半 C-连续的;若$-F$ 在 K 上是上半 C-连续的,则 F 在 K 上是上半$-C$ 连续的。

定义 4[8]　X 和 Y 为 Hausdorff 拓扑线性空间,K 是 X 中的一个非空子集,对任意 $x\in K$,称$F_i(\cdot,x_{-i}):K_i\to 2^{Y_i}$是$C_i$-广义拟凹的,如果对任意$y_i\in 2^{Y_i}$,集合$\{u_i\in X_i$:存在$z_i\in F_i(u_i,x_{-i}),z_i\in y_i+\operatorname{int} C_i\}$是凸集。

定义 5[15]　X 和 Y 是两个拓扑空间,K 是 X 中的一个非空子集,$F:K\to Y$ 是 K 到 Y 的一个集值映射,若对任意 $x\in K$,$F(x)$恒为 Y 的紧子集,则称 F 为紧值映射。

引理 1[15]　X 为拓扑空间,Y 为正则拓扑空间,K 是 X 中的一个非空子集,$F:K\to 2^Y$,若 F 在$x_0\in K$处上半连续且闭值,则对任意$x_n\to x_0$,对任意$y_n\in F(x_n)$且$y_n\to y_0$,有$y_0\in F(x_0)$。

引理 2[15] X 和 Y 为拓扑空间,K 是 X 中的一个非空子集,且 Y 满足第一可列公理,$F:K\to 2^Y$,若 F 在$x_0\in K$ 处下半连续,则对任意$x_n\to x_0$,对任意$y_0\in F(x_0)$,有n_0使对任意 $n\geqslant n_0$,存在$y_n\in F(x_n)$满足$y_n\to y_0$。

引理 3[7] 设 I 是一指标集,对每个 $i\in I$,K_i是 Hausdorff 拓扑线性空间X_i中的非空紧凸子集,A_i和H_i是从K_i到 $K=\prod_{i\in I}K_i$ 的集值映射(其中对任意$x_i\in K_i$,$A_i\subset H_i$),若对每个 $i\in I$,满足:

(i) H_i是紧值的;

(ii) 对任意 $x\in K$,集合$K_i\backslash A_i^{-1}(x)$是凸集,其中$A_i^{-1}(x)=\{u_i\in K_i:x\in A_i(u_i)\}$;

(iii)对任意 $x\in K$,$x_i\in A_i^{-1}(x)$。

则所有集合$H_i(x_i)(i\in I,x_i\in K_i)$有公共元素,即

$$\bigcap_{i\in I}\bigcap_{x_i\in K_i}H_i(x_i)\neq\varnothing$$

2 存在性及其证明

定理 1 设 I 是局中人的集合,对每个 $i\in I$,K_i是X_i中的非空紧凸子集,集值映射$F_i:K_i\to 2^{Y_i}$,集值映射$G_i:K_{-i}\to 2^{K_i}$。考虑广义集值映射的对策系统Γ,对$\forall i\in I$,如果

(i) $\forall x_{-i}\in K_{-i}$,$G_i(x_{-i})$是上半连续的且具非空凸紧值;

(ii) $\forall x\in K$,$F_i(\cdot,\cdot)$是上半连续的且具非空紧值;

(iii) $\forall x_{-i}\in K_{-i}$,$F_i(\cdot,x_{-i})$是C_i-广义拟凹的;

(iv) $\forall x\in K$,$F_i(u_i,\cdot)$是下半连续的;

(v) $\forall x\in K$,存在$y_i\in F_i(x)$,使$(y_i-F_i(x))\cap(-\text{int }C_i)=\varnothing$。

则广义集值映射的对策系统 Γ 至少存在一个 Nash 均衡点,即存在$x^*\in K$,$y^*\in\prod_{i\in I}F_i(x^*)$,使对每个 $i\in I$,$x_i^*\in G_i(x_{-i}^*)$,且有

$$(y_i^*-F_i(u_i,x_{-i}^*))\cap(-\text{int }C_i)=\varnothing$$
$$\forall u_i\in G_i(x_{-i}^*)$$

证明 对每个 $i\in I$,作映射$H_i:G_i(x_{-i})\to 2^{G_i(x_{-i})}$如下:

$H_i(u_i)=\{x_i\in G_i(x_{-i})$:存在$y_i\in F_i(x_i,x_{-i})$,使$(y_i-F_i(u_i,x_{-i}))\cap(-\text{int }C_i)=\varnothing\}$,$\forall u_i\in G_i(x_{-i})$。

(1) 由(v)知,对任意的$u_i\in G_i(x_{-i})$,$H_i(u_i)\neq\varnothing$。接下来,首先证明$H_i(u_i)$是闭集,设网$x^\alpha=(x_i^\alpha,x_{-i}^\alpha)\in H_i(u_i)$且$x^\alpha\to x^0\in G_i(x_{-i})$,则存在$y_i^\alpha\in F_i(x_i^\alpha)$,使

$$(y)_i^\alpha-F_i(u_i,x_{-i}^\alpha))\cap(-\text{int }C_i)=\varnothing$$

即有

$$(y)_i^\alpha-F_i(u_i,x_{-i}^\alpha))\subset 2^{Y_i}\backslash(-\text{int }C_i)$$

由于条件(i)及K_i是紧的,因此可知$G_i(x_{-i})$是紧的,又因为F_i是上半连续的,因此可知$\bigcup_{x_i\in G_i(x_{-i})}F_i(x_i,x_{-i})$是紧的,从而使得网$\{y_i^\alpha\}\subset\bigcup_{x_i\in G_i(x_{-i})}F_i(x_i,x_{-i})$有聚点$y_i^0\subset\bigcup_{x_i\in G_i(x_{-i})}F_i(x_i,x_{-i})$,不失一般性,可以假设$y_i^\alpha\to y_i^0$。由条件(ii)可得$y_i^0\in F_i(x_i^0,x_{-i}^0)$,又由于$F_i(u_i,\cdot)$下半连续,因此由引理 2 可得,对任意的$z_i\in F_i(u_i,x_{-i}^0)$,存在$z_i^\alpha\in F_i(u_i,x_{-i}^\alpha)$,使$z_i^\alpha\to z_i$,因为$y_i^\alpha-z_i^\alpha\in 2^{Y_i}\backslash(-\text{int }C_i)$,因此$y_i^0-z_i\in 2^{Y_i}\backslash(-\text{int }C_i)$,即

$$(y_i^0-F_i(u_i,x_{-i}^0))\cap(-\text{int }C_i)=\varnothing$$

因此$x^0\in H_i(u_i)$,从而$H_i(u_i)$是闭集当然也是紧集。

(2) 对任意的$x_i\in G_i(x_{-i})$,由条件(iii)有

$$G_i(x_{-i})\backslash H_i^{-1}(x_i)=\{u_i\in G_i(x_{-i}):u_i\notin H_i^{-1}(x_i)\}=$$
$$\{u_i\in G_i(x_{-i}):x_i\notin H_i(u_i)\}=$$
$$\{u_i\in G_i(x_{-i}):\forall y_i\in F_i(x_i,x_{-i}),$$
$$\exists z_i\in F_i(u_i,x_{-i}),z_i\in y_i+\text{int }C_i\}$$

是凸集。

(3) 由条件(v)可知,$x_i\in H_i^{-1}(x_i)$,故根据引理 3,有

$$\bigcap_{i\in I}\bigcap_{u_i\in G_i(x_{-i})}H_i(u_i)\neq\varnothing$$

取$x^*=(x_i^*,x_{-i}^*)\in\bigcap_{i\in I}\bigcap_{u_i\in G_i(x_{-i})}H_i(u_i)$,则对每个 $i\in I$,$x_i^*\in G_i(x_{-i}^*)$,$x_i^*\in H_i(u_i)$对任意的$u_i\in G_i(x_{-i})$成立,故存在$y^*\in F_i(x_i^*,x_{-i}^*)$,使对任意$z_i\in F_i(u_i,x_{-i}^*)$,有

$$y_i^*-z_i\notin-\text{int }C_i,\ \forall u_i\in G_i(x_{-i})$$

从而存在$y^*\in\prod_{i\in I}F_i(x_i^*,x_{-i}^*)$,使对每个 $i\in I$,x_i^*

$\in G_i(x_{-i}^*)$,且有

$$(y_i^*-F_i(u_i,x_{-i}^*))\cap(-\text{int }C_i)=\varnothing,\ \forall u_i\in G_i(x_{-i})$$

证毕。

注 4 当集值映射 F 简化为向量值函数时,应用上述定理 1,依然可得到广义向量对策系统解的存在性结果。

3 良定性及其证明

定义广义集值映射对策系统(SVNGP)的 Nash 均衡点的解集为 S,其中

$$S=\{x=(x_i,x_{-i})\in K:\forall i\in I,x_i\in G_i(x_{-i})\}$$

且存在 $y_i\in F_i(x_i,x_{-i})$,使 $y_i-z_i\notin -\text{int }C_i$,$\forall z_i\in F_i(u_i,x_{-i})$,$\forall u_i\in G_i(x_{-i})$。

定义 6 如果存在序列 $\{\varepsilon_n\}\subset R_+$ 且 $\varepsilon_n\to 0$,使得对每个 $i\in I$,$e_i\in\text{int }C_i$,$x_i^n\in G_i(x_{-i}^n)+\varepsilon_n$,且有

$$y_i^n-z_i^n+\varepsilon_n e_i\notin -\text{int }C_i$$

$$\forall z_i^n\in F_i(u_i,x_{-i}^*),\ \forall u_i^n\in G_i(x_{-i}^n)$$

则称序列 $\{x^n=(x_i^n,x_{-i}^n)\in K\}$ 为(SVNGP)的 LP 近似解序列。

定义 7 如果存在唯一的(SVNGP)解 x^*,且每一个近似解序列都收敛到 x^*,则称(SVNGP)为 LP 良定的;如果(SVNGP)的解集是一个集合且每一个近似解序列都有收敛子序列收敛到解集中的某点,则称(SVNGP)为广义 LP 良定的(简称为 GLP 良定的)。

注 5 如果(SVNGP)是 GLP 良定的,那么其解集一定是非空紧值的。

为了刻画良定性问题,下面引入(SVNGP)近似解集的概念:对 $\varepsilon\in R_+$,(SVNGP)的 LP 近似解集为

$$\widetilde{S}(\varepsilon)=\{x=(x_i,x_{-i})\in K:\forall i\in I,x_i\in G_i(x_{-i})+\varepsilon\}$$

且存在 $y_i\in F_i(x_i,x_{-i})$,使 $y_i-z_i+\varepsilon e_i\notin -\text{int }C_i$,$\forall z_i\in F_i(u_i,x_{-i})$,$\forall u_i\in G_i(x_{-i})$。

集值映射 $\widetilde{S}(\varepsilon):R_+\to 2^K\cup\{\varnothing\}$ 也被称为(SVNGP)的 LP 近似解映射。显然有 $\widetilde{S}(0)=S$,且对 $\varepsilon_1>\varepsilon_2>0$,有 $\widetilde{S}(\varepsilon_1)\supset\widetilde{S}(\varepsilon_2)\supset\widetilde{S}(0)$。

引理 4 对每个 $i\in I$,若集值映射 $G_i:K_{-i}\to 2^{K_i}$ 在 K_{-i} 上上半连续且具紧值,序列 $\{\varepsilon_n\}\subset R_+$,$\{x^n\}\subset K$,使得对每个 $i\in I$,有

$$x_i^n\in G_i(x_{-i}^n)+\varepsilon_n,x^n\to x^0,\varepsilon_n\to 0,n\to\infty$$

则对每个 $i\in I$,$x_i^0\in G_i(x_{-i}^0)$。

证明 假设上述结论不成立,则存在 $i_0\in I$,使得 $x_{i_0}^0\notin G_{i_0}(x_{-i_0}^0)$,即存在 $\varepsilon_0>0$,使得

$$(x_{i_0}^0+\varepsilon_0)\cap(G_{i_0}(x_{-i_0}^0)+\varepsilon_0)=\varnothing$$

对 $\varepsilon_0>0$,存在正整数 N_1,满足当 $n>N_1$ 时,有 $x_{i_0}^n\in x_{i_0}^0+\varepsilon_0$。对 $x_{-i_0}^0$,由于 G_i 上半连续且具紧值,故存在 $x_{-i_0}^0$ 的开邻域 $O(x_{-i_0}^0)$,使得当 $x'_{-i_0}\in O(x_{-i_0}^0)$ 时,有 $G_{i_0}(x'_{-i_0})\subset G_{i_0}(x_{-i_0}^0)+\frac{1}{2}\varepsilon_0$。因此存在正整数 $N_2>N_1$,当 $n>N_2$ 时,有 $G_{i_0}(x_{-i_0}^n)+\varepsilon_n\subset G_{i_0}(x_{-i_0}^n)+\frac{1}{2}\varepsilon_0\subset G_{i_0}(x_{-i_0}^0)+\varepsilon_0$,因此,当 $n>N_2$ 时,$x_{i_0}^n\notin G_{i_0}(x_{-i_0}^0)+\varepsilon_0$,即意味着 $x_{i_0}^n\notin G_{i_0}(x_{-i_0}^n)+\varepsilon_n$,矛盾,因此结论成立。

定理 2 考虑(SVNGP)$\Gamma=\{K_i,G_i,F_i\}_{i\in I}$,对每个 $i\in I$,如果

(i) $\forall x_{-i}\in K_{-i}$,$G_i(x_{-i})$ 是上半连续的且具非空凸紧值;

(ii) $\forall x\in K$,$F_i(\cdot,\cdot)$ 是连续的且具有非空紧值;

(iii) $\forall x_{-i}\in K_{-i}$,$F_i(\cdot,x_{-i})$ 是 C_i-广义拟凹的;

(iv) $\forall x\in K$,存在 $y_i\in F_i(x)$,使 $(y_i-F_i(x))\cap(-\text{int }C_i)=\varnothing$。

则 LP 近似解映射 $\widetilde{S}$ 在 0 处上半连续且具非空紧值。

证明 定理 1 意味着 $\widetilde{S}(0)=S\neq\varnothing$,接下来证明 $\widetilde{S}(0)=S\subset K$ 是紧的,即只需证 S 在 K 上是闭的。假设 $\{x\}^n\subset S$ 且当 $n\to\infty$ 时,$x^n\to x^0$。对每个 $i\in I$,由引理 1 及(i)可知 $x_i^0\in G_i(x_{-i}^0)$,若 $x^0\notin S$,则存在 $i_0\in I$,$u_{i_0}^0\in G_{i_0}(x_{-i_0}^0)$,存在 $z_i^0\in F_i(u_{i_0}^0,x_{-i_0}^0)$,使得对 $\forall y_i^0\in F_i(x_{i_0}^0,x_{-i_0}^0)$,均有

$$y_i^0-z_i^0\in -\text{int }C_{i_0}$$

则意味着存在 $\varepsilon_0>0$,使得

$$y_i^0-z_i^0+\varepsilon_0 e_i\in -\text{int }C_{i_0}$$

由引理 1 可知,存在$u_{i_0}^n\in G_{i_0}(x_{-i_0}^n)$,使得当 $n\to\infty$时,$u_{i_0}^n\to u_{i_0}^0$。由(ii)中的$F_i(\cdot,\cdot)$是连续的,可知$\varphi_i(x,u_i)=F_i(x_i,x_{-i})-F_i(u_i,x_{-i})$在 $K\times K_i$上是上半$-C_i$连续的。因此存在$(x^0,u_{i_0}^0)\in K\times K_{i_0}$的开邻域$O(x^0,u_{i0}^0)$,使得当$(x',u'_{i_0})\in O(x^0,u_{i_0}^0)$时,有

$$\varphi_{i_0}(x',u'_{i_0})\subset\varphi_{i_0}(x^0,u_{i_0}^0)+\varepsilon_0 e_i-C_{i_0}$$

因此,存在正整数 N,当 $n>N$ 时,有 $u_{i_0}^n\in G_{i_0}(x_{-i_0}^n)$且

$$\varphi_{i_0}(x^n,u_{i_0}^n)\subset\varphi_{i_0}(x^0,u_{i_0}^0)+\varepsilon_0 e_i-C_{i_0}$$

即存在正整数 N,当 $n>N$ 时,有$u_{i_0}^n\in G_{i_0}(x_{-i_0}^n)$,且存在$z_i^n\in F_i(u_{i_0}^n,x_{-i_0}^n)$,对所有$y_i^n\in F_i(x_{i_0}^n,x_{-i_0}^n)$,有

$$y_i^n-z_i^n\in y_i^0-z_i^0+\varepsilon_0 e_i-C_{i_0}\in-\text{int }C_{i_0}-C_{i_0}\in-\text{int }C_{i_0}$$

矛盾,因此$x^0\in S$,即$\widetilde{S}(0)=S\subset K$是紧的。

接下来证明$\widetilde{S}$在 0 处是上半连续的。若$\widetilde{S}$在 0 处不上半连续,由引理 1 可知,存在开集 $U\supset\widetilde{S}(0)=S$和收敛到 0 的序列$\{\varepsilon_n\}\subset R_+$,使得对所有的 n,$x^n\in\widetilde{S}(\varepsilon_n)\setminus U$。不失一般性,设$x^n\to x^0$,则有$x^0\notin U$,即$x^0\notin S$。由条件(i),可知对每个 $i\in I$,$x_i^0\in G_i(x_{-i}^0)$,因此存在$i_0\in I$,$u_{i_0}^0\in G_{i_0}(x_{-i_0}^0)$,存在$z_i^0\in F_i(u_{i_0}^0,x_{-i_0}^0)$,使得对$\forall\, y_i^0\in F_i(x_{i_0}^0,x_{-i_0}^0)$,均有

$$y_i^0-z_i^0\in-\text{int }C_{i_0}$$

即意味着存在$\varepsilon_0>0$,使得

$$y_i^0-z_i^0+\varepsilon_0 e_i\in-\text{int }C_{i_0}$$

又由引理 1 及条件(i)可知,存在 $u_{i_0}^n\in G_{i_0}(x_{-i_0}^n)$,使得当 $n\to\infty$时,$u_{i_0}^n\to u_{i_0}^0$。又由条件(ii)中$F_i(\cdot,\cdot)$是连续的,可知映射$\varphi_i(x,u_i)=F_i(x_i,x_{-i})-F_i(u_i,x_{-i})$在 $K\times K_i$上是上半$-C_i$连续的。因此存在$(x^0,u_{i_0}^0)\in K\times K_{i_0}$的开邻域 $O(x^0,u_{i_0}^0)$,使得当$(x',u'_{i_0})\in O(x^0,u_{i_0}^0)$时,对$\varepsilon_0>0$,有

$$\varphi_{i_0}(x',u'_{i_0})\subset\varphi_{i_0}(x^0,u_{i_0}^0)+\frac{1}{2}\varepsilon_0 e_i-C_{i_0}$$

因此,存在正整数 N,当 $n>N$ 时,有 $u_{i_0}^n\in G_{i_0}(x_{-i_0}^n)$,且

$$\varphi_{i_0}(x^n,u_{i_0}^n)+\varepsilon_n\subset\varphi_{i_0}(x^n,u_{i_0}^n)+\frac{1}{2}\varepsilon_0 e_i\subset\varphi_{i_0}(x^0,u_{i_0}^0)+\varepsilon_0 e_i-C_{i_0}$$

因此存在$z_i^n\in F_i(u_{i_0}^n,x_{-i_0}^n)$,对所有$y_i^n\in F_i(x_{i_0}^n,x_{-i_0}^n)$,有

$$y_i^n-z_i^n+\varepsilon_n e_i\in y_i^0-z_i^0+\varepsilon_0 e_i-C_{i_0}\in$$
$$-\text{int }C_{i_0}-C_{i_0}\in-\text{int }C_{i_0}$$

即$x^n\notin\widetilde{S}(\varepsilon_n)$,矛盾,证毕。

定理 3 (i)(SVNGP)是 GLP 良定的当且仅当 LP 近似解映射$\widetilde{S}$在 0 处上半连续且具非空紧值;

(ii)(SVNGP)是 LP 良定的当且仅当 LP 近似解映射$\widetilde{S}$在 0 处上半连续且$\widetilde{S}(0)$只具唯一解。

证明 (1) 显然任何近似解序列也是 LP 近似解序列。若(SVNGP)是 GLP 良定的,则$\widetilde{S}(0)=S$是非空且紧的,由引理 1 可知$\widetilde{S}$在 0 处是上半连续且具非空紧值的。

若$\widetilde{S}$在 0 处上半连续且具非空紧值,则每个 LP 近似解序列存在一个子序列收敛到$\widetilde{S}(0)=S$中的某点,即(SVNGP)是 GLP 良定的。

(2) 若(SVNGP)是 LP 良定的,则其是 GLP 良定的且 S 只有唯一解,由(1)知,$\widetilde{S}$在 0 处是上半连续且具非空紧值的。

若$\widetilde{S}$在 0 处是上半连续且具非空紧值,$\widetilde{S}(0)$是只具唯一解的,则由(1)可知(SVNGP)是 GLP 良定的且 S 是单值,即(SVNGP)是 LP 良定的。

由定理 2 及定理 3,即可得到(SVNGP)的 GLP 良定性。

定理 4 对(SVNGP),$\Gamma=\{K_i,G_i,F_i\}_{i\in I}$,假设定理 2 的条件(i)-(iv)全部满足,则(SVNGP)是 GLP 良定的。

证明 由定理 1 可知 $S=\varnothing$,由定理 1 可知$\widetilde{S}$在 0 处是上半连续且具非空紧值的,则由定理 3 即可得到(SVNGP)是 GLP 良定的。

例 1 设有两个局中人,$I=\{1,2\}$,设$2^Y=(-\infty,$

$+\infty)$, $K_1=K_2=[1,2]$,记 $K=K_1\times K_2$。对任意 $x\in K$, $C_i=[0,+\infty]$, $G_1(x_2)=[\frac{x_2+1}{2},2]$, $G_2(x_1)=[\frac{x_1+2}{2},2]$,对任意的 $(x_1,x_2)\in K$,取 $F_1(x_1,x_2)=[-4,\frac{1}{x_1}-x_2]$,取 $F_2(x_1,x_2)=[-4,\frac{1}{x_2}-x_1]$,容易验证:

(1) $G_1(x_2)$, $G_2(x_1)$ 在 $[1,2]$ 上均是连续且具非空凸紧值;

(2) $F_1(x_1,x_2)$, $F_2(x_1,x_2)$ 在 $[1,2]\times[1,2]$ 上均是连续的;

(3) 对任何 $x_2\in[1,2]$, $F_1(\cdot,x_2)$ 是 C_1-广义拟凹的, $x_1\in[1,2]$, $F_2(x_1,\cdot)$ 是 C_2-广义拟凹的;

(4) $\forall x_i\in[1,2]$, $i=1,2$,存在 $0\in F_i(x_1,x_2)$,使得 $(0-F_i(x_1,x_2))\cap(-\text{int }C_i)=\varnothing$。

定理 1 的条件均被满足,因此可使用定理 1 得出 Nash 均衡点的存在。事实上,从例子本身可知,点 $x^*=(x_1^*,x_2^*)=(1,1)\in K$ 即是对策系统 $\{K_1,K_2,G_1,G_2,F_1,F_2\}$ 的 Nash 均衡点,因为

(1) 存在 $0\in F_1(x^*)$,对 $i=1$ 时,任意的 $x_1\in G_1(x_2^*)$,均有

$$(0-F_1(x_1,x_2^*))\cap(-\text{int }C_1)\Rightarrow$$

$$(0-[-4,\frac{1}{x_1}-1])\cap(-\infty,0)=\varnothing$$

(2) 存在 $0\in F_2(x^*)$,对 $i=2$ 时,任意的 $x_2\in G_2(x_1^*)$,均有

$$(0-F_2(x_1^*,x_2))\cap(-\text{int }C_2)\Rightarrow$$

$$(0-[-4,\frac{1}{x_2}-1])\cap(-\infty,0)=\varnothing$$

同样定理 2 的条件均被满足,因此可使用定理 4 得出上述例子的 Nash 均衡点是 GLP 良定的。

注 6　当集值映射 F 简化为向量值函数时,应用上述定理 4,依然可得到广义向量对策系统解的良定性结果。

4　结论与讨论

本文讨论了带有约束条件的广义集值映射 Nash 均衡点的存在性与良定性的相关性质,其在支付映射或者约束对应映射具有非线性扰动或难以精确计算时也可适用。此外,证明了 Levitin-Polyak 良定性的充分和必要条件,在此基础上,得到了广义集值映射 Nash 均衡点的 Levitin-Polyak 良定性结果,得出了大多数情况下广义集值映射 Nash 均衡点具有良定性的稳定结论,进一步加强了其实际应用价值,丰富了其稳定性的研究内容。接下来,非紧性条件下的广义集值映射 Nash 均衡点的存在性及其他稳定性将是下一步的研究方向。

参考文献(References):

[1] MORGENSTERN O, VON N J. Theory of Games and Economic Behavior[M]. New Jersey:Princeton University Press, 1953

[2] NASH J F. Equilibrium Points in N-person Games[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 1950, 36(1): 48—49

[3] NASH J. Non-cooperative Games[J]. Annals of Mathematics, 1951,54(2): 286—295

[4] AUBIN J P. Optima and Equilibria: An Introduction to Nonlinear Analysis[J]. Graduate Texts in Mathematics, 1993,27(2):199—201

[5] TAN K K, YU J, YUAN X Z. Existence Theorems of Nash Equilibria for Non-cooperative N-person Games [J]. International Journal of Game Theory, 1995, 24(3): 217—222

[6] ZHI L. Essential Components of the Set of Weakly Pareto-Nash Equilibrium Points for Multiobjective Generalized Games in Two Different Topological Spaces[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2005,124:387—405

[7] GUILLERME J. Nash Equilibrium for Set-valued Maps[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1994, 187(3):705—715

[8] 罗群. 集值映射的 Nash 平衡点的存在定理[J]. 运筹学学报, 2003, 7(2): 77—83

LUO Q. Existence Theorems of Nash Equilibria for Set-valued Mappings[J]. Operations Research Transactions, 2003, 7(2): 77—83(in Chinese)

[9] TIKHONOV A N. On the Stability of the Functional Optimization Problem[J]. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, 1966, 6(4): 28—33

[10] LEVITIN E S, POLYAK B T. Convergence of Minimizing Sequences in Conditional Extremum Problems[J]. Russian Academy of Sciences, 1966, 168(5): 997—1000.

[11] CHATTERJEE P, LALITHA C S. Scalarization of Levitin-Polyak Well-posedness in Vector Optimization Using Weak Efficiency[J]. Optimization Letters, 2015, 9(2): 329—343

[12] KHOSHKHABAR A S, KHORRAM E. Scalarization of Levitin-Polyak Well-posed Set Optimization Problems[J]. Optimization, 2017, 66(1): 113—127

[13] VUI P T, ANH L Q, WANGKEEREE R. Levitin-Polyak Well-posedness for Set Optimization Problems Involving Set Order Relations[J]. Positivity, 2019, 23(3): 599—616

[14] KHOSHKHABAR A S. Characterizations of Generalized Levitin-Polyak Well-posed Set Optimization Problems[J]. Optimization Letters, 2019, 13(1): 147—161

[15] AUBIN J P, FRANKOWSKA H. Set-valued Analysis[M]. Dordrecht: Springer Science and Business Media, 2009

Existence and Levitin-Polyak Well-posedness of Generalized Nash Equilibria for Set-valued Mappings

LIU Lei, LIN Zhi, PENG Zai-yun, WANG Yan-cheng

(School of Mathematics and Statistics, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China)

Abstract: As the previous Nash equilibrium for set-valued mappings is unconstrained, in order to solve this problem, a concept of Generalized Nash equilibrium with constraints for set-valued mappings is proposed, which includes usual Nash equilibrium and Loose Nash equilibrium as special cases. Firstly, by using the equivalent form of KKM Theorem, the existence theorem of generalized Nash equilibria for set-valued mappings is obtained. Secondly, in order to discuss the stability of generalized Nash equilibria for set-valued mappings, the sufficient and necessary conditions of Levitin-Polyak well-posedness are proved by defining the Levitin-Polyak approximating sequence. On this basis, the results of Levitin-Polyak well-posedness of generalized Nash equilibria for set-valued mappings are obtained. In addition, the results of existence and Levitin-polyak well-posedness of generalized Nash equilibria for set-valued mappings are verified by practical examples. It is shown that the most of generalized Nash equilibria for set-valued mappings are stable. Similarly, when the mappings of corresponding degenerates to a singleton valued function, the results of existence and Levitin-Polyak well-posedness still hold.

Key words: set-valued mapping; Nash equilibrium point; Levitin-Polyak well-posedness

责任编辑:李翠薇

引用本文/Cite this paper:

刘雷,林志,彭再云,等.广义集值映射的Nash均衡点的存在性及Levitin-Polyak良定性[J].重庆工商大学学报(自然科学版),2021,38(6):96—102

LIU L, LIN Z, PENG Z Y, et al. Existence and Levitin-Polyak Well-posedness of Generalized Nash Equilibria for Set-valued Mappings[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition), 2021, 38(6): 96—102