

doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2021.0006.011

# 随机常微分方程的几种数值求解方法及其应用\*

李焕荣

(重庆工商大学 数学与统计学院,重庆 400067)

**摘要:**随机微分方程是概率论与确定性微分方程相结合的产物,与确定性微分方程精确解的求解相比,随机微分方程精确解的求解是十分困难的。于是针对近几十年来兴起的热门边缘学科——随机微分方程的求解方法,提出了求随机微分方程数值解的方法应用及比较。讨论了求解随机微分方程数值解的方法,即 Euler-Maruyama 方法、Milstein 方法和 Runge-Kutta 方法,并应用几个实例比较了在不同布朗运动影响下随机微分方程的精确解与确定性微分方程的精确解的不同之处,还比较了不同数值方法的求解结果及数值解与精确解的误差;编程图示结果表明:Milstein 方法和 Runge-Kutta 方法的数值解比 Euler-Maruyama 方法更接近真解,这些与理论分析是一致的,该结论对随机常微分方程数值求解理论方法的应用具有一定的指导意义。

**关键词:**随机常微分方程;数值方法;Euler-Maruyama 方法;Milstein 方法;Runge-Kutta 方法

**中图分类号:**G420

**文献标志码:**A

**文章编号:**1672-058X(2021)06-0082-07

## 0 引言

近十年以来,随机数学模型<sup>[1]</sup>的研究在很多欧美国家已经得到了高度重视和大力发展,吸引了大批应用数学家和计算数学家的关注,随机数学模型的数值求解方法<sup>[2-4]</sup>和理论分析也得到了快速的发展。目前,随机数学模型在美国已经成为最重要的应用数学和计算数学的研究方向之一。美国很多部门比如能源部、空军和国家实验室,均设立了专项基金来支持和发展随机数学模型的数值计算、理论分析和相关应用等研究工作。

随机常微分方程(Stochastic Ordinary Differential Equation, 简称为 SODE)是近几十年来才兴起的热门边缘学科,是概率论与常微分方程(Ordinary

Differential Equation, 简称为 ODE)相结合的产物,自日本数学家伊藤清<sup>[5]</sup>(Itô)先生于 20 世纪 40 年代创立随机积分(Itô 积分)以来,随机微分方程很快就被广泛应用到金融经济、自然科学和工程技术等很多领域,如股市预测、资料同化、油藏模拟、天气预测、流体动力学和生物遗传学等。汤涛院士等<sup>[1]</sup>从不确定性量化的角度讨论了随机数学模型的发展近况;Markos<sup>[2]</sup>讨论了随机相場模型 Allen-Cahn 的噪声正则性和相关计算;伊藤清<sup>[5]</sup>讨论了随机微分方程的推导以及它和确定性微分方程的关系。但求随机微分方程的精确解却是非常困难的,因此本文将讨论求解随机微分方程数值解(近似解)的方法,并应用实例验证比较几种数值方法的优劣。

先从一阶常微分方程解析解的求解出发,对比了常微分方程几种经典的数值求解方法:欧拉方法、

收稿日期:2020-10-28;修回日期:2020-11-30.

\* 基金项目:重庆市教委科技项目(KJ1400602,KJQN201800818);重庆工商大学教育教学改革研究项目(2019223).

作者简介:李焕荣(1979—),女,山东泰安人,博士,教授,硕士生导师,从事偏微分方程数值解的研究.

改进的欧拉方法、三阶 Runge-Kutta 公式和四阶 Runge-Kutta 公式,并举例编程可视化对比了精确解(或解析解)和相应的数值解;然后从 Itô 随机微分方程<sup>[5]</sup>的产生出发,举例图示对比了在不同布朗运动影响下的随机常微分方程精确解和相应的确定性(deterministic)常微分方程精确解的差别;最后给出了随机常微分方程的3种数值求解方法<sup>[6]</sup>: Euler-Maruyama 方法、Milstein 方法和 Runge-Kutta 方法,并举例图示对比了不同布朗运动下的3种数值方法的求解结果。

## 1 常微分方程的数值方法

先介绍常微分方程的解析解求解,再给出经典的数值求解方法。

### 1.1 解析解

17世纪末,牛顿划时代的巨著《自然哲学的数学原理》面世了,从此微分方程便诞生了。大多数数学家们一开始都努力去寻找微分方程的解析解(精确解),从而试图去解释由微分方程所描绘的物理规律和自然现象。数学家们在此方面也确实取得了一系列较成熟的成果,比如一阶常微分方程:

$$(1) \text{ 变量分离方程 } \frac{dy}{dx} = f(x)g(y);$$

$$(2) \text{ 线性微分方程 } \frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x);$$

$$(3) \text{ 恰当微分方程 } M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

还有二阶常系数线性微分方程:

$$L[x] \equiv \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = f(t)$$

都得到了较成熟的求解方法。

### 1.2 数值解法

但是,到了18世纪60年代,数学家们渐渐意识到绝大多数的微分方程是无法求得它们的解析解的,于是人们才逐渐认识到从另外一个角度来研究微分方程的解,即数值解,是十分有必要的。其中,瑞士数学家欧拉在数值求解方面就做出了开创性的工作。1768年,欧拉有关月球运行理论的著作出版了,创造了后来被广泛应用于求解常微分方程初值问题数值解的方法,即被人们后来称道的 Euler(欧

拉)方法。一阶常微分方程的欧拉方法主要有向前的欧拉方法:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

向后的欧拉方法:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

改进的欧拉方法:

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} [f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})] \end{cases}$$

其中,改进的欧拉方法在解决实际问题中最为常用。

Euler方法是求解常微分方程初值问题的最简单数值方法,但它的收敛阶偏低,向前和向后的欧拉方法仅仅一阶精度,改进的欧拉方法的精度虽然提高到了二阶,但对于更复杂的实际问题,二阶精度却还是不够的。于是,在1895年,德国数学家 Runge 在改进的欧拉方法基础上发表了《常微分方程数值解法》,此文章成了高精度数值求解常微分方程 Runge-Kutta 方法的开端,在常微分方程数值方法发展史上具有里程碑意义。Runge-Kutta 方法在创立之时并未达到完善,后来又经过大量数学家们多年的共同努力才逐渐完善成熟,目前常用的有三阶 Runge-Kutta 公式:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (k_1 + 4k_2 + k_3) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1) \\ k_3 = f(x_n + h, y_n - hk_1 + 2hk_2) \end{cases}$$

四阶 Runge-Kutta 公式:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1) \\ k_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2) \\ k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3) \end{cases}$$

关于其他的常微分方程数值解法,限于篇幅有限,就不在此赘述。

### 1.3 应用比较

下面分别用向前的欧拉方法、改进的欧拉方法、三阶 Runge-Kutta 公式和四阶 Runge-Kutta 公式数值求解下列方程:

$$\begin{cases} y' = x^3 y^3 - xy, & 0 \leq x \leq 1 \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

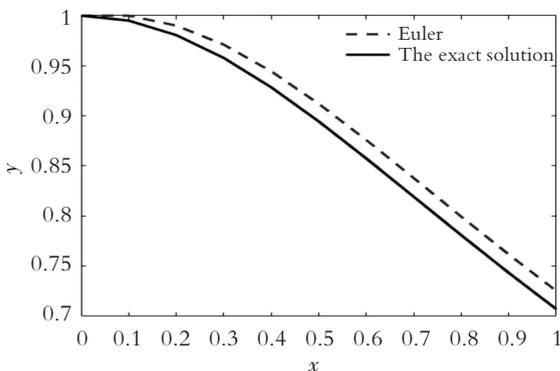
这是伯努力微分方程,通过变量变换可转化为非齐次线性微分方程,从而利用常数变易法可以得到方程的解为

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{ce^x + x^2 + 1}}$$

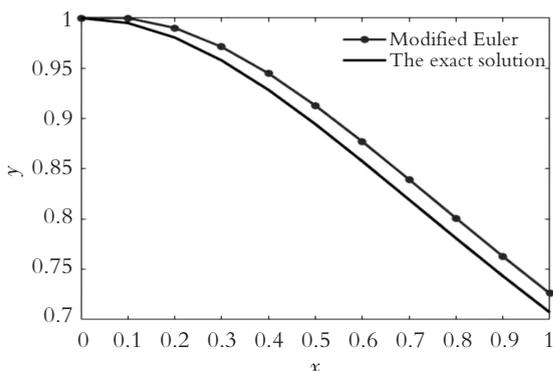
过点(0,1)的解,即满足初始条件的精确解为

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

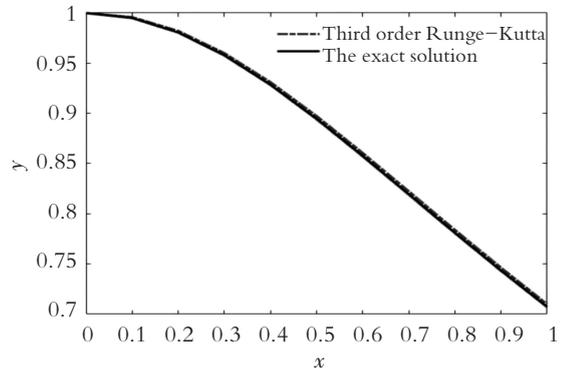
从图 1 的比较可以看出,用向前的欧拉方法(图 1(a))和改进的欧拉方法(图 1(b))求出的数值解与精确解(The exact solution)的误差较大,而用三阶 Runge-Kutta 公式(图 1(c))和四阶 Runge-Kutta 公式(图 1(d))求出的数值解与精确解的误差较小,尤其是四阶 Runge-Kutta 公式求出的数值解与精确解几乎是完全重合的(图 1(d)),这些数值结果与理论分析是完全一致的。



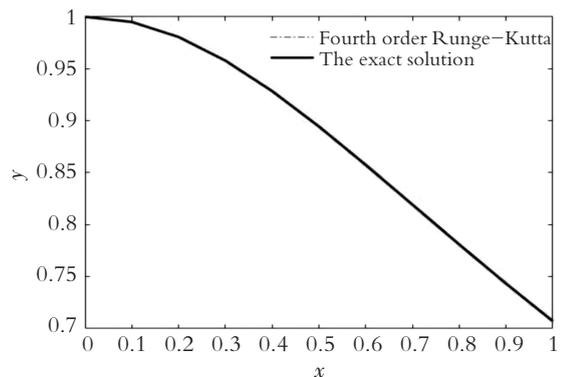
(a) 向前的欧拉方法



(b) 改进的欧拉方法



(c) 三阶 Runge-Kutta 公式方法



(d) 四阶 Runge-Kutta 公式方法

图 1 常微分方程的 4 种数值方法

Fig. 1 Four numerical methods of ordinary differential equation

## 2 随机微分方程

先来介绍 Itô 随机微分方程的产生,再来讨论在不同布朗运动影响下随机常微分方程和确定性常微分方程精确解的区别。

### 2.1 Itô 随机微分方程

当忽略掉一些比较次要的影响因素,用确定性微分方程<sup>[7-8]</sup>来试图描述自然现象的时候,实际上得到的解释是不完全准确的。目前,随着高速计算机的产生和对科学研究的深入,以及对自然现象描述解释准确度要求的提高,必须重新考虑那些曾经被忽略掉的随机因素。科学家们也逐渐认识到,随机因素不仅仅是对确定性模型存在缺陷的一个补充,很多情况下更是反映了物理规律和自然现象的内在本质。于是借助于概率论这一工具,科学家们将忽略掉的随机因素统一建模成随机变量,随机微分方程的理论研究和数值研究就势在必行了<sup>[1]</sup>。1951年,日本数学家 Itô 发表了影响整个数学界的

关于随机微分方程的学术论文,自此才有了对随机因素严格意义上的数学描述.

引入 Wiener 过程的定义<sup>[5]</sup>.

**定义 1** 如果一个实值随机过程  $W(\cdot)$  满足下列 3 个条件:

- 1)  $W(0) = 0$ ;
- 2) 对所有  $0 \leq s \leq t$ , 都有  $W(t) - W(s)$  服从分布  $N(0, t-s)$ ;
- 3) 对所有  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , 随机变量  $W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1})$  都是相互独立的, 则称随机过程  $W(\cdot)$  是 Wiener 过程.

尽管 Wiener 过程和实验相符,但它只是对真实布朗运动的理想化表述,和牛顿力学相距甚远.1930 年, Uhlenbeck 和 Ornstein 从牛顿力学的角度系统地解释和发展了布朗运动的动力学理论.

以  $y(t)$  表示作布朗运动的粒子在时刻  $t$  的速度,  $m$  表示粒子的质量. 根据牛顿定律,可以得到如下方程:

$$dy(t) = -\beta y(t) dt + \sigma dW(t) \quad (1)$$

这里,  $-\beta$  为漂移系数,  $\sigma$  为扩散系数,  $W(t)$  则是 Wiener 过程.

若已知初始速度  $y_0$ , 将式(1)写成如下积分方程形式:

$$y(t) = y_0 - \int_0^t \beta y(s) ds + \int_0^t \sigma dW(s)$$

当  $\sigma$  和  $-\beta y(t)$  均依赖于布朗运动的粒子速度及时间  $t$  时,就得到了如下的 Itô 随机积分方程:

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s)) ds + \int_0^t g(s, y(s)) dW(s)$$

将其写成微分形式:

$$dy(t) = f(t, y(t)) dt + g(t, y(t)) dW(t) \quad (2)$$

这就得到了 Itô 随机微分方程. 特别当  $g = 0$  时, 式(2)就退化为了常微分方程(此时只有给定的初始值  $y_0$  可以看作是随机的). 由此可见, Itô 随机微分方程可以说是确定性常微分方程的一个推广, 就是确定性常微分方程加上一个扰动项.

### 2.2 举例对比

下面举例来看在连续布朗运动的影响扰动下, Itô 随机常微分方程的精确解和相应的确定性常微分方程的精确解之间的关系和差别.

$$dy(t) = -ry(t) dt + \sigma y dW(t) \quad (3)$$

$$y(0) = 1$$

其中,  $r$  和  $\sigma$  为正常数, 在这里取  $r = \sigma = 1$ . 该随机微分方程其满足初始条件  $y(0) = 1$  的解析解为

$$y = e^{(-\frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}$$

随机微分方程(3)对应的确定性常微分方程为

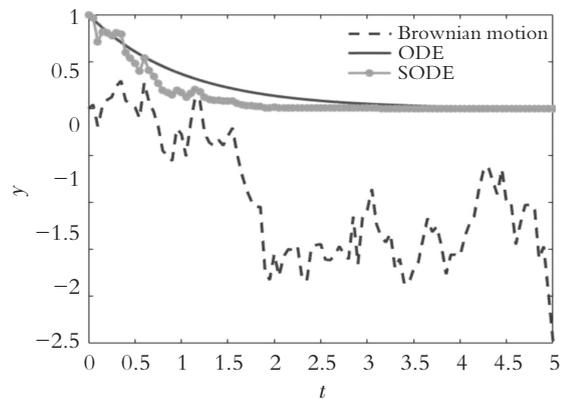
$$\frac{dy(t)}{dt} = -ry(t)$$

其满足初始条件  $y(0) = 1$  的解析解为

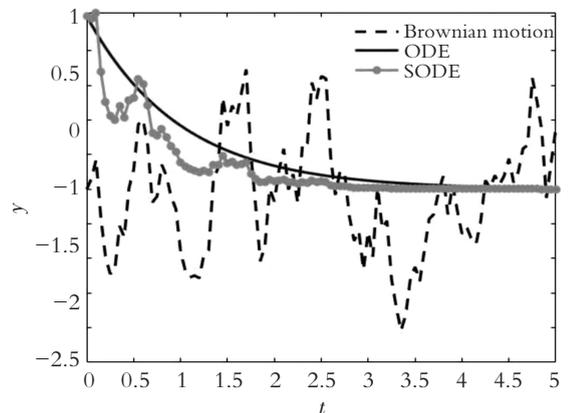
$$y = e^{-t}$$

是关于时间  $t$  的一条指数型曲线.

在图 2(a) 和 2(b) 中可以看到, 在连续的布朗运动(Brownian motion)即随机 Wiener 过程的影响下, 随机微分方程(SODE)的精确解在区间  $[0, 3]$  上, 偏离了相应的确定性常微分方程(ODE)的精确解, 受布朗运动(虚线)影响较大, 后面区间上影响较小.



(a) 布朗运动 1 的影响



(b) 布朗运动 2 的影响

图 2 Itô 随机常微分方程(SODE)和相应的确定性常微分方程(ODE)的精确解

Fig. 2 The exact solutions of stochastic ordinary differential equation and corresponding deterministic ordinary differential equation

### 3 随机微分方程的数值方法

在这一节重点介绍几种经典的求解随机微分方程的数值方法。

#### 3.1 几种数值方法

**Euler-Maruyama 方法**<sup>[6]</sup>:1955 年,Maruyama 首先使用欧拉(Euler)方法数值研究了随机常微分方程(2)的逼近解,即对时间区间 $[0, T]$ 进行离散,

$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_N = T$ , 步长  $\Delta t = \frac{T}{N}$ , 则

$$y_{n+1} = y_n + f(y_n)\Delta t + g(y_n)\Delta W_n \quad (4)$$

其中,  $\Delta W_n = W_{t_{n+1}} - W_{t_n}$  表示定义在区间  $[t_n, t_{n+1}]$  上的 Wiener 过程的增量, 是服从  $N(0, \Delta t)$  分布的相互独立的随机变量。该欧拉格式的强收敛阶只有 0.5。

**Milstein 方法**:1974 年, Milstein 给出了求解随机常微分方程(3)的具有一阶强收敛的 Milstein 方法, 即

$$y_{n+1} = y_n + f(y_n)\Delta t + g(y_n)\Delta W_n + \frac{1}{2}g(y_n)g'(y_n)[(\Delta W_n)^2 - \Delta t]$$

**Runge-Kutta 方法**:1982 年, Rümelin 将 Runge-Kutta 方法发展到随机微分方程, 构造了解式(3)的一阶强收敛的随机 Runge-Kutta 方法, 其一般格式为

$$\begin{cases} Y_i = y_n + \Delta t \sum_{j=1}^s a_{ij} \bar{f}(Y_j) + \sum_{j=1}^s b_{ij} J_1 g(Y_j) \\ i = 1, 2, \dots, s \\ y_{n+1} = y_n + \Delta t \sum_{j=1}^s \alpha_j \bar{f}(Y_j) + \sum_{j=1}^s \gamma_j J_1 g(Y_j) \end{cases}$$

这里,  $s$  是 Runge-Kutta 方法的级数,  $\bar{f}(y_n) = f(y_n) - \frac{1}{2}g(y_n)g'(y_n)$ ,  $J_1$  是服从  $N(0, \Delta t)$  分布的随机变量。

#### 3.2 应用比较

下面, 举例给出上述 3 种方法<sup>[6]</sup>数值求解的结果比较。考虑如下随机微分方程:

$$\begin{cases} dy = -\frac{1}{2}y dt + (1-y^2) dW_t \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

该随机微分方程(5)满足初始条件的精确解为

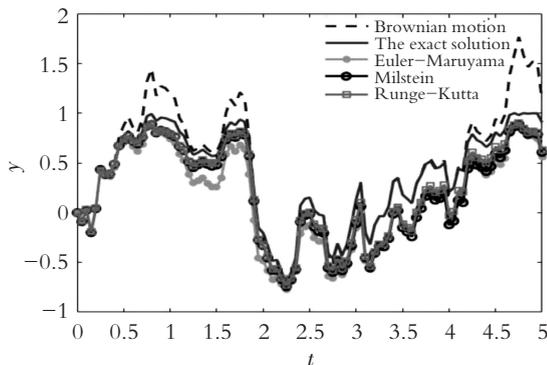
$$y = \sin W_t$$

在这里, 只给出用 Euler-Maruyama 方法数值求解随机微分方程(5)的算法, 其他两种可类似得到。

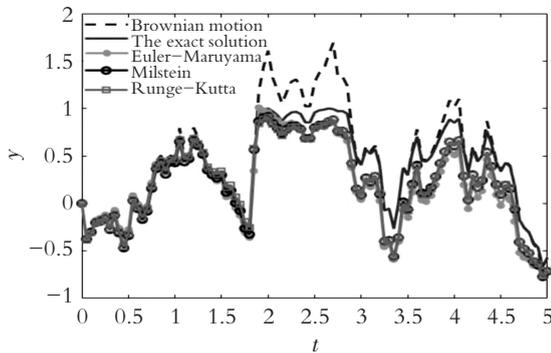
**Euler-Maruyama 算法**:

给定  $y_0, n=0, 1, 2, \dots$ , 有

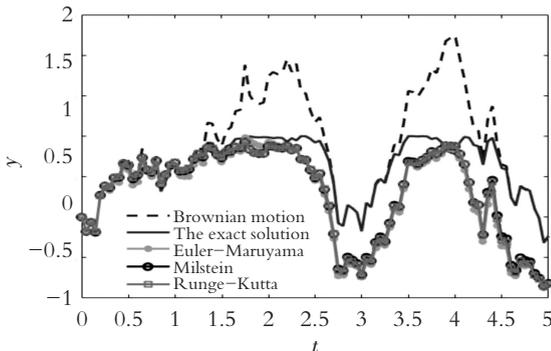
$$y_{n+1} = y_n - \frac{1}{2}y_n \Delta t + (1-y_n^2)\Delta W_n$$



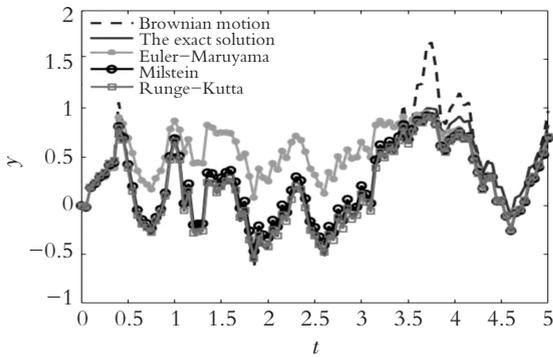
(a) 布朗运动 1 下数值解的比较



(b) 布朗运动 2 下数值解的比较



(c) 布朗运动 3 下数值解的比较



(d) 布朗运动 4 下数值解的比较

图 3 随机微分方程的数值方法与精确解的比较

Fig. 3 The comparison of three numerical methods and the exact solution of SODE

其中,  $\Delta W_n = z_n \sqrt{\Delta t}$ ,  $z_n$  可以通过正态分布生成 (在 MATLAB 中,  $z_n$  可以通过命令 `randn` 生成) 连续布朗运动的轨迹, 即随机 Wiener 过程, 可由  $W_{n+1} = W_n + z_n \sqrt{\Delta t}$  ( $W_0 = 0$ ) 计算得到。

在图 3 的 4 个图中, 虚线均表示连续的布朗运动轨迹 (Brownian motion), 即随机 Wiener 过程; 实线均表示随机微分方程式 (4) 的精确解 (The exact solution), 余下 3 条线分别表示用 Euler-Maruyama 方法、Milstein 方法和 Runge-Kutta 方法得到的数值解。从图 3 可以看到, Milstein 方法和 Runge-Kutta 方法得到的数值解几乎完全重合, 与精确解的偏差较小, 这是因为 Milstein 方法和 Runge-Kutta 方法都是一阶强收敛的。而从 4 个图整体来看, Euler-Maruyama 方法得到的数值解偏离精确解较多, 这是因为 Euler-Maruyama 方法的强收敛阶只有 0.5, 这些都与理论分析完全吻合。

## 4 小 结

先从一阶常微分方程解析解的求解出发, 对比了常微分方程的几种经典数值求解方法: 欧拉方法、改进的欧拉方法、三阶 Runge-Kutta 公式和四阶 Runge-Kutta 公式, 并举例编程可视化对比了精确解和相应数值解的偏差, 以此说明他们的不同和优势; 其次从 Itô 随机微分方程的产生出发, 举例对比了随机常微分方程精确解和相应的确定性 (deterministic) 常微分方程精确解的差别, 以此看到

随机布朗运动对微分方程解的影响; 最后给出了随机常微分方程的 3 种数值求解方法: Euler-Maruyama 方法、Milstein 方法和 Runge-Kutta 方法, 并举例图示对比了不同布朗运动下的 3 种数值方法的求解结果以及与精确解的偏差, 实验结果与理论分析也完全吻合。本文对随机微分方程的学习和数值解的求解及应用都有一定的指导意义。

## 参考文献 (References):

- [1] 汤涛, 周涛. 不确定性量化的高精度数值方法和理论[J]. 中国科学: 数学, 2015, 45 (7): 891—928  
TANG T, ZHOU T. Recent Developments in High Order Numerical Methods for Uncertainty Quantification [J]. Scientia Sinica Mathematica, 2015, 45 (7): 891—928 (in Chinese)
- [2] MARKOS A K. Noise Regularization and Computations for the 1-dimensional Stochastic Allen-Cahn Problem [J]. Interfaces and Free Boundaries, 2007, 9(1): 1—30
- [3] FENG X B, LI Y K, ZHANG Y. A Fully Discrete Mixed Finite Element Method for the Stochastic Cahn-Hilliard Equation with Gradient-type Multiplicative Noise [J]. Journal of Scientific Computing, 2020, 83(23): 1—24
- [4] FENG X B, LI Y K, ZHANG Y. Finite Element Methods for the Stochastic Allen-Cahn Equation with Gradient-type Multiplicative Noise [J]. Siam Journal on Numerical Analysis, 2017, 55(1): 194—216
- [5] ITÔ K. On Stochastic Differential Equations [J]. Memoirs of the American Mathematical Society, 1951, 4(1): 1—51
- [6] ARTMEEV S S. The Stability of Numerical Methods for Solving Stochastic Differential Equations [J]. Siberian Mathematical Journal, 1994, 35(6): 1070—1074
- [7] LI H R, SONG Z Y. A Reduced-order Energy-stability-preserving Finite Difference Iterative Scheme Based on POD for the Allen-Cahn Equation [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2020, 491(1): 1—12
- [8] LI H R, SONG Z Y, ZHANG F C. A Reduced-order Modified Finite Difference Method Preserving Unconditional Energy-stability for the Allen-Cahn Equation [J]. Numerical Methods Partial Differential Equations, 2021, 37(3): 1869—1885

# Some Numerical Methods and Applications of Stochastic Ordinary Differential Equations

**LI Huan-rong**

(School of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University,  
Chongqing 400067, China)

**Abstract:** Stochastic ordinary differential equation (SODE) is the product of the combination of probability theory and ordinary differential equation (ODE). It is more difficult to solve the exact solutions for stochastic differential equations than to solve the exact solutions of deterministic differential equations. In view of a popular interdisciplinary subject—solving stochastic differential equations, the application and comparison of the numerical solutions of stochastic differential equations are discussed in this paper. So we discussed numerical methods of stochastic differential equations, including Euler–Maruyama method, Milstein method and Runge–Kutta method. The differences between the exact solutions of stochastic differential equations and the exact solutions of deterministic differential equations under the influence of different Brownian motion are compared by several examples, and the results of different numerical methods and the errors between the numerical solutions and the exact solutions are also compared. The results show that the numerical solutions of the Milstein method and Runge–Kutta method are closer to the true solution than the Euler–Maruyama method, which are consistent with the theoretical analysis. This conclusion has some guiding significance for the theoretical methods and applications of numerical solutions of stochastic ordinary differential equations.

**Key words:** stochastic ordinary differential equations; numerical methods; Euler–Maruyama method; Milstein method; Runge–Kutta method

责任编辑:李翠薇

---

引用本文/Cite this paper:

李焕荣. 随机常微分方程的几种数值求解方法及其应用[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版), 2021, 38(6): 82–88

LI H R. Some Numerical Methods and Applications of Stochastic Ordinary Differential Equations [J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition), 2021, 38(6): 82–88