第 38 卷第 5 期 重庆工商大学学报(自然科学版) 2021 年 10 月
Vol. 38 No. 5 J Chongqing Technol & Business Univ(Nat Sci Ed) Oct. 2021

doi:10. 16055/j. issn. 1672-058X. 2021. 0005. 006

线性随机时变系统的有限时间稳定性研究*

余　勇[1], 吴小太[2]

(1. 安徽工程大学 电气工程学院, 安徽 芜湖 241000; 2. 安徽工程大学 数理学院, 安徽 芜湖 241000)

摘　要:针对一类具有有限时间的随机微分时变系统,研究了关于随机线性时变系统的有限时间稳定性及控制器设计问题。首先,引入了有限时间稳定性的定义,基于该定义提出了一种针对假定的 Lyapunov 函数满足分段连续性,在每一个分段点处可能不连续的有限时间稳定性的新方法,并借助切换系统的思想研究了随机时变系统的有限时间稳定性;在此基础上,考虑带有反馈控制器的随机时变系统的控制器设置问题,并通过采用逐段控制的方法给出了系统的控制器设置方法;最后基于线性矩阵不等式设计了一类线性随机时变系统的有限时间稳定控制器的算法,使得对于控制器的设置能够有效地实现。

关键词:有限时间稳定性;随机时变系统;线性系统;线性矩阵不等式

中图分类号:O231. 1　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1672-058X(2021)05-0037-05

0 引　言

近些年,针对时变系统控制问题的研究越来越受到控制领域专家的关注,并成为被广泛讨论的热门问题之一,研究时变系统的稳定性是系统设计的重要问题。Zhou[1] 提出了一类线性时变系统的渐近稳定性、指数稳定性和一致指数稳定性的充要条件。针对线性时变系统的研究虽然取得了一些进展,但现有的结果大多局限于线性时变系统的稳定性问题。Zhang[2] 研究了一类线性时变系统的采样数据控制,根据比较原理和 Halanay 不等式,推导了闭环系统的全局一致指数稳定性和全局一致渐近稳定性的新判据。

在实际生活中的系统,往往会受到一些不可预测的随机因素影响,如果忽略随机因素对实际系统的影响,可能会导致建模的系统性能不佳,难以刻画系统的实际运行状态。因此,需要建立随机线性时变系统模型,并研究其相关性质。Wu[3] 研究了脉冲非线性随机系统的输入状态稳定性,这里连续时间动态系统是时变的,系统在一部分时间区间上稳定,而在其他时间区间内不稳定,文中给出了一些基于 Lyapunov 函数方法的脉冲随机非线性系统的充分条件。

Kamenkov[5] 在 1953 年首先提出了有限时间稳定性概念,经过多年的发展,关于有限时间稳定性研究已取得了大量的结果[6-13]。Zhou[6] 提出了时变系统的随机时间稳定性研究方法,基于线性矩阵不等式的优化方法来求解控制增益矩阵;Amato[7] 考虑了连续时间线性系统的有限时间稳定,设计了动态输出反馈控制器的充分条件,保证了闭环系统的有限时间稳定性。

综上所述,Zhou[6] 提出了一类线性时变系统有限时间稳定性的研究方法,并通过线性矩阵不等式方法给出了系统的反馈控制器。然而,该方法并不能用来研究随机时变系统的有限时间稳定性;同时,

收稿日期:2020-08-11;**修回日期:**2020-12-31.

* **基金项目:**国家自然科学基金资助(61873294).

作者简介:余勇(1993—),男,安徽安庆人,硕士研究生,从事随机控制理论及应用研究.

Amato[11] 研究了随机线性系统的有限时间稳定性,但 Amato[11] 的反馈控制设置并不能很好解决时变系统的反馈控制器设置问题,所给的反馈控制器很难在实际操作中加以应用。因此,本文结合 Zhou[6] 逐段分析的方法和随机分析技巧,研究了随机线性时变系统的有限时间稳定性,并给出了系统反馈控制器的设置方法。

1 相关定义

相关记号:记 $\mathbf{R}=\{-\infty,+\infty\}$,$\mathbf{R}^{+}=(0,+\infty)$,$\boldsymbol{P}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$,$\boldsymbol{P}(t)\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$ 分别为矩阵与矩阵值函数。对于矩阵 $\boldsymbol{P}$,$\boldsymbol{P}>0$ 表示 $\boldsymbol{P}$ 为正定矩阵,$\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的转置,$\lambda_{\min}(\boldsymbol{P})$ 和 $\lambda_{\max}(\boldsymbol{P})$ 分别表示对称矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的最小和最大特征值;设 $\boldsymbol{P}=a_{ij}$,$\boldsymbol{Q}=b_{ij}$,对任意的 $i,j=1,2,\cdots,n$,有 $a_{ij}\geqslant b_{ij}$,则称 $\boldsymbol{P}\geqslant\boldsymbol{Q}$;$\boldsymbol{I}_n$ 表示 n 维单位矩阵;设 $\omega(t)$ 表示 n 维标准布朗运动,$E(\cdot)$ 表示随机变量的期望。

研究如下随机线性时变系统:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)\mathrm{d}t+\boldsymbol{H}(t)\boldsymbol{x}(t)\mathrm{d}\omega(t) \tag{1}$$

其中 $t\in[0,T]$,$T\in\mathbf{R}^{+}$;$\boldsymbol{x}(t)\in\boldsymbol{R}^{n}$,系统状态 $\boldsymbol{x}(t)\in\boldsymbol{R}^{n}$,系统初值 $\boldsymbol{x}(\mathbf{0})=\boldsymbol{x}_{\mathbf{0}}$,矩阵值函数 $\boldsymbol{A}(t)$,$\boldsymbol{H}(t)\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$。下面将研究系统式(1)的随机有限时间稳定性,首先给出有限时间稳定的定义如下:

定义 1[13] 假定 $\Phi=[0,T]$,$\boldsymbol{R}\in\boldsymbol{R}^{n\times m}$,$\boldsymbol{\Gamma}(\cdot)$ 为正定矩阵。对式(1),若对于任给的 $\boldsymbol{x}_0$ 与 $t\in\Phi$,有

$$\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}_0\leqslant 1\Rightarrow E[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Gamma}(t)\boldsymbol{x}(t)]<1$$

则称系统式(1)满足随机有限时间稳定性。

定义 2[3] 对于函数 $V:[0,\infty)\times\boldsymbol{R}^{n}\rightarrow\boldsymbol{R}^{+}$,对式(1)定义算子 $\ell V:[0,\infty)\times\boldsymbol{R}^{n}\rightarrow\mathbf{R}$,如下:

$$\ell V(t,\boldsymbol{x}(t))=V_t(t,\boldsymbol{x}(t))+V_x(t,\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)+\frac{1}{2}[\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)V_{xx}(t,\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{H}(t)\boldsymbol{x}(t)]$$

$$V_t(t,\boldsymbol{x}(t))=\frac{\partial V(t,\boldsymbol{x}(t))}{\partial t}$$

$$V_x(t,\boldsymbol{x}(t))=\left(\frac{\partial V(t,\boldsymbol{x}(t))}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial V(t,\boldsymbol{x}(t))}{\partial x_z}\right)$$

$$V_{xx}(t,\boldsymbol{x}(t))=\left(\frac{\partial^2 V(t,\boldsymbol{x}(t))}{\partial x_{z_1}\partial x_{z_2}}\right)_{z\times z}$$

$$0\leqslant z_1,z_2\leqslant z$$

2 主要结论

定理 1 给定一个初始时刻 $t_0\geqslant 0$,$\boldsymbol{R}\in\boldsymbol{R}^{n\times n}$,正定矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}(t):[t_0,t_0+T]\rightarrow\boldsymbol{R}^{n\times n}$,且满足 $\boldsymbol{\Gamma}(t)<\boldsymbol{R}$。假定 $\{t_i\mid t_{i+1}=t_i+\delta_i;\delta_i>0;i=0,1,\cdots,r;t_{r+1}=t_0+T\}$ 为离散时间序列,$\boldsymbol{P}(t):[t_0,t_{r+1})\rightarrow\boldsymbol{R}^{n\times n}$ 为分段连续矩阵函数,且满足:

$$\boldsymbol{P}(t)=\boldsymbol{P}_i,\ \forall t\in[t_i,t_{i+1}],i\in\{0,1,\cdots,r-1\}$$

若有

(A_1) 对于所有 $t\in[t_0,t_0+T]$,有

$$\boldsymbol{P}(t)\geqslant\boldsymbol{\Gamma}(t),\boldsymbol{P}_0<\boldsymbol{R} \tag{2}$$

(A_2) 对于 $i\in\{0,1,\cdots,r-1\}$,有

$$\int_{t_i}^{t}\alpha(s)\mathrm{d}s\leqslant 0,\ \forall t\in[t_i,t_{i+1}) \tag{3}$$

这里

$$\alpha(s)=\lambda_{\max}(\boldsymbol{P}_i^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{P}_i^{\frac{1}{2}}+\boldsymbol{P}_i^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{A}(s)\boldsymbol{P}_i^{-\frac{1}{2}}+\boldsymbol{P}_i^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{H}(s)\boldsymbol{P}_i^{-\frac{1}{2}}) \tag{4}$$

(A_3) 对于 $i\in\{0,1,\cdots,r-1\}$,有

$$\int_{t_0}^{t_i}\alpha(s)\mathrm{d}s+\sum_{k=1}^{i}\ln(\lambda_{\max}(\boldsymbol{P}_k\boldsymbol{P}_{k+1}^{-1}))\leqslant 0$$

成立,则式(1)满足有限时间稳定性。

证明 设 Lyapunov 函数 $V(t,\boldsymbol{x}(t))=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{x}(t)$,由式(2)可知,对 $t\in[t_0,t_0+T]$,有 $\boldsymbol{P}(t)>0$。令 $\boldsymbol{z}(t)=\boldsymbol{P}^{\frac{1}{2}}(t)\boldsymbol{x}(t)$,于是

$$V(t,\boldsymbol{x}(t))=\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{z}(t) \tag{5}$$

注意到 $\boldsymbol{P}(t)=\boldsymbol{P}_i$,对于 $\forall t\in[t_i,t_{i+1}]$,$i\in\{0,1,\cdots,r-1\}$,由定义 2 知,对 $\forall t\in[t_i,t_{i+1}]$,有

$$\ell V(t,\boldsymbol{x}(t))=\boldsymbol{z}^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{P}_i^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{P}_i^{\frac{1}{2}}+\boldsymbol{P}_i^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{A}(s)\boldsymbol{P}_i^{-\frac{1}{2}}+\boldsymbol{P}_i^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{H}(s)\boldsymbol{P}_i^{-\frac{1}{2}})\boldsymbol{z}(t)$$

由式(4)知

$$\ell V(t,\boldsymbol{x}(t))\leqslant\alpha(t)V(t,\boldsymbol{x}(t)),t\in[t_i,t_{i+1}]$$

令 $U(t,\boldsymbol{x}(t))=\mathrm{e}^{\int_{t_i}^{t}-\alpha(s)\mathrm{d}s}V(t,\boldsymbol{x}(t))$,由 Itô 公式,对 $t\in[t_i,t_{i+1}]$,有

$$U(t,\boldsymbol{x}(t))=U(t_i,\boldsymbol{x}(t_i))+\int_{t_i}^{t}\mathrm{e}^{\int_{t_i}^{s}-\alpha(u)\mathrm{d}u}[-\alpha(s)V(s,\boldsymbol{x}(s))+\ell V(s,\boldsymbol{x}(s))]\mathrm{d}s+\int_{t_i}^{t}\mathrm{e}^{\int_{t_i}^{s}-\alpha(u)\mathrm{d}u}[V_x(s,\boldsymbol{x}(s))g(s,\boldsymbol{x}(s))\mathrm{d}\omega(s)] \tag{6}$$

对式(6)两边取期望,可得

$$E[U(t,\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}))]=E[U(t_i,\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_i))]+$$
$$E\Big[\int_{t_i}^{t}\mathrm{e}^{\int_{t_i}^{s}-\alpha(u)\mathrm{d}u}[-\alpha(s)V(s,\boldsymbol{x}(\boldsymbol{s}))+\ell V(s,\boldsymbol{x}(\boldsymbol{s}))]\mathrm{d}s\Big] \tag{7}$$

由式(7),通过简单整理,可得:

$$E[U(t,\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}))]\leqslant E[U(t_i,\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}_i))],t\in[t_i,t_{i+1}]$$

注意到 $U(t,\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}))$ 的形式,可得

$$E[V(t,\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}))]\leqslant$$
$$E[V(t_i,\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t_i}))]\mathrm{e}^{\int_{t_i}^{t}\alpha(s)\mathrm{d}s},t\in[t_i,t_{i+1}] \tag{8}$$

由式(3)与式(8),对 $\forall t\in[t_i,t_{i+1}]$,有

$$E[V(t,\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}))]\leqslant E[V(t_i,\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t_i}))] \tag{9}$$

由于假定的 Lyapunov 函数满足分段连续性,在每一个分段点 t_i 处,函数可能不连续。下文将给出 $V(t_i,\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t_i}))$ 的上界估计。由式(5),有

$$E[V(t_i^-,\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t_i^-}))]=E[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{t_i})\boldsymbol{P}_{i-1}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t_i})]=$$
$$E[z^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{t_i})\boldsymbol{P}_i^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{P}_{i-1}\boldsymbol{P}_i^{-\frac{1}{2}}z(\boldsymbol{t_i})]\geqslant$$
$$\lambda_{\min}(\boldsymbol{P}_i^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{P}_{i-1}\boldsymbol{P}_i^{-\frac{1}{2}})z^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{t_i})z(\boldsymbol{t_i}) \tag{10}$$

由式(8),可得

$$E[V(t_i^-,\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t_i^-}))]\leqslant E[V(t_{i-1},\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t_{i-1}}))]\mathrm{e}^{\int_{t_{i-1}}^{t_i}\alpha(s)\mathrm{d}s} \tag{11}$$

结合式(10)和式(11),有

$$E[V(t_i,\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t_i}))]\leqslant E[z^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{t_i})z(\boldsymbol{t_i})]\leqslant$$
$$E[V(t_{i-1},\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t_{i-1}}))]\frac{\mathrm{e}^{\int_{t_{i-1}}^{t_i}\alpha(s)\mathrm{d}s}}{\lambda_{\min}(\boldsymbol{P}_i^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{P}_{i-1}\boldsymbol{P}_i^{-\frac{1}{2}})}=$$
$$E[V(t_{i-1},\boldsymbol{x}(t_{i-1}))]\lambda_{\max}(\boldsymbol{P_i}\boldsymbol{P}_{i-1}^{-1})\mathrm{e}^{\int_{t_{i-1}}^{t_i}\alpha(s)\mathrm{d}s}$$

由 $V(t,\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}))$ 的定义,对于 $\forall i\in\{0,1,\cdots,r-1\}$,有

$$E[V(t_i,\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t_i}))]\leqslant E[z^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{t_i})z(\boldsymbol{t_i})]\leqslant$$
$$E[V(t_{i-1},\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t_{i-1}}))]\lambda_{\max}(\boldsymbol{P_i}\boldsymbol{P}_{i-1}^{-1})\mathrm{e}^{\int_{t_{i-1}}^{t_i}\alpha(s)\mathrm{d}s}\leqslant$$
$$E[V(t_0,\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t_0}))]\prod_{k=1}^{i}\lambda_{\max}(\boldsymbol{P_k}\boldsymbol{P}_{k-1}^{-1})\mathrm{e}^{\int_{t_{k-1}}^{t_k}\alpha(s)\mathrm{d}s} \tag{12}$$

对式(12)右边进行整理

$$\ln\Big(\prod_{k=1}^{i}\lambda_{\max}(\boldsymbol{P_k}\boldsymbol{P}_{k-1}^{-1})\mathrm{e}^{\int_{t_{k-1}}^{t_k}\alpha(s)\mathrm{d}s}\Big)=$$
$$\sum_{k=1}^{i}\ln(\lambda_{\max}(\boldsymbol{P_k}\boldsymbol{P}_{k-1}^{-1}))+\sum_{k=1}^{i}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\alpha(s)\mathrm{d}s=$$
$$\sum_{k=1}^{i}\ln(\lambda_{\max}(\boldsymbol{P_k}\boldsymbol{P}_{k-1}^{-1}))+\int_{t_0}^{t_i}\alpha(s)\mathrm{d}s\leqslant 0 \tag{13}$$

结合式(12)和式(13),即得

$$E[V(t_i,\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t_i}))]\leqslant E[V(t_0,\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t_0}))]$$
$$i\in\{0,1,\cdots,r-1\} \tag{14}$$

综合式(9)和式(14),有

$$E[V(t,\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}))]\leqslant E[V(t_0,\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t_0}))]$$
$$\forall t\in[t_0,t_0+T]$$

如果式(1)中的初值满足 $\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{X}_0\leqslant 1$,可得

$$E[V(t_0,\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t_0}))]=E[\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{x}_0]<1 \tag{15}$$

故由式(2)和(15),可得

$$E[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})]\leqslant E[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{P}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})]=$$
$$E[V(t,\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t}))]<1$$

故式(1)满足随机有限时间稳定性。

3　控制器设计

本节中,将采用 Zhou[6] 类似的方法,考虑系统式(1)的控制器设置问题。假定具有反馈控制器的随机线性时变系统如下:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})\mathrm{d}t+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})\mathrm{d}t+$$
$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})\mathrm{d}\omega(t) \tag{16}$$

状态反馈 $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{K}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$。

定理 2　$\boldsymbol{Q}(\cdot)$,$\boldsymbol{L}(\cdot)$ 为分段连续的矩阵值函数,并且满足

$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{Q_i}\in\boldsymbol{R}^{n\times n},\forall t\in[t_i,t_{i+1})$$
$$i\in\{0,1,\cdots,r-1\}$$
$$\boldsymbol{L}(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{L_i}\in\boldsymbol{R}^{n\times m},\forall t\in[t_i,t_{i+1})$$
$$i\in\{0,1,\cdots,r-1\} \tag{17}$$

假定

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{L}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{t})^{-1}$$
$$\forall t\in[t_0,t_0+T)=\boldsymbol{L_i}\boldsymbol{Q_i}^{-1}$$
$$\forall t\in[t_i,t_{i+1}),i\in\{0,1,\cdots,r-1\}$$

则系统式(16)可写成

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{A_c}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})\mathrm{d}t+\boldsymbol{H}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})\mathrm{d}\omega(t)$$

这里 $\boldsymbol{A_c}(\boldsymbol{t})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t})+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{L}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{Q}^{-1}(\boldsymbol{t})$。若有

(A_4)　对于 $\forall t\in[t_0,t_0+T)$,有

$$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{t})\leqslant\boldsymbol{\Gamma}^{-1}(\boldsymbol{t}),\boldsymbol{Q}_0>\boldsymbol{R}^{-1}$$

(A_5)　对于 $i\in\{0,1,\cdots,r-1\}$,有

$$\int_{t_i}^{t}\alpha(s)\mathrm{d}s\leqslant 0,\forall t\in[t_i,t_{i+1})$$

这里

$$\alpha(s)=\lambda\max(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{s})+\boldsymbol{Q}^{-1}(\boldsymbol{s})\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{s})\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{s})+$$

$$\boldsymbol{Q}(s)\boldsymbol{A}(s)\boldsymbol{Q}(s)+\boldsymbol{Q}^{-1}(s)\boldsymbol{B}(s)\boldsymbol{L}(s)+\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{Q}^{-1}(s)\boldsymbol{H}(s)\boldsymbol{Q}(s))$$

(A_6) 若 $\alpha(s)$ 满足

$$\prod_{k=1}^{i}\lambda\min(\boldsymbol{Q}_{k-1}\boldsymbol{Q}_k)\geqslant \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t_i}\alpha(s)\mathrm{d}s}$$

(A_7) H_i 满足

$$H_i\leqslant\delta_i I \tag{18}$$

成立,则随机线性时变系统式(16)存在随机有限时间稳定的反馈控制器。

证明 设 $\boldsymbol{Q}(t)$ 为分段连续的函数值矩阵,且满足

$$\boldsymbol{P}(t)=\boldsymbol{Q}^{-1},\ \forall t\in[t_i,t_{i+1}),i\in\{0,1,\cdots,r-1\}$$

由条件(A_4)可知条件(A_1)成立。对于 $\forall t\in[t_0,t_0+T]$,有

$$\begin{aligned}\alpha(s)=\ &\lambda_{\max}(\boldsymbol{P}^{-\frac{1}{2}}(s)\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{P}^{\frac{1}{2}}(s)+\\&\boldsymbol{P}^{\frac{1}{2}}(s)\boldsymbol{A}(s)\boldsymbol{P}^{-\frac{1}{2}}(s)+\\&\boldsymbol{P}^{-\frac{1}{2}}(s)\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{H}(s)\boldsymbol{P}^{-\frac{1}{2}}(s))=\\&\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)+\boldsymbol{Q}^{-1}(t)\boldsymbol{A}_c(t)\boldsymbol{Q}(t)+\\&\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}^{-1}(t)\boldsymbol{H}(t)\boldsymbol{Q}(t)=\\&\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)+\boldsymbol{Q}^{-1}(t)\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(t)+\\&\boldsymbol{Q}^{-1}(t)\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{Q}(t)+\boldsymbol{Q}^{-1}(t)\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{L}(t)+\\&\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{Q}^{-1}(t)\boldsymbol{H}(t)\boldsymbol{Q}(t)\end{aligned}$$

所以由条件(A_5)可以推出条件(A_2)成立。因为 $\boldsymbol{Q}_i,i\in\{0,1,\cdots,r-1\}$ 正定,能得到

$$\lambda_{\min}(\boldsymbol{Q}_{i-1}^{-1}\boldsymbol{Q}_i)=\frac{1}{\boldsymbol{Q}_{i-1}^{-1}\boldsymbol{Q}_i}=\frac{1}{\lambda_{\max}(\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_{i-1}^{-1})}$$

根据式(18),可得

$$\int_{t_0}^{t_i}\alpha(s)\mathrm{d}s\leqslant\sum_{k=1}^{i}\ln\lambda_{\min}(\boldsymbol{Q}_{k-1}^{-1}\boldsymbol{Q}_k)=-\sum_{k=1}^{i}\ln\lambda_{\min}(\boldsymbol{P}_k\boldsymbol{P}_{k-1}^{-1}) \tag{19}$$

由条件(A_6)可以推出条件(A_3)成立。于是,由定理 1 可知,随机时变线性系统式(16)满足随机有限时间稳定性。

定理 2 提供了系统式(16)的控制器设计充分可解条件的存在性。根据式(17),如果定理 2 中的条件能被满足,则能得到一个状态反馈控制器,对于分段连续常数 $\boldsymbol{L}(\cdot)$,$\boldsymbol{Q}(\cdot)$ 仍然很难实现。因此,下面基于线性矩阵不等式,设计了一类线性随机时变系统的有限时间稳定控制器的算法。

算法设计:

(1) 对于初始时刻 t_0,选择 $t_1>t_0$,求解下列带有决策变量 $\boldsymbol{L}_0$,$\boldsymbol{Q}_0$ 的 LMIs(线性矩阵不等式)。

$$\begin{gathered}\boldsymbol{Q}_0>\boldsymbol{R}^{-1}\\ \boldsymbol{Q}_0\leqslant\boldsymbol{\Gamma}^{-1}(t),\ \forall t\in[t_0,t_1)\\ \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{Q}_0+\boldsymbol{Q}_0\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)+\boldsymbol{L}_0\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(t)+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{L}_0+\\ \delta^2\boldsymbol{Q}_0\leqslant 0,\ \forall t\in[t_0,t_1)\end{gathered} \tag{20}$$

寻找 $\boldsymbol{L}_0$,$\boldsymbol{Q}_0$,满足式(19),如果式(19)不满足,则重新选择 t_1。

(2) 对于时刻 t_i,选择 $t_{i+1}>t_i$,求解下列带有决策变量 $\boldsymbol{L}_i$,$\boldsymbol{Q}_i$ 的 LMIs(线性矩阵不等式)。

$$\begin{gathered}\boldsymbol{Q}_i\leqslant\boldsymbol{\Gamma}^{-1}(t),\ \forall t\in[t_i,t_{i+1})\\ \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{Q}_i+\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(t)+\boldsymbol{L}_i\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(t)+\boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{L}_i+\\ \delta^2\boldsymbol{Q}_i\leqslant 0,\ \forall t\in[t_i,t_{i+1})\\ \boldsymbol{Q}_i\geqslant\boldsymbol{R}_i\boldsymbol{Q}_{i-1}\end{gathered}$$

其中

$$\boldsymbol{R}_i=\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t_1}\alpha(s)\mathrm{d}s},i=1$$

$$\boldsymbol{R}_i=\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t_i}\alpha(s)\mathrm{d}s}\prod_{k=1}^{i-1}\lambda_{\max}(\boldsymbol{Q}_k^{-1}\boldsymbol{Q}_{k-1}),i=1$$

寻找 $\boldsymbol{L}_i$,$\boldsymbol{Q}_i$,满足式(20),如果式(20)不满足,则重新选择 t_{i+1}。

参考文献(References):

[1] ZHOU B. On Asymptotic Stability of Linear Time-varying Systems[J]. Automatica, 2016, 68: 266—276

[2] ZHANG W, HAN Q, TANG Y, et al. Sampled-Data Control for a Class of Linear Time-Varying Systems[J]. Automatica, 2019, 103:126—134

[3] WU X, SHI P, TANG Y, et al. Input-to-State Stability of Nonlinear Stochastic Time-Varying Systems with Impulsive Effects[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2017, 27(10): 1792—1809

[4] GUO Y, SONG S, LI X. Attitude and Orbit Coupled Control for Non-cooperative Rendezvous and Docking[J]. Control Theory & Applications, 2016, 33(5): 638—644

[5] KAMENKOV G V. On Stability of Motion over a Finite Interval of Time [J]. Journal of Applied Mathematics and Mechanics (in Russian), 1953, 17(2): 529—540

[6] TAN F, ZHOU B, DUAN G. Finite-Time Stabilization of Linear Time-Varying Systems by Piecewise Constant Feedback[J]. Automatica, 2016, 68: 277—285

[7] AMATO F, ARIOLA M, COSENTINO C. Finite-Time Stabilization via Dynamic Output Feedback [J].

Automatica, 2005, 42(2): 337—342

[8] RANG E. Isochrone Families for Second-order Systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1963, 8(1): 64—65

[9] BHAT S, BERNSTEIN D S. Finite-Time Stability of Homogeneous Systems[C]// American Control Conference. Procodings of the 1997,1997

[10] BHAT S, BERNSTEIN D S. Lyapunov Analysis of Finite-Time Differential Equations[C]// American Control Conference, Proceedings of the 1995, 1995

[11] HONG Y. Finite-Time Stabilization and Stabilizability of A Class of Controllable Systems[J]. Systems & Control Letters, 2002, 46(4): 231—236

[12] BHAT S P, BERNSTEIN D S. Geometric Homogeneity with Applications to Finite-time Stability[J]. Mathematics of Control Signals & Systems, 2005, 17(2): 101—127

[13] AMATO F, COSENTINO C, TOMMA G D SI, et al. New Conditions for the Finite-Time Stability of Stochastic Linear Time-Varying Systems[C]// 2015 European Control Conference. IEEE, 2015

Research on Finite Time Stability of Linear Stochastic Time-varying System

YU Yong[1], WU Xiao-tai[2]

(1. School of Electrical Engineering, Anhui Polytechnic University, Anhui Wuhu 241000, China;
2. School of Mathematics and Physics, Anhui Polytechnic University, Anhui Wuhu 241000, China)

Abstract: For a class of stochastic differential systems with finite time, the finite time stability and controller design of stochastic linear time-varying systems are studied. First, the definition of finite-time stability is introduced. Based on this definition, a new method for finite-time stability where the assumed Lyapunov function satisfies piecewise continuity and may be discontinuous at each piecewise point is proposed. With the help of the idea of switching systems, the finite time stability of stochastic time-varying systems is studied. Then, based on the finite time stability of the stochastic time-varying system, the controller setting problem of the stochastic time-varying system with feedback controller is considered, and the system controller setting method is given by adopting the step-by-step control method. Finally, based on the linear matrix inequality, a class of linear stochastic time-varying system's finite time stable controller algorithm is designed, so that the setting of the controller can be effectively realized.

Key words: finite time stability; stochastic time-varying system; linear system; linear matrix inequality

责任编辑:李翠薇

引用本文/Cite this paper:
余勇,吴小太. 线性随机时变系统的有限时间稳定性研究[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版),2021,38(5):37—41
YU Y, WU X T. Research on Finite Time Stability of Linear Stochastic Time-varying System[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition),2021,38(5):37—41